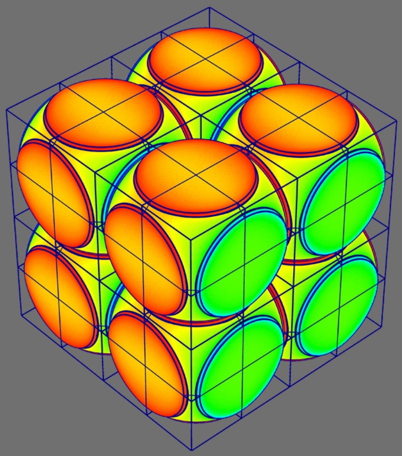
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование
и численные методы

Чуев В. Ю., Дубограй И. В. Стохастические модели дуэльного боя двух единиц. Математическое моделирование и численные методы, 2016, №2 (10), с. 69-84

УДК 519.8

Стохастические модели дуэльного боя двух единиц

© В.Ю. Чуев, И.В. Дубограй

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

На основе теории непрерывных марковских процессов разработаны модели дуэльного боя двух единиц. Получены расчетные формулы для вычисления основных показателей боя. Установлено, что упреждающий удар одной из участвующих в бою единиц оказывает существенное влияние на исход боя близких по силам единиц и незначительное влияние, если одна из единиц имеет значительное превосходство. Показано, что использование модели с постоянными эффективными скорострельностями может привести к существенным ошибкам при оценке его результатов. Установлено, что упреждающий удар в совокупности с более высокой степенью роста эффективной скорострельности может в отдельных случаях компенсировать более чем двукратное начальное превосходство противника. Показана возможность использования аппроксимаций эффективных скорострельностей боевых единиц различными функциями времени боя.

Ключевые слова: *боевая единица, эффективная скорострельность, дуэльный бой двух единиц, параметр соотношения сил, непрерывный марковский процесс.*

Введение. Для оценки работоспособности проектируемых технических устройств необходимо построение математической модели их функционирования [1]. При разработке новых образцов вооружения и военной техники основой их военно-технической оценки являются результаты математического моделирования их боевого применения. В качестве такой оценки необходимо использовать модели двусторонних боевых действий, поскольку они позволяют более полно оценить степень приспособленности данного образца к решению конкретных боевых задач, чем модель без учета ответного огня [2–4]. Двусторонний бой является стохастическим процессом, поэтому в качестве основы такой оценки целесообразно использовать вероятностные модели двусторонних боевых действий, так как они позволяют исследовать процесс протекания боя со значительно большей степенью точности и полноты, чем детерминированные модели (модели динамики средних) [5–7].

Одним из возможных способов построения вероятностной модели двусторонних боевых действий является применение теории непрерывных марковских процессов [8, 9]. Процесс, протекающий в системе, называется марковским, если в каждый момент времени вероятность любого состояния системы в будущем зависит только от ее состояния в настоящий момент и не зависит от того, каким образом система пришла в это состояние [10].

Последовательность выстрелов, осуществляемых каждой участвующей в бою единицей, представляют в виде пуассоновского потока событий [11]. Используется также прием, заключающийся в переходе от потока выстрелов к потоку успешных выстрелов [12]. Выстрел назовем успешным, если он поражает боевую единицу противника.

Описание процесса протекания дуэльного боя. Рассмотрим дуэльный бой двух боевых единиц X и Y. Введем следующие обозначения:

p_x, p_y — вероятности поражения противника одним выстрелом боевой единицы X и Y соответственно,

λ_x, λ_y — практические скорострельности боевых единиц X и Y, соответственно.

Величины $v = p_x \lambda_x$, $u = p_y \lambda_y$ назовем эффективными скорострельностями боевых единиц;

$F_{10}(t)$ — вероятность того, что в момент времени t боевая единица Y уничтожена, а боевая единица X не уничтожена (состояние 1:0);

$F_{01}(t)$ — вероятность того, что в момент времени t боевая единица X уничтожена, а боевая единица Y не уничтожена (состояние 0:1);

$F_{11}(t)$ — вероятность того, что в момент времени t обе единицы X и Y продолжают бой (состояние 1:1), $F_{01}(\infty), F_{10}(\infty), F_{11}(\infty)$ — вероятности соответствующих состояний к концу боя.

