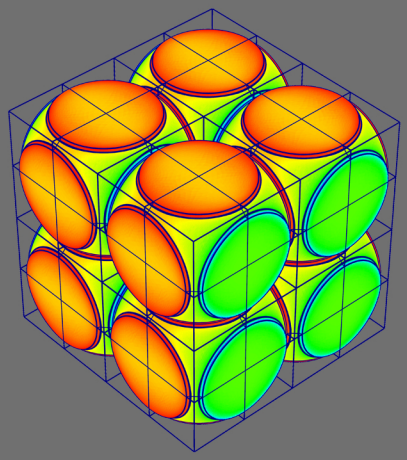
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Плюснин А. В. Восстановление параметров движения летательного аппарата по данным их дискретной регистрации. Ч. 2. Способы, использующие регуляризацию. Математическое моделирование и численные методы, 2016, №2 (10), с. 39-54

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/95/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.216.206
10.11.2026 15:25:44

УДК 629.762

Восстановление параметров движения летательного аппарата по данным их дискретной регистрации. Ч. 2. Способы, использующие регуляризацию

© А.В. Плюснин

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Рассмотрены способы восстановления параметров движения летательного аппарата в контейнере по данным их регистрации с большой дискретностью в процессе экспериментальной отработки газодинамического выброса.

Ключевые слова: *газодинамический выброс, летательный аппарат, восстановление параметров движения, кусочно-полиномиальная интерполяция.*

Довольно сложная задача — моделирование движения летательного аппарата (ЛА) в контейнере. При ее решении необходимо учитывать сопряженные процессы движения газовой среды, обтекающей ЛА, движения самого ЛА, теплообмена в контейнере и термомеханические процессы деформирования корпуса контейнера и ЛА. Сопряженные задачи взаимодействия корпуса летательного аппарата с окружающей газовой и жидкой средой рассмотрены в работах [1–5]. Опираясь на экспериментальные данные работ [6, 7], в работе [8] была сформулирована задача об определении параметров газодинамического выброса летательного аппарата из контейнера по значениям $\left(t_j^{(L)}, L_j = L\left(t_j^{(L)}\right)\right)$, $\left(t_j^{(V)}, V_j = V\left(t_j^{(V)}\right)\right)$, $\left(t_j^{(A)}, A_j = A\left(t_j^{(A)}\right)\right)$ пути L, скорости V, ускорения A ЛА в контейнере, зарегистрированным с шагом по времени δt (слишком большим для применения обычной интерполяции). Учитывая, что зарегистрированные параметры дополняют друг друга, в работах [8, 9] эта задача решена для случая совпадающих (кратных) узлов регистрации $t_j = t_j^{(L)} = t_j^{(V)} = t_j^{(A)}$. Вычисления в этом случае локализованы на отдельных промежутках между точками регистрации и позволяют получить удовлетворительные для практики результаты.

В этой работе рассмотрен случай общего расположения узлов регистрации $t_{j-1}^{(A)} < t_j^{(L)} \le t_j^{(A)}$, $t_{j-1}^{(A)} < t_j^{(V)} \le t_j^{(A)}$ на полном отрезке $\left[t_0^{(A)}; t_N^{(A)}\right]$ на основе дискретных выборок из тех же исходных кинематических данных, что и в работе [9]. Ниже на рисунках соответствующие кривые обозначены как полные данные.

В работе [9] выполнено формальное обобщение подхода [8], сводящееся к последовательной процедуре вычислений (от промежутка

к промежутку), что названо маршевым (пошаговым) методом. Утрата локальности вычислений, однако, делает этот метод совершенно непригодным из-за чрезвычайно быстрого накопления ошибок аппроксимации. В целях большего контроля над выполнением условий в точках регистрации параметров на промежутках кусочно-полиномиальной аппроксимации графика пути

$$L^{(\Pi)}(t)\Big|_{\left[t_j^{(A)};t_{j+1}^{(A)}\right]}=\sum_{k=0}^{5}a_{jk}\,t^k \tag{1}$$

коэффициенты полинома (1) удобно выразить через значения зарегистрированных параметров $L_{j+1},\ V_{j+1},\ A_j,\ A_{j+1}$ и через неизвестные значения параметров в узлах регистрации $L_j^{(A)},\ V_j^{(A)},\ L_{j+1}^{(A)},\ V_{j+1}^{(A)},\ L_{j+1}^{(V)}$. В зависимости от включения в рассмотрение внутренних узлов регистрации $t_j^{(L)},\ t_j^{(V)}$ промежутка $\left[t_j^{(A)};\ t_{j+1}^{(A)}\right]$ получаем полином полной порядка $2\,(n=5)$, полной разнопорядковой $(n=8)$ или неполной разнопорядковой $(n=7)$ эрмитовой интерполяции [9]. При использовании локальной координаты $\lambda=\left(t-t_j^{(A)}\right)\delta t^{-1}$ имеем следующие выражения для полинома (1) и его производных:

$$\begin{aligned} f^{(\Pi;j;\nu)}(t)&\equiv\frac{d^{\nu}}{dt^{\nu}}L^{(\Pi)}(t)\Big|_{\left[t_j^{(A)};t_{j+1}^{(A)}\right]}=\\ &=\delta t^{-\nu}\sum_{k=\nu}^{n}\frac{k!}{(k-\nu)!}a_k^{(j)}\lambda^{k-\nu}=\sum_{k=0}^{n_\nu}f_k^{(j;\nu)}\lambda^k, \end{aligned} \tag{2}$$