При одновременном открытии огня обеими боевыми единицами процесс протекания боя выразим через систему уравнений

$$\begin{cases} F'_{10}(t) = vF_{11}(t), \\ F'_{01}(t) = uF_{11}(t), \\ F'_{11}(t) = -(v+u)F_{11}(t) \end{cases} \tag{1}$$

с начальными условиями

$$F_{01}(0) = F_{10}(0) = 0, F_{11}(0) = 1. \tag{2}$$

Если в течение времени t_c боевая единица X ведет огонь, не испытывая противодействия противника (при $t < t_c$), получим

$$\begin{cases} F'_{10}(t) = vF_{11}(t), \\ F'_{01}(t) = 0, \\ F'_{11}(t) = -vF_{11}(t) \end{cases} \tag{3}$$

с начальными условиями (2), а после открытия единицей Y ответного огня ($t \geq t_c$) процесс протекания боя выразим в системе уравнений (1) с начальными условиями

$$F_{10}\left(t_c\right) = F_1, F_{01}\left(t_c\right) = 0, F_{11}\left(t_c\right) = 1 - F_1, \tag{4}$$

где F_1 — вероятность того, что боевая единица Y будет уничтожена в течение времени t_c.

При упреждающем ударе единицы Y процесс протекания боя описать аналогично.

Наиболее простые решения рассмотренные системы уравнений имеют при постоянных эффективных скорострельностях боевых единиц, т. е. при $v = \text{const}$ и $u = \text{const}$.

При одновременном открытии огня единицами X и Y [13] имеем

$$\begin{cases} F_{10}\left(t\right) = \dfrac{v}{v+u}\left(1 - e^{-(v+u)t}\right), \\ F_{01}\left(t\right) = \dfrac{u}{v+u}\left(1 - e^{-(v+u)t}\right), \\ F_{11}\left(t\right) = e^{-(v+u)t}, \end{cases}$$

а также

$$\begin{cases} F_{10}\left(\infty\right) = \dfrac{v}{v+u}, \\ F_{01}\left(\infty\right) = \dfrac{u}{v+u}, \\ F_{11}\left(\infty\right) = 0. \end{cases}$$

При упреждающем ударе единицы X [14] до открытия единицей Y ответного огня ($t < t_c$)

$$\begin{cases} F_{10}\left(t\right) = 1 - e^{-vt}, \\ F_{01}\left(t\right) = 0, \\ F_{11}\left(t\right) = e^{-vt}, \end{cases} \tag{5}$$

и после открытия ответного огня единицей Y ($t \geq t_c$)

$$\begin{cases} F_{10}(t) = 1 - \dfrac{u}{v+u} e^{-vt_c} - \dfrac{v}{v+u} e^{-vt-u(t-t_c)}, \\ F_{01}(t) = \dfrac{u}{v+u}\left(e^{-vt_c} - e^{-vt-u(t-t_c)}\right), \\ F_{11}(t) = e^{-vt-u(t-t_c)}, \end{cases} \tag{6}$$

а также

$$\begin{cases} F_{10}(\infty) = 1 - \dfrac{u}{v+u} e^{-vt_c}, \\ F_{01}(\infty) = \dfrac{u}{v+u} e^{-vt_c}, \\ F_{11}(\infty) = 0. \end{cases}$$

При упреждающем ударе единицы Y формулы для вычисления вероятностей текущих и окончательных состояний получаются аналогично (5)–(6).

Рассмотренная модель дуэльного боя имеет ряд достоинств, таких как простота, наличие аналитических решений, возможность учета многих факторов (точности стрельбы, практической скорострельности, мощности боевой части, упреждающего удара одной из противоборствующих боевых единиц и т. д.). Однако эта модель имеет довольно существенный недостаток: эффективные скорострельности противоборствующих боевых единиц полагаются в течение всего боя постоянными, что не всегда приемлемо при описании реальных боевых действий. При отражении атаки противника, а также при наступлении на его позиции происходит сближение сторон, приводящее к уменьшению дальности стрельбы, что в свою очередь может привести к существенному увеличению эффективных скорострельностей как у наступающей, так и у обороняющейся стороны. Использование моделей боя с постоянными эффективными скорострельностями может в отдельных случаях привести к существенным ошибкам при вычислении его основных показателей. В настоящей статье сделана попытка устранить этот недостаток.

Вероятностная модель дуэльного боя с экспоненциальными зависимостями эффективных скорострельностей боевых единиц от времени боя. Анализ различных боевых ситуаций, а также экспериментальные данные показали, что в ряде случаев эффективные скорострельности боевых единиц сторон хорошо аппроксимируются экспоненциальными функциями времени боя, т. е.

$$\begin{cases} v = k_x e^{a_x t}, \\ u = k_y e^{a_y t}. \end{cases} \tag{7}$$

Система уравнений, описывающая процесс протекания боя, а также решение этой системы при упреждающем ударе единицы X при $a_x \neq 0$ и $a_y \neq 0$ приведены в работе [15].