где $f_k^{(j;\nu)}=\delta t^{-\nu}\dfrac{(k+\nu)!}{k!}a_{k+\nu}^{(j)},\quad k=0,1,..n_\nu,\quad n_\nu=n-\nu.$ Кроме того, имеем

$$\lambda_L\equiv\lambda_0=\left(t_1^{(L)}-t_0^{(A)}\right)\delta t^{-1},\quad \lambda_V\equiv\lambda_1=\left(t_1^{(V)}-t_0^{(A)}\right)\delta t^{-1},\ \lambda_A\equiv\lambda_2=1,$$

при этом $0<\lambda_L\le 1,\ 0<\lambda_V\le 1.$

Таким образом, в зависимости от рассмотрения $(n=5,7,8)$ могут быть выполнены либо условия регистрации во всех точках $(n=7,8)$, либо только в точках $t_j^{(A)},\ t_{j+1}^{(A)}$. Формальную запись всех соотношений (тождеств и нетривиальных условий) представим в виде системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$Mx = b, \tag{3}$$

составленной из $3N$ уравнений относительно $9N$ узловых значений:

$$\sum_{l=0}^{n} H_{\nu l}\, q_j^{(l)} = b_{3j+\nu}, \quad \left(0 \le j \le N-1;\ \nu = 0, 1, 2\right),$$

где $H_{\nu l} = \sum_{\kappa=0}^{n_\nu} \frac{(\kappa+\nu)!}{\kappa!} \lambda_\nu^\kappa B_{\kappa+\nu, l}$, $b_{3j+\nu} = \begin{cases} L_{j+1}, & \nu = 0, \\ V_{j+1}\delta t, & \nu = 1, \\ A_{j+1}\delta t^2, & \nu = 2, \end{cases}$ $a_k^{(j)} = \sum_{l=0}^{n} B_{kl}\, q_j^{(l)}$.

Величины $q_j^{(l)}$ являются узловыми значениями эрмитовой интерполяции в точках регистрации отрезка $\left[t_j^{(A)};\ t_{j+1}^{(A)}\right]$, занумерованными согласно таблице из работы [9].

При непосредственном решении СЛАУ (3) случаи $n = 7, 8$ содержат $2N$ и $3N$ искомых величин, соответственно, и ни одного условия для их определения, случай $n = 5$ сводится к невырожденной СЛАУ, но ее решение совпадает с результатом применения маршевого метода. В этой части работы вместо методов непосредственного решения СЛАУ (3) рассмотрены подходы, основанные на вариационной постановке задачи и методах регуляризации.

Дискретная реконструкция на основе вариационных подходов. Применим вариационный метод наименьших квадратов [10–11] и заменим решение СЛАУ (3) задачей минимизации функционала

$$\Phi(x) = \|Mx - b\|^2.$$

Решения этой последней задачи существуют всегда, их называют псевдорешениями исходной СЛАУ [12]. Среди псевдорешений обычно выделяют те, которые имеют минимальную норму (их называют нормальными псевдорешениями [12]).

Несмотря на эквивалентность норм в конечномерных пространствах [8], выбор нормы (по большому счету, произвольный) может влиять на получаемые результаты, поскольку в практических задачах погрешность не может быть бесконечно малой. В этой связи есть смысл отдать предпочтение норме, удобной в работе и достаточно тесно связанной с задачей. Будем использовать варианты евклидовой нормы (2-норму для конечномерных векторов [11] и L_2-норму в конечномерных пространствах [13]). Такой выбор нормы обеспечивает связь со скалярным произведением, возможность дифференцирования $\Phi(x)$ гарантирует единственность нормального псевдорешения уравнения (3) [12].

В случае $n=5$ СЛАУ (3) имеет невырожденную матрицу порядка $2N$. Но тогда ее нормальное псевдорешение и единственное истинное решение совпадают при любом выборе нормы, и в итоге имеем все тот же неудовлетворительный результат, полученный пошаговым методом.

В случае $n=7$ $(n=8)$ решением СЛАУ (3) является любой элемент арифметического пространства $\mathbb{R}^{2N(3N)}$, и здесь можно ставить вопрос о выборе решения с минимальной нормой. Лавинообразное накопление погрешностей аппроксимации искомых кинематических параметров в пошаговом методе можно считать результатом неконтролируемого поведения производной ускорения $\dot{A}^{(\Pi)}(t)$, разрывной в граничных узлах $t_j^{(A)}$. С учетом этого за условие отбора решения примем условие минимума L_2-нормы функции $\dot{A}^{(\Pi)}(t)$ на $\left[t_0^{(A)};\, t_N^{(A)}\right]$.

Вычислим квадрат L_2-нормы функций $f^{(\Pi;\nu)}(t)$,

где

$$f^{(\Pi;\nu)}(t)\Big|_{\left[t_j^{(A)};t_{j+1}^{(A)}\right]}=f^{(\Pi;j;\nu)}(t),\quad (j=0,\,..N-1).$$

Согласно формулам (2), имеем

$$\left\|f^{(\Pi;\nu)}\right\|^2_{L_2\left(\left[t_0^{(A)};t_N^{(A)}\right]\right)}=\int\limits_{t_0^{(A)}}^{t_N^{(A)}}\left[f^{(\Pi;\nu)}(t)\right]^2dt=\sum_{j=0}^{N-1}\left\|f^{(\Pi;j;\nu)}\right\|^2_{L_2\left(\left[t_j^{(A)};t_{j+1}^{(A)}\right]\right)},\quad (4)$$

$$\left\|f^{(\Pi;j;\nu)}\right\|^2_{L_2\left(\left[t_j^{(A)};t_{j+1}^{(A)}\right]\right)}=\int\limits_{t_j^{(A)}}^{t_{j+1}^{(A)}}\left[f^{(\Pi;j;\nu)}(t)\right]^2dt=$$

$$=\delta t\int\limits_0^1\sum_{k,l=0}^{n_\nu}f_k^{(j;\nu)}f_l^{(j;\nu)}\lambda^{k+l}\,d\lambda=\delta t\sum_{k,l=0}^{n_\nu}\frac{f_k^{(j;\nu)}f_l^{(j;\nu)}}{k+l+1}.\quad (5)$$

Как видно из формул (2), (4)–(5), величина $\left\|f^{(\Pi;\nu)}\right\|^2_{L_2\left(\left[t_0^{(A)};t_N^{(A)}\right]\right)}$ есть неотрицательная однородная квадратичная форма относительно значений $q_j^{(l)}$. Тогда необходимым и достаточным условием ее минимума являются соотношения

$$\frac{\partial}{\partial q_j^{(l)}}\left\| f^{(\Pi;\nu)}\right\|^2_{L_2\left(\left[t_0^{(A)};t_N^{(A)}\right]\right)}=\sum_{m=0}^{N-1}\frac{\partial}{\partial q_j^{(l)}}\left\| f^{(\Pi;m;\nu)}\right\|^2_{L_2\left(\left[t_m^{(A)};t_{m+1}^{(A)}\right]\right)}=0.$$

Здесь $j=0,..N-1,\ l=0,..n,$ но если индекс l соответствует параметру, который считается заданным, соответствующие условия исключаются.

Легко видеть из (2), что

$$\frac{\partial}{\partial q_j^{(l)}}f_k^{(j;\nu)}=\delta t^{-\nu}\,\frac{(k+\nu)!}{k!}\,B_{k+\nu,l}\,q_j^{(l)},\ \left(j=0,..N-1;\ l=0,..n;\ k=0,..n_\nu\right),$$

а из (5) после несложных выкладок находим

$$\frac{\partial}{\partial q_j^{(\alpha)}}\left\| f^{(\Pi;j;\nu)}\right\|^2_{L_2\left(\left[t_j^{(A)};t_{j+1}^{(A)}\right]\right)}=\sum_{\beta=0}^{n}G_{\alpha\beta}^{(\nu)}\,q_j^{(\beta)},$$

$$G_{\alpha\beta}^{(\nu)}=2\,\delta t^{1-2\nu}\sum_{k,l=0}^{n_\nu}\frac{(k+\nu)!(l+\nu)!}{k!l!(k+l+1)}B_{k+\nu,\alpha}B_{l+\nu,\beta},$$

где $\alpha,\ \beta=0,..n.$

Чтобы составить СЛАУ относительно параметров $q_j^{(l)}$, обеспечивающих минимум величине $\left\| f^{(\Pi;\nu)}\right\|^2_{L_2\left(\left[t_0^{(A)};t_N^{(A)}\right]\right)}$, учтем, что $L_j^{(A)}=$ $=q_j^{(0)}=q_{j-1}^{(3)},\ V_j^{(A)}=q_j^{(1)}=q_{j-1}^{(4)},\ A_j^{(A)}=q_j^{(2)}=q_{j-1}^{(5)},\ L_j^{(L)}=q_{j-1}^{(6)},\ V_j^{(V)}=q_{j-1}^{(7)},$ $L_j^{(V)}=q_{j-1}^{(8)}$ [9]. Полагая для сокращения записи, что $y_j^{(0)}=L_j^{(A)},\ y_j^{(1)}=$ $=V_j^{(A)},\quad y_j^{(2)}=A_j^{(A)},\quad y_j^{(3)}=L_j^{(L)},\quad y_j^{(4)}=V_j^{(V)},\quad y_j^{(5)}=L_j^{(V)},\quad \chi_{jN\kappa}=$ $=\left(1-\delta_{jN}\right)\left(1-Entier\left(\kappa/3\right)\right),$ получим (параметры в узле $t_j^{(A)}$ входят в выражения, соответствующие двум соседним отрезкам)

$$\frac{\partial}{\partial y_j^{(\kappa)}}\left\| f^{(\Pi;\nu)}\right\|^2_{L_2\left(\left[t_0^{(A)};t_N^{(A)}\right]\right)}=\left(\frac{\partial}{\partial q_j^{(3+\kappa)}}+\chi_{jN\kappa}\frac{\partial}{\partial q_j^{(\kappa)}}\right)\left\| f^{(\Pi;\nu)}\right\|^2_{L_2\left(\left[t_0^{(A)};t_N^{(A)}\right]\right)}=$$

$$=\sum_{\beta=0}^{n}\left[\,G_{3+\kappa,\beta}^{(\nu)}\,q_{j-1}^{(\beta)}+\chi_{jN\kappa}G_{\kappa\beta}^{(\nu)}\,q_j^{(\beta)}\,\right],\ \left(j=1,..N;\ \kappa=0,\ 1,..5\right).$$