Если эффективная скорострельность единицы X в течение боя практически не меняется, т. е. можно положить $a_x = 0$ (при этом $a_y \neq 0$), получим, что во время нанесения единицей X упреждающего удара ($t \leq t_c$) процесс протекания боя можно описать системой уравнений

$$\begin{cases} F'_{10}(t) = k_x F_{11}(t), \\ F'_{01}(t) = 0, \\ F'_{11}(t) = -k_x F_{11}(t) \end{cases} \tag{8}$$

с начальными условиями (2) и после открытия единицей Y ответного огня

$$\begin{cases} F'_{10}(t) = k_x F_{11}(t), \\ F'_{01}(t) = k_y e^{a_y t} F_{11}(t), \\ F'_{11}(t) = -\left(k_x + k_y e^{a_y t}\right) F_{11}(t) \end{cases} \tag{9}$$

с начальными условиями

$$F_{10}(t_c) = 1 - e^{-k_x t_c}, \; F_{01}(t_c) = 0, \; F_{11}(t_c) = e^{-k_x t_c}. \tag{10}$$

Решение системы (9)–(10) имеет следующий вид:

$$\begin{cases} F_{10}(t) = 1 - e^{k_x t_c} + k_x \int\limits_{t_c}^{t} e^{-k_x \tau + \frac{k_y}{a_y}\left(e^{a_y t_c} - e^{a_y \tau}\right)} d\tau, \\ F_{01}(t) = k_y \int\limits_{t_c}^{t} e^{\left(a_y - k_x\right)\tau + \frac{k_y}{a_y}\left(e^{a_y t_c} - e^{a_y \tau}\right)} d\tau, \\ F_{11}(t) = e^{-k_x t + \frac{k_y}{a_y}\left(e^{a_y t_c} - e^{a_y t}\right)}. \end{cases} \tag{11}$$

Если $a_x \neq 0$, $a_y = 0$, то во время отсутствия противодействия единицы Y $(t \le t_c)$ получим:

$$\begin{cases} F_{10}'(t) = k_x e^{a_x t} F_{11}(t), \\ F_{01}'(t) = 0, \\ F_{11}'(t) = -k_x e^{a_x t} F_{11}(t) \end{cases} \tag{12}$$

с начальными условиями (2) и после открытия единицей Y ответного огня $(t > t_c)$

$$\begin{cases} F_{10}'(t) = k_x e^{a_x t} F_{11}(t), \\ F_{01}'(t) = k_y F_{11}(t), \\ F_{11}'(t) = -\left(k_x e^{a_x t} + k_y\right) F_{11}(t) \end{cases} \tag{13}$$

с начальными условиями

$$\begin{cases} F_{10}(t_c) = 1 - e^{\frac{k_x}{a_x}\left(1 - e^{a_x t_c}\right)}, \\ F_{01}(t_c) = 0, \\ F_{11}(t_c) = e^{\frac{k_x}{a_x}\left(1 - e^{a_x t_c}\right)}. \end{cases} \tag{14}$$

Решение системы (13)–(14) имеет следующий вид:

$$\begin{cases} F_{10}(t) = 1 - e^{\frac{k_x}{a_x}\left(1 - e^{a_x t_c}\right)} + k_x \int\limits_{t_c}^{t} e^{a_x \tau + \frac{k_x}{a_x}\left(1 - e^{a_x \tau}\right) - k_y(\tau - t_c)} d\tau, \\ F_{01}(t) = k_y \int\limits_{t_c}^{t} e^{\frac{k_x}{a_x}\left(1 - e^{a_x \tau}\right) - k_y(\tau - t_c)} d\tau, \\ F_{11}(t) = e^{\frac{k_x}{a_x}\left(1 - e^{a_x t}\right) - k_y(t - t_c)}. \end{cases} \tag{15}$$

Аналогично можно получить формулы для вычисления вероятностей состояний при упреждающем ударе единицы Y. При одновременном открытии огня обеими боевыми единицами в формулах (8)–(15), а также в работе [15] следует положить $t_c = 0$.

Вероятностная модель дуэльного боя с линейными зависимостями эффективных скорострельностей боевых единиц от времени боя. В отдельных случаях эффективные скорострельности боевых единиц хорошо аппроксимируются линейными функциями времени боя, т. е.

$$\begin{cases} v = k_x\left(1 + a_x t\right), \\ u = k_y\left(1 + a_y t\right) \end{cases} \tag{16}$$

При этом во время нанесения единицей X упреждающего удара $(t \le t_c)$ процесс протекания боя можно записать как систему уравнений:

$$\begin{cases} F'_{10}(t) = k_x\left(1 + a_x t\right)F_{11}(t), \\ F'_{01}(t) = 0, \\ F'_{11}(t) = -k_x\left(1 + a_x t\right)F_{11}(t) \end{cases} \tag{17}$$

с начальными условиями (2), а после открытия единицей Y ответного огня

$$\begin{cases} F'_{10}(t) = k_x\left(1 + a_x t\right)F_{11}(t), \\ F'_{01}(t) = k_y\left(1 + a_y t\right)F_{11}(t), \\ F'_{11}(t) = -\left[\left(k_x + k_y\right) + \left(k_x a_x + k_y a_y\right)t\right]F_{11}(t) \end{cases} \tag{18}$$

с начальными условиями

$$\begin{cases} F_{10}\left(t_c\right) = 1 - e^{-k_x\left(t_c + \frac{a_x t_c^2}{2}\right)}, \\ F_{01}\left(t_c\right) = 0; \\ F_{11}\left(t_c\right) = e^{-k_x\left(t_c + \frac{a_x t_c^2}{2}\right)}. \end{cases} \tag{19}$$

Наиболее простое решение система уравнений (18)–(19) имеет при $a_x = a_y = a$ и принимает тогда следующий вид:

$$\begin{cases} F_{10}(t) = 1 - \dfrac{k_y}{k_x + k_y} e^{-k_x\left(t_c + \frac{a t_c^2}{2}\right)} - \dfrac{k_x}{k_x + k_y} e^{k_y\left(t_c + \frac{a t_c^2}{2}\right) - \left(k_x + k_y\right)\left(t + \frac{a t^2}{2}\right)}, \\ F_{01}(t) = \dfrac{k_y}{k_x + k_y}\left(e^{-k_x\left(t_c + \frac{a t_c^2}{2}\right)} - e^{k_y\left(t_c + \frac{a t_c^2}{2}\right) - \left(k_x + k_y\right)\left(t + \frac{a t^2}{2}\right)}\right), \\ F_{11}(t) = e^{k_y\left(t_c + \frac{a t_c^2}{2}\right) - \left(k_x + k_y\right)\left(t + \frac{a t^2}{2}\right)}, \end{cases} \tag{20}$$

а также

$$\begin{cases} F_{10}(\infty) = 1 - \dfrac{k_y}{k_x + k_y} e^{-k_x\left(t_c + \frac{at_c^2}{2}\right)}, \\ F_{01}(\infty) = \dfrac{k_y}{k_x + k_y} e^{-k_x\left(t_c + \frac{at_c^2}{2}\right)}, \\ F_{11}(\infty) = 0. \end{cases} \tag{21}$$

При $a_x \neq 0, a_y \neq 0, a_x \neq a_y$ получим

$$\begin{cases} F_{10}(t) = 1 - e^{-k_x\left(t_c + \frac{a_x t_c^2}{2}\right)} + k_x e^{k_y\left(t_c + \frac{a_y t_c^2}{2}\right)} \displaystyle\int_{t_c}^{t} (1 + a_x\tau) e^{-\left[(k_x + k_y)\tau + \frac{(k_x a_x + k_y a_y)\tau^2}{2}\right]} d\tau, \\ F_{01}(t) = k_y e^{k_y\left(t_c + \frac{a_y t_c^2}{2}\right)} \displaystyle\int_{t_c}^{t} (1 + a_y\tau) e^{-\left[(k_x + k_y)\tau + \frac{(k_x a_x + k_y a_y)\tau^2}{2}\right]} d\tau, \\ F_{11}(t) = e^{k_y\left(t_c + \frac{a_y t_c^2}{2}\right)} e^{-\left[(k_x + k_y)t + \frac{(k_x a_x + k_y a_y)t^2}{2}\right]}. \end{cases} \tag{22}$$

Аналогично получают формулы для вычисления вероятностей состояний при упреждающем ударе стороны Y. При одновременном открытии огня единицами X и Y в формулах (18)–(22) следует положить $t_c = 0$, а при постоянной в течение боя эффективной скорострельности единицы X (единицы Y) в формулах (17)–(19) и (22) следует положить $a_x = 0$ $(a_y = 0)$.

Анализ результатов расчетов. Начнем анализ результатов с формул [16–17]:

$$\mu = \frac{\sqrt{k_x k_y}}{a_x + a_y}, \quad \eta = \frac{a_y}{a_x + a_y}, \quad æ = \sqrt{\frac{k_y}{k_x}}.$$

Параметр μ характеризует степень роста интенсивности протекания боя (чем меньше μ, тем быстрее растет интенсивность его протекания). Как правило, в реальных боевых ситуациях $\mu \geq 1$. Параметр η характеризует превосходство скорости роста эффективной скорострельности боевой единицы Y над скоростью роста эффективной скорострельности единицы X ($\eta = 0$ при $a_y = 0$ и $\eta = 1$ при $a_x = 0$). Параметр $æ = \sqrt{\dfrac{k_y}{k_x}}$, характеризующий степень превосходства единицы Y над единицей X в начале боя, назовем параметром начального соотношения сил. Его граничным значением $æ_0$ назовем значение, соответствующее равенству сил, т. е. $p_{0x} = p_{0y} = 0{,}5$, где p_{0x}, p_{0y} — вероятности победы единиц X и Y соответственно.