Искомая СЛАУ выглядит как совокупность уравнений

$$\sum_{\beta=0}^{n}\left[G^{(\nu)}_{3+\kappa,\beta}\, q^{(\beta)}_{j-1} + \chi_{jN\kappa} G^{(\nu)}_{\kappa\beta}\, q^{(\beta)}_{j} \right] = 0, \quad \left(j = 1,..N;\ \kappa = 0,\, 1,..5\right), \qquad (6)$$

где коэффициенты при искомых величинах образуют матрицу системы, а известные величины — вектор правых частей.

Вернемся к задаче минимизации нормы $\dot{A}^{(\Pi)}(t)$. Положим $\nu = 3$, $L^{(L)}_j = L_j$, $V^{(V)}_j = V_j$, $A^{(A)}_j = A_j$ и исключим в (6) лишние уравнения, соответствующие значениям $\kappa = 2, 3, 4$ (при $n = 7$ исключают также уравнения для $\kappa = 5$). Необходимо решить полученную СЛАУ, затем по формуле (2) вычислить реконструированные зависимости кинематических параметров. Результаты расчетов представлены на рис. 1.

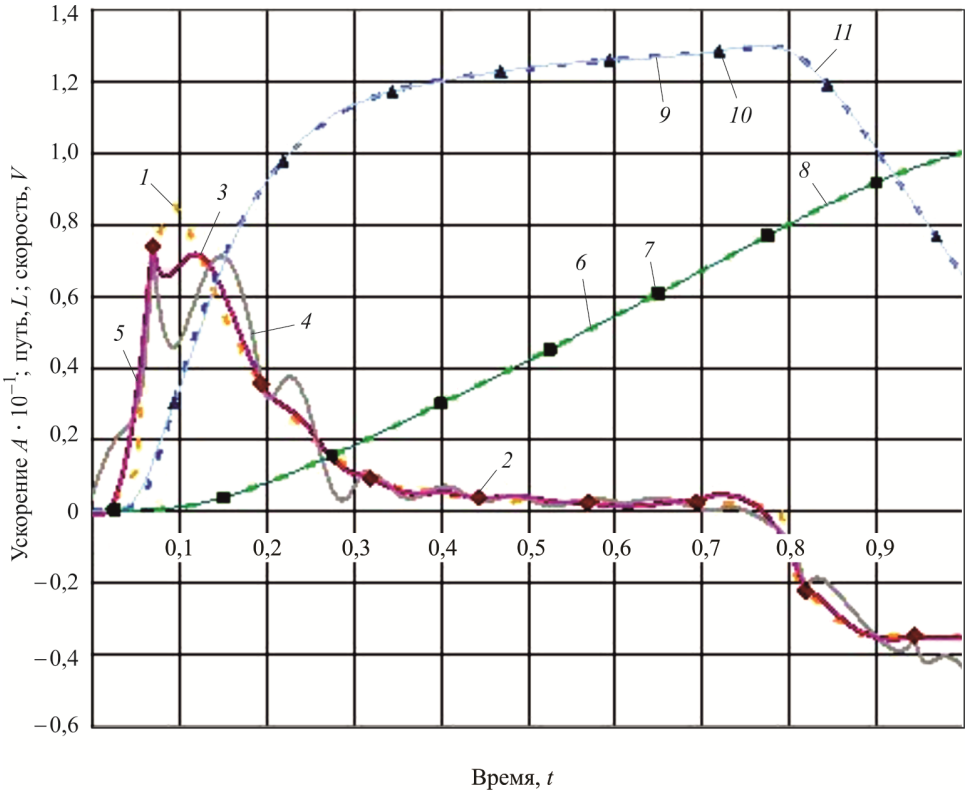


Рис. 1. Реконструкция данных поиском нормального псевдорешения (выборка $\delta t = 0,125$, $t^{(A)}_1 = 0,06875$, $\lambda_L = 0,65$, $\lambda_V = 0,65$; минимизация: $\left\|\dot{A}^{(\Pi)}\right\|_{n=7}(1)$, $\left\|A^{(\Pi)}\right\|_{n=7}(2)$, $\left\|\dot{A}^{(\Pi)}\right\|_{n=7}(3)$):

1, *6*, *9* — полные данные для $A/10$, L и V; *2*, *7*, *10* — дискретные данные для $A/10$, L и V; *3–5* — реконструкции для $A/10$; *8*, *11* — реконструкции для L и V, соответственно

В данном примере полная и неполная эрмитовы интерполяции приводят к близким, но не вполне удовлетворительным результатам. Заметим, что хорошей интерполяции по заданным значениям $(n=7)$ соответствует величина $\left\|\dot{A}^{(\Pi)}\right\|_{L_2} \approx 49,$ а реконструированному решению, полученному в результате минимизации $\left\|\dot{A}^{(\Pi)}\right\|_{L_2},$ — значение $\left\|\dot{A}^{(\Pi)}\right\|_{L_2} \approx 43.$ На рис. 1 приведены также результаты расчетов, относящиеся к случаю $n=7,$ в которых минимизировалась L_2-норма ускорения $A^{(\Pi)}(t)$ $(\nu=2),$ что дает плохой результат. Таким образом, реконструкция графика ускорения методом поиска нормального псевдорешения оказывается не вполне удовлетворительной (в наиболее трудной для восстановления начальной части графика). Однако у данного подхода нет свободных параметров для улучшения результатов.

Дискретная реконструкция с использованием элементов регуляризации. В работе [12] отмечено, что задача поиска нормального псевдорешения СЛАУ в общем случае некорректно поставлена, поэтому предложен регуляризирующий алгоритм поиска приближенного решения, удовлетворяющий условиям корректности. Применим соображения, основанные на идеях регуляризации [12, 14, 15], в рассматриваемой задаче. При этом уделим внимание только интерполяциям 5-й степени, для которых предыдущие подходы оказались неудачными.

Для определения неизвестных узловых значений $L_j^{(A)},$ $V_j^{(A)},$ $A_j^{(A)}$ имеем СЛАУ (3). Согласно методу регуляризации, если эта задача плохо обусловлена, мы должны заменить ее задачей минимизации регуляризирующего функционала. Ранее, однако, было выяснено, что СЛАУ (3) имеет достаточную обусловленность для устойчивых вычислений решения. Более того, в примере [9] применения пошагового метода к аналитическим зависимостям матрица и правая часть СЛАУ (3) точно заданы. Тем не менее, единственное точное решение этой системы оказалось совершенно непригодным. Следовательно, чтобы подвести нашу задачу под условия применения методов регуляризации, требуются определенные соображения.

Как видим, функция $L^{(\Pi)}(t),$ построенная по известным узловым значениям в кратных узлах $t_j^{(L)}=t_j^{(V)}=t_j^{(A)},$ обеспечивает приемлемую аппроксимацию точного решения. Это позволяет в общем случае несовпадающих или частично совпадающих узлов регистрации «под-

менить» поиск точного решения поиском кусочного полинома $L^{(\Pi)}(t)$, аппроксимирующего это точное решение. Поскольку решение СЛАУ (3) дает плохую реконструкцию недостающих узловых значений $L_j^{(A)}$, $V_j^{(A)}$, расхождения между точными значениями L_j, V_j и соответствующими значениями $L^{(\Pi)}\left(t_j^{(L)}\right)$ и $\dot{L}^{(\Pi)}\left(t_j^{(V)}\right)$ искомого кусочного полинома выходят за границы обусловленности СЛАУ.

Проведенное рассуждение обосновывает применение в нашей задаче методов регуляризации и позволяет ввести в рассмотрение ошибку правой части уравнения (3). Выполненные выше расчеты дискретной реконструкции по данным измерений с кратными узлами регистрации [9] предоставляют оценки погрешностей. В общем случае, имея данные полной регистрации кинематических параметров хотя бы в одном газодинамическом испытании, такого рода расчеты можно выполнить, и получить информацию для анализа в будущем испытании с неполным объемом измерений.

Располагая оценкой для величины ошибки правой части уравнения (3) («точной» правой части относительно приближенной правой части, дающей удовлетворительное решение), можем рассмотреть задачу минимизации регуляризирующего функционала

$$\Phi_\alpha(x) = 0,5\left\|Mx-b\right\|_2^2 + \sum_{\nu=0}^{3}\alpha^{(\nu)}\left\|f^{(\Pi;\nu)}\right\|^2_{L_2\left(\left[t_0^{(A)};t_N^{(A)}\right]\right)}. \tag{7}$$

Параметры регуляризации $\alpha^{(\nu)}$ должны быть выбраны достаточно малыми и из того расчета, чтобы

$$\left\|Mx-b\right\|_2 \cong \delta, \tag{8}$$

где δ — оценка погрешности правой части. С учетом потребности в сглаживании производной ускорения в расчетах были приняты значения $\alpha^{(0)} = \alpha^{(1)} = \alpha^{(2)} = 0$, а оставшийся параметр $\alpha^{(3)}$ варьировался.