Отметим, что при постоянных эффективных скорострельностях боевых единиц $æ_0 = 1$.

Исследуем влияние параметров μ, η и $æ$ на исход боя. Получены приближенные формулы для вычисления значения $æ_0$ при одновременном открытии огня обеими единицами:

$$æ_0 = e^{\frac{-0{,}39(\eta - 0{,}5)}{\mu^{0{,}75}}}$$

при экспоненциальных зависимостях эффективных скорострельностей боевых единиц от времени боя (7) и

$$æ_0 = e^{\frac{-0{,}32(\eta - 0{,}5)}{\mu^{0{,}64}}}$$

при линейных зависимостях эффективных скорострельностей боевых единиц от времени боя (16).

Как показали расчеты, изменение значения $æ_0$ несущественно при $\begin{cases} \mu \geq 1, \\ 0{,}4 \leq \eta \leq 0{,}6, \end{cases}$ а также при $\begin{cases} \mu \geq 4, \\ 0{,}1 \leq \eta \leq 0{,}9. \end{cases}$

Исследуем влияние на исход боя упреждающего удара одной из боевых единиц. Значения вероятности победы единицы X при различных значениях $æ$ и приведенного времени $\overline{t_c}$, в течение которого единица X ведет огонь по противнику, не испытывая ответного противодействия, при $\mu = 1$ и $\mu = 2$, а также для $\eta = 0$ и $\eta = 1$ (т. е. тех значений μ и η, для которых влияние изменения эффективных скорострельностей боевых единиц на исход боя наиболее существенно) приведены в табл. 1–4.

Таблица 1

Вероятности победы единицы X ($\mu = 1$, $\eta = 0$)

æ	$\bar{t}_c$					
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
0,25	0,951 0,950	0,969 0,968	0,981 0,980	0,988 0,987	0,992 0,992	0,995 0,995
0,5	0,843 0,837	0,879 0,873	0,907 0,901	0,928 0,922	0,944 0,939	0,957 0,952
0,75	0,717 0,705	0,766 0,753	0,805 0,792	0,838 0,824	0,864 0,851	0,886 0,873
1,0	0,596 0,579	0,651 0,632	0,698 0,677	0,738 0,716	0,772 0,750	0,801 0,779
1,5	0,400 0,380	0,457 0,434	0,508 0,482	0,553 0,524	0,594 0,563	0,630 0,598
2,0	0,269 0,253	0,321 0,301	0,368 0,345	0,412 0,386	0,452 0,423	0,490 0,458
3,0	0,133 0,125	0,171 0,161	0,208 0,196	0,243 0,228	0,276 0,258	0,308 0,287
4,0	0,075 0,071	0,104 0,099	0,132 0,125	0,160 0,151	0,186 0,175	0,212 0,199

Таблица 2

Вероятности победы единицы X ($\mu = 1$, $\eta = 1$)

æ	$\bar{t}_c$					
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
0,25	0,925 0,929	0,945 0,949	0,960 0,963	0,971 0,974	0,978 0,981	0,984 0,987
0,5	0,731 0,747	0,765 0,782	0,795 0,814	0,822 0,841	0,846 0,865	0,866 0,885
0,75	0,542 0,563	0,581 0,603	0,618 0,641	0,651 0,676	0,683 0,709	0,712 0,739
1,0	0,404 0,421	0,443 0,463	0,481 0,503	0,516 0,540	0,550 0,575	0,582 0,608
1,5	0,241 0,251	0,276 0,288	0,311 0,325	0,344 0,360	0,377 0,394	0,408 0,427
2,0	0,157 0,163	0,188 0,195	0,219 0,227	0,249 0,259	0,278 0,290	0,307 0,320
3,0	0,081 0,083	0,106 0,108	0,130 0,133	0,154 0,158	0,177 0,182	0,200 0,206
4,0	0,049 0,050	0,069 0,070	0,089 0,091	0,108 0,111	0,127 0,130	0,146 0,150

Таблица 3

Вероятности победы единицы X ($\mu = 2$, $\eta = 0$)