Необходимое и достаточное условие минимума функционала (7) при фиксированных значениях $\alpha^{(\nu)}$ выглядит как ($j = 0,..N-1$; $l = 0,..n$),

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial q_j^{(l)}}\Phi_\alpha(x) &= 0,5\frac{\partial}{\partial q_j^{(l)}}\left\|Mx-b\right\|_2^2 + \\ &+\sum_{\nu=0}^{3}\alpha^{(\nu)}\ \frac{\partial}{\partial q_j^{(l)}}\left\|f^{(\Pi;\nu)}\right\|^2_{L_2\left(\left[t_0^{(A)};t_N^{(A)}\right]\right)} = 0.\end{aligned} \tag{9}$$

Возвращаясь к обозначениям $y_j^{(\kappa)}$ (теперь $\kappa = 0, 1, 2$), для величин $\dfrac{\partial}{\partial y_j^{(\kappa)}} \left\| f^{(\Pi;\nu)} \right\|^2_{L_2\left(\left[t_0^{(A)}; t_N^{(A)}\right]\right)}$ имеем выражения, стоящие в левой части уравнения (6). Далее, если учесть, что

$$0,5 \frac{\partial}{\partial x_l} \|Mx - b\|_2^2 = 0,5 \frac{\partial}{\partial x_l} \sum_{i=0}^{3N-1} \left(\sum_{j=0}^{3N-1} M_{ij} x_j - b_i \right)^2 =$$

$$= \sum_{i=0}^{3N-1} \left(\sum_{j=0}^{3N-1} M_{ij} x_j - b_i \right) M_{il} = \sum_{i,j=0}^{3N-1} M_{il} M_{ij} x_j - \sum_{i=0}^{3N-1} M_{il} b_i,$$

можно легко получить явное выражение для первого слагаемого в уравнении (9). Матрицу M (размером $3N \times 3N$) определим соотношениями (3), а для компонент вектора x имеем $x_{3j+\nu} = y_{j+1}^{(\nu)}$ $\left(j = 0,..N-1;\ \nu = 0, 1, 2\right)$.

Результаты реконструкции кинематических параметров изложенным способом для трех значений параметра регуляризации $\alpha^{(3)} \approx 10^{-7}$, 10^{-6}, 10^{-5}, которым соответствуют значения невязок $\|Mx - b\|_2 \approx 1,41 \cdot 10^{-3}$; $1,86 \cdot 10^{-3}$; $2,95 \cdot 10^{-3}$, показаны на рис. 2. В данном случае имеем возможность определить погрешность δ точно, используя формулу

$$\delta = \sqrt{\sum_{j=1}^{N} \left\{ \left[L_0^{(\Pi)}\left(t_j^{(L)}\right) - L_j \right]^2 + \left[\dot{L}_0^{(\Pi)}\left(t_j^{(V)}\right) - V_j \right]^2 \delta t^2 + \left[\ddot{L}_0^{(\Pi)}\left(t_j^{(A)}\right) - A_j \right]^2 \delta t^4 \right\}}, \tag{10}$$

где $L_0^{(\Pi)}(t)$ — кусочно-полиномиальная интерполяция с кратными узловыми значениями $L\left(t_j^{(A)}\right)$, $V\left(t_j^{(A)}\right)$, $A\left(t_j^{(A)}\right)$, вычисленными по полным данным. При этом получим величину $\delta \approx 1,13 \cdot 10^{-3}$, которой соответствуют значение параметра регуляризации $\alpha^{(3)} \approx 3 \cdot 10^{-14}$ и неприемлемый уровень осцилляций параметров. Среднее из приведенных выше значений $\left(\alpha^{(3)} \approx 10^{-6}\right)$ дает наилучший результат, хотя и не вполне удовлетворительный.