æ	$\overline{t_c}$					
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
0,25	0,947 0,946	0,966 0,965	0,978 0,977	0,986 0,985	0,991 0,991	0,994 0,994
0,5	0,825 0,823	0,862 0,859	0,891 0,888	0,914 0,911	0,931 0,928	0,946 0,943
0,75	0,685 0,680	0,733 0,727	0,773 0,766	0,806 0,800	0,835 0,829	0,859 0,853
1,0	0,555 0,547	0,607 0,599	0,652 0,644	0,693 0,684	0,728 0,718	0,759 0,749
1,5	0,356 0,349	0,407 0,399	0,454 0,445	0,497 0,487	0,537 0,526	0,573 0,561
2,0	0,234 0,229	0,279 0,273	0,322 0,315	0,362 0,354	0,399 0,390	0,434 0,424
3,0	0,115 0,113	0,149 0,146	0,181 0,178	0,212 0,208	0,242 0,237	0,271 0,265
4,0	0,066 0,065	0,092 0,091	0,117 0,116	0,142 0,140	0,166 0,163	0,189 0,186

Таблица 4

Вероятности победы единицы X ($\mu = 2$, $\eta = 1$)

æ	$\overline{t_c}$					
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
0,25	0,934 0,935	0,954 0,955	0,967 0,968	0,977 0,978	0,984 0,985	0,989 0,989
0,5	0,766 0,771	0,801 0,807	0,832 0,838	0,857 0,863	0,879 0,885	0,897 0,903
0,75	0,587 0,595	0,629 0,638	0,667 0,676	0,701 0,711	0,732 0,742	0,759 0,770
1,0	0,445 0,453	0,488 0,496	0,528 0,537	0,565 0,575	0,599 0,610	0,631 0,642
1,5	0,268 0,273	0,307 0,312	0,345 0,351	0,380 0,387	0,414 0,422	0,446 0,455
2,0	0,175 0,177	0,209 0,212	0,242 0,246	0,274 0,278	0,304 0,309	0,334 0,340
3,0	0,089 0,090	0,115 0,117	0,141 0,143	0,166 0,168	0,191 0,193	0,215 0,218
4,0	0,053 0,054	0,075 0,076	0,096 0,097	0,116 0,117	0,136 0,137	0,155 0,157

Рассмотрим вероятности побед единиц при $\mu = 1$ (табл. 1–2), при $\mu = 2$ (табл. 3–4). Данные табл. 1 и 3 соответствуют значению $\eta = 0$, а в табл. 2 и 4 — значению $\eta = 1$. Приведенное время $\overline{t_c}$ определим следующим образом:

$$\overline{t_c} = \frac{\sqrt{k_x k_y}}{a_x}\left(e^{a_x t_c} - 1\right)$$

при экспоненциальных зависимостях эффективных скорострельностей от времени боя (7) и

$$\overline{t_c} = \sqrt{k_x k_y}\left(t_c + \frac{a_x t_c^2}{2}\right)$$

при линейных зависимостях эффективных скорострельностей боевых единиц от времени боя (16).

Для сравнения в табл. 5 приведены значения p_{0x} при $v = \text{const}$, $u = \text{const}$ (в этом случае $\overline{t_c} = \sqrt{uvt}$).

Таблица 5

Вероятности победы единицы X при постоянных эффективных скорострельностях

æ	$\overline{t_c}$					
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
0,25	0,941	0,961	0,974	0,982	0,988	0,992
0,5	0,800	0,836	0,866	0,890	0,910	0,926
1,0	0,500	0,548	0,591	0,630	0,665	0,697
1,5	0,308	0,352	0,394	0,433	0,470	0,504
2,0	0,200	0,239	0,276	0,311	0,345	0,377
3,0	0,100	0,130	0,158	0,186	0,212	0,238
4,0	0,059	0,082	0,105	0,127	0,148	0,169

В табл. 1–5 рассматриваются значения $\overline{t_c}$, соответствующие проведению единицей X одного-двух выстрелов, при которых она не испытывает противодействия противника (при $\overline{t_c} = 0$ единицы X и Y начинают боевые действия одновременно), так как в реальных боевых условиях после проведения боевой единицей одного-двух выстрелов она, как правило, будет обнаружена и по ней будет открыт ответный огонь.

Проведенные расчеты показали, что упреждающий удар одной из боевых единиц оказывает существенное влияние на исход боя достаточно близких по силам единиц. Так, при упреждающем ударе единицы X вероятность ее победы может увеличиться более чем на 0,2. При значительном превосходстве одной из единиц, т. е. при упреждающем ударе единицы X влияние этого удара незначительно, если $\begin{cases} æ \le 0,4, \\ \eta = 0, \end{cases}$ $\begin{cases} æ \le 0,38, \\ \eta = 1, \end{cases}$ $\begin{cases} æ \ge 5, \\ \eta = 0, \end{cases}$ а также $\begin{cases} æ \ge 4, \\ \eta = 1. \end{cases}$

Отметим также некоторое снижение влияния упреждающего удара на исход боя с ростом μ, а также его большее влияние на исход боя при экспоненциальных зависимостях эффективных скорострельностей боевых единиц от времени боя по сравнению с линейными зависимостями при $\mu \le 1,5$. При $\mu \ge 2$ эта разница несущественна.

Сделанные расчеты также показали, что использование модели дуэльного боя с постоянными эффективными скорострельностями может привести к существенным ошибкам при вычислении его основных показателей как при одновременном открытии огня обеими боевыми единицами, так и при упреждающем ударе одной из них.

Выводы. Проведенные исследования позволяют сделать следующие выводы.

1. На основе теории непрерывных марковских процессов разработаны модели дуэльного боя при различных зависимостях эффективных скорострельностей боевых единиц от времени боя. Получены расчетные формулы для вычисления основных показателей боя. Показано, что принятие эффективных скорострельностей в течение боя постоянными может в ряде случаев привести к существенным ошибкам при оценке его результатов.

2. Установлено существенное влияние упреждающего удара на исход боя близких по силам боевых единиц и его незначительное влияние на исход боя, если одна из них имеет существеннее превосходство.

3. Установлено, что упреждающий удар одной из боевых единиц в совокупности с более высокой степенью роста ее эффективной скорострельности может в отдельных случаях компенсировать более чем двукратное начальное превосходство противника.

4. Показана возможность использования аппроксимаций эффективных скорострельностей боевых единиц различными функциями времени боя, что в большинстве случаев (при $\mu \ge 2$) приводит к незначительным ошибкам в вычислении его основных показателей.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Особенности математического моделирования технических устройств. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 1, с. 5–17.

[2] Ильин В.А. Моделирование боевых действий сил флота. *Программные продукты и системы*, 2006, № 1, с. 23–27.

[3] Jaiswal N.K. *Military Operations Research: Quantitative Decision Making*. Boston, Kluwer Academic Publishers, 1997, p. 388.
[4] Bretnor R. *Decisive Warfare*: *A Study in Military Theory*. New York, Stackpole Books, 1969, p. 192.
[5] Глушков И.Н. Выбор математической схемы при построении модели боевых действий. *Программные продукты и системы*, 2010, № 1, с. 1–9.
[6] Taylor J.G. Force-on-force attrition modeling. *Military Application Section of Operations Research Society of America*, 1980, p. 320.
[7] Shanahan L., Sen S. *Dynamics of Model Battles: Markovian and strategic cases*. New York, Physics Department, State University of New York, 2003, pp. 1–43.
[8] Вентцель Е.С. *Исследование операций.* Москва, УРСС, 2006, 432 с.
[9] Ткаченко П.Н. *Математические модели боевых действий*. Москва, Советское радио, 1969, 240 с.
[10] Вентцель Е.С. *Теория вероятностей*. Москва, Высшая школа, 1999, 576 с.
[11] Чуев Ю.В. *Исследование операций в военном деле*. Москва, Воениздат, 1970, 270 с.
[12] Пашков Н.Ю., Строгалёв В.П., Чуев В.Ю. Смешанная модель динамики средних для многочисленных группировок. *Оборонная техника*, 2000, № 9–10, с. 19–21.
[13] Чуев В.Ю. Вероятностная модель боя многочисленных группировок. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки.* 2011, Спец. выпуск «Математическое моделирование», с. 223–232.
[14] Чуев В.Ю., Дубограй И.В. Вероятностная модель боевых действий при упреждающем ударе одной из сторон. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2015, № 2, с. 53–62.
[15] Чуев В.Ю., Дубограй И.В. Вероятностная модель дуэльного боя с переменными эффективными скорострельностями. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение.* 2016, № 2, с. 18–24.
[16] Чуев В.Ю., Дубограй И.В. *Модели средних двухсторонних боевых действий: модели динамики средних двухсторонних боевых действий многочисленных группировок.* LAP Lambert Academicc Publishing, 2014, 80 с.
[17] Чуев В.Ю., Дубограй И.В. Модели двухсторонних боевых действий многочисленных группировок. *Математическое моделирование и численные методы*, 2016, № 1 (9), с. 89–104.

Статья поступила в редакцию 18.05.2016

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Чуев В.Ю., Дубограй И.В. Стохастические модели дуэльного боя двух единиц. *Математическое моделирование и численные методы*, 2016, № 2(10), с. 69–84.