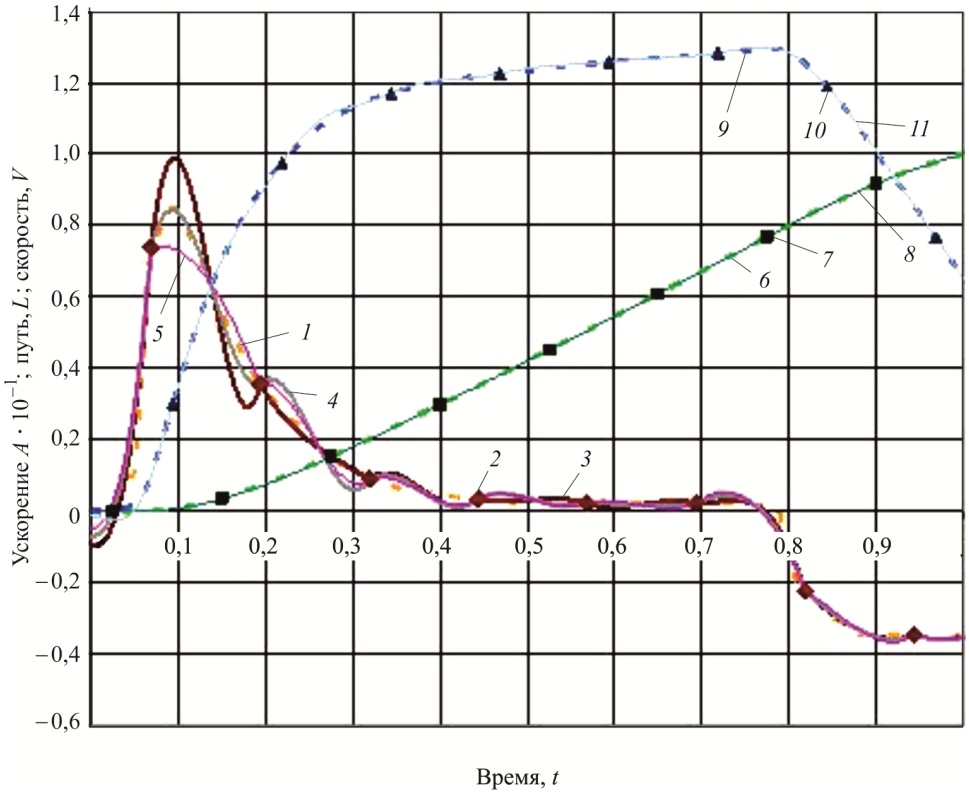


Рис. 2. Результаты реконструкции данных с использованием регуляризации (выборка $\delta t = 0{,}125$, $t_1^{(A)} = 0{,}06875$, $\lambda_L = 0{,}65$, $\lambda_V = 0{,}65$; параметр: $\alpha^{(3)} \approx 10^{-7}$ (1), 10^{-6} (2), 10^{-5} (3)):

1, *6*, *9* — полные данные для $A/10$, L и V; *2*, *7*, *10* — дискретные данные для $A/10$, L и V; *3–5* — реконструкции для $A/10$; *8*, *11* — реконструкции для L и V, соответственно

Дискретная реконструкция в случаях, когда моменты регистрации параметров известны неточно. Подход с использованием регуляризации приобретает дополнительную ценность в том случае, когда моменты регистрации случайным образом отличаются от своих опорных значений. Для сохранения относительной простоты описания (линейная зависимость интерполяционных функций от параметров) будем считать, что моментами регистрации являются прежние опорные значения, а соответствующие им значения параметров зафиксированы с погрешностями. Выполнив предварительную реконструкцию параметров и зная диапазон изменения моментов регистрации, можно оценить «ошибку» параметров, знать которую обязательно для методов регуляризации [12, 14, 15]. Оценив погрешность δ, решаем далее задачу минимизации функционала (7), выбирая параметры регуляризации согласно условию (8).

Пусть опорные моменты регистрации параметров $t_j^{(L,V,A)}$ соответствуют выборке $\delta t = 0{,}125$, $t_1^{(A)} = 0{,}06875$, $\lambda_L = 0{,}65$, $\lambda_V = 0{,}65$, а фактические моменты регистрации $\tilde{t}_j^{(L,V,A)}$ отличны от них случайным образом в пределах разбросов $\pm 0{,}0125$ (10 % от шага регистрации δt) с равновероятным законом распределения. Вычислим по полным данным значения $L_j = L\left(\tilde{t}_j^{(L)}\right)$, $V_j = V\left(\tilde{t}_j^{(V)}\right)$, $A_j = A\left(\tilde{t}_j^{(A)}\right)$ и соотнесем их с опорными моментами регистрации. Тогда погрешность правой части СЛАУ (3) вновь можно найти по формуле (10). Результаты реконструкции кинематических параметров, полученные для одной из случайных реализаций, показаны на рис. 3.

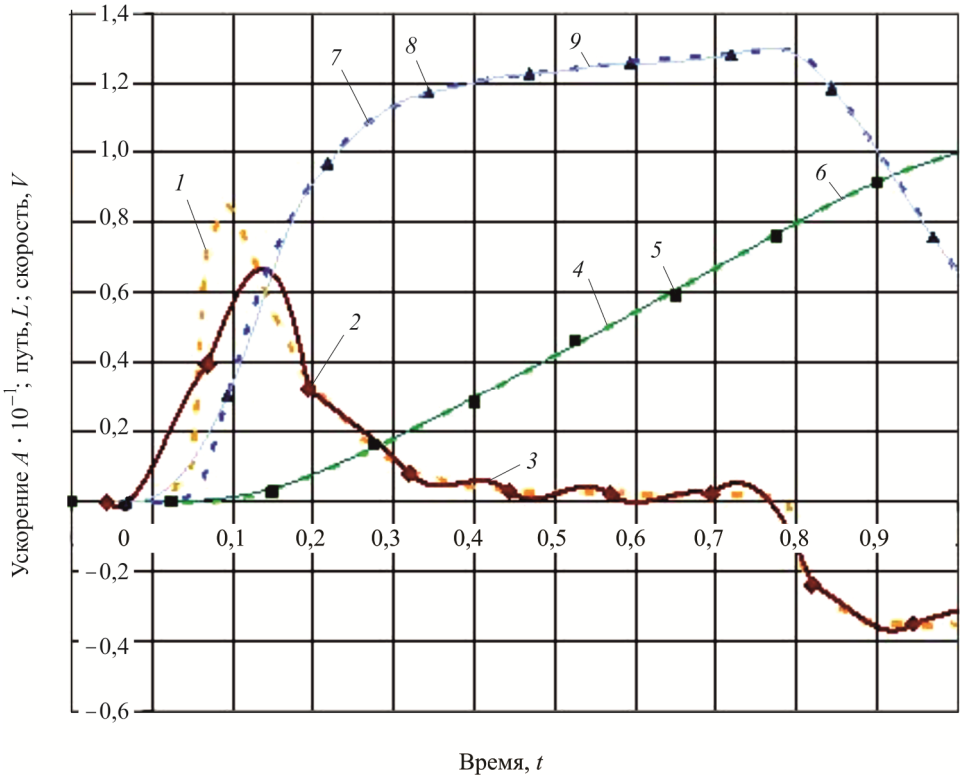


Рис. 3. Реконструкция данных при неточно известных моментах регистрации: *1*, *4*, *7* — полные данные для $A/10$, L и V; *2*, *5*, *8* — дискретные данные для $A/10$, L и V; *3*, *6* и *9* — реконструкция для $A/10$, L и V соответственно