Чуев Василий Юрьевич окончил механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова. Канд. техн. наук, доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 20 научных работ в области прикладной математики. e-mail: vacilious@mail.ru

Дубограй Ирина Валерьевна окончила механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова. Доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор ряда научных работ в области прикладной математики. e-mail: irina.dubograi@yandex.ru

Stochastic models of the two unit duel fight

© V.Yu. Chuev, I.V. Dubogray

Bauman Moscow State Technical University, 105005, Russia

On the basis of the theory of continuous Markov processes we developed models of the two unit duel fight. We obtained computing formulas for calculating the basic fight indicators. Moreover, we found that the pre-emptive strike of one of the units participating in the fight has a significant impact on the fight outcome of the units which are similar in forces. The strike has a negligible impact, if one of the units has a significant advantage. The findings of the research show that the use of model with constant effective firing rates can lead to significant errors in the evaluation of its results. Finally, we found that the pre-emptive strike, coupled with a high degree of effective firing rate growth, can sometimes compensate for more than the double initial superiority of the opponent. We show the possibility of using approximations of the effective firing rate of the fighting units by the different functions of the fight time.

Keywords: *fighting unit, the effective firing rate, duel fight, a fight between two units, correlation of forces parameter, continuous Markov process.*

REFERENCES

[1] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody — Mathematical Modeling and Computational Methods,* 2014, no. 1, pp. 5–17.

[2] Ilyin V.A. *Programmnye produkty i sistemy — Programme Products and Systems*, 2006, no. 1, pp. 23–27.

[3] Jaiswal N.K. *Military Operations Research: Quantitative Decision Making*. Boston, Kluwer Academic Publishers, 1997, p. 388.

[4] Bretnor R. *Decisive Warfare*: *A Study in Military Theory*. New York, Stackpole Books, 1969, p. 192.

[5] Glushkov I.N. *Programmnye produkty i sistemy — Programme Products and Systems*, 2010, no.1, pp. 1–9.

[6] Taylor J.G. Force-on-force attrition modeling. *Military Application Section of Operations Research Society of America*, 1980, p. 320.

[7] Shanahan L., Sen S. *Dynamics of Model Battles: Markovian and strategic cases*. New York, Physics Department, State University of New York, 2003, pp. 1–43.

[8] Venttsel E.S. *Issledovanie operatsii* [Operations research]. Moscow, URSS Publ., 2006, 432 p.

[9] Tkachenko P.N. *Matematicheskie modeli boevykh deystviy* [Mathematical models of hostilities]. Moscow, Sovetskoe radio Publ., 1969, 240 p.

[10] Venttsel E.S. *Teoriya veroyatnostey* [Probability theory]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1999, 576 p.

[11] Chuev Yu.V. *Issledovanie operatsiy v voennom dele* [Operations research in military art]. Moscow, Voenizdat, 1970, 270 p.

[12] Pashkov N.Yu., Strogalev V.P., Chuev V.Yu. *Oboronnaya tekhnika — Defense equipment*, 2000, no. 9–10, pp. 19–21.

[13] Chuev V.Yu. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki. Spets. vypusk “Matematicheskoe modelirovanie” — Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences. Special iss. “Mathematical Modeling”,* 2011, pp. 223–232.

[14] Chuev V.Yu., Dubogray I.V. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki — Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences,* 2015, no. 2, pp. 53–62.
[15] Chuev V.Yu., Dubogray I.V. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Mashinostroenie — Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Mechanical Engineering,* 2016, no. 2, pp. 18–24.
[16] Chuev V.Yu., Dubogray I.V. *Modeli srednikh dvukhstoronnikh boevykh deystviy: modeli dinamiki srednikh dvukhstoronnikh boevykh deystviy mnogochislennykh gruppirovok* [Middle bilateral hostilities models: dynamics models of middle bilateral hostilities of the numerous groups]. LAP Lambert Academic Publ., 2014, 80 p.
[17] Chuev V.Yu., Dubogray I.V. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2016, no. 1 (9), pp. 89–104.

Chuev V.Yu. graduated from Lomonosov Moscow State University, the Faculty of Mechanics and Mathematics. Cand. Sci. (Eng.), Assoc. Professor of the Computational Mathematics and Mathematical Physics Department at the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 20 scientific papers in the field of applied mathematics. e-mail: vacilious@mail.ru

Dubogray I.V. graduated from Lomonosov Moscow State University, the Faculty of Mechanics and Mathematics. Assoc. Professor of the Computational Mathematics and Mathematical Physics Department at the Bauman Moscow State Technical University. Author of a number of scientific papers in the field of applied mathematics.
e-mail: irina.dubograi@yandex.ru