Приведенные зависимости соответствуют значениям $\alpha^{(0)} = \alpha^{(1)} = \alpha^{(2)} = 0$, $\alpha^{(3)} \approx 5 \cdot 10^{-5}$, что дает невязку $\|Mx - b\|_2 \approx 2{,}86 \cdot 10^{-2}$. Погрешность правой части СЛАУ (3) для этой случайной реализации

составляет $\delta \approx 6{,}11 \cdot 10^{-2}$. Качество восстановления ускорения сильно зависит от случайной выборки. В данном примере величина пика ускорения оказалась заниженной примерно на 22 %. С уменьшением шага регистрации параметров δt качество воспроизведения параметров, естественно, повышается.

Заключение. Как видно из представленных результатов, реконструкция параметров движения ЛА в контейнере при газодинамическом выбросе на основе данных дискретной регистрации вполне возможна, если данных не слишком мало. Наиболее гибкий подход к восстановлению данных основан на приемах метода регуляризации [12]. С одной стороны, при отработке сложных технических систем осуществляют хотя бы единичные испытания с полным замером основных параметров. Это дает информацию о типичном поведении искомых зависимостей. (Распространить эту информацию буквально на все последующие испытания, вообще говоря, нельзя ввиду значительного разброса параметров движения ЛА в контейнере, обусловленного значительным разбросом массорасходных характеристик энергоустройств газодинамического выброса [6–8, 16].) Применяя свободные параметры метода и информацию о типичном поведении искомых зависимостей, нетрудно найти наиболее подходящий вариант реконструированных зависимостей. По виду реконструированного графика ускорения можно делать выводы о достоверности воспроизведения пика: «провалы», «завалы», осцилляции можно легко обнаружить на рис. 1–3 и порой их проще откорректировать вручную, чем дополнительно усложнять математическую обработку данных. С другой стороны, реконструкция кинематических параметров с регуляризацией имеет внутренние резервы совершенствования. Это, например, уточнение концепции применения аппарата регуляризации, а также ослабление «притяжения» реконструированной зависимости ускорения к узлам интерполяции, что явно ухудшает качество реконструкции (см. рис. 1–3).

Выше особое внимание было обращено на качество воспроизведения графика ускорения. Проблемным местом стал начальный участок, включающий основной пик. Максимальное значение этого пика, безусловно, проектный параметр, но эту максимальную оценку трудно получить в экспериментах, поэтому обычно используют газодинамические расчеты [6–8]. В остальных аспектах для прочностных расчетов более важным может стать детальное знание графика скорости ЛА в контейнере [16], а для анализа событий важно достоверное знание графика пути [6–8]. Как видно из представленных на рис. 1–3 результатов, почти во всех случаях эти зависимости воспроизводят с помощью метода дискретной реконструкции с высокой точностью.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Плюснин А.В. Расчет коэффициентов внутреннего и внешнего нестационарного взаимодействия корпуса ЛА с жидкостью методом граничных элементов. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 2, с. 77–100.

[2] Плюснин А.В. Учет эффекта вторичного догорания при расчетах систем газодинамического выброса летательного аппарата. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 3, с. 55–73.

[3] Димитриенко Ю.И., Захаров А.А., Коряков М.Н., Сыздыков Е.К., Минин В.В. Численное решение сопряженной задачи гиперзвуковой аэродинамики и термомеханики термодеструктирующих конструкций. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, № 9 (21).
URL: http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/aero/1114.html

[4] Димитриенко Ю.И., Димитриенко И.Д., Коряков М.Н. Комплексное моделирование движения летательных аппаратов и процессов горения в двигателях на основе анизотропных топлив. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, № 9 (21).
URL: http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/technic/1120.html

[5] Димитриенко Ю.И., Захаров А.А., Коряков М.Н., Сыздыков Е.К. Моделирование сопряженных процессов аэрогазодинамики и теплообмена на поверхности теплозащиты перспективных гиперзвуковых летательных аппаратов. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*. 2014, № 3, с. 23–34.

[6] Ефремов Г.А., Страхов А.Н., Минасбеков Д.А., Горлашкин А.А., Плюснин А.В., Соколов П.М., Бондаренко Л.А., Говоров В.В. Отработка газодинамики подводного старта на наземном газодинамическом стенде предприятия. *Ракетные комплексы и ракетно-космические системы — проектирование, экспериментальная отработка, летные испытания, эксплуатация. Труды секции 22 им. акад. В.Н. Челомея XXXVIII Академических чтений по космонавтике*. Реутов, 2014, с. 65–74.

[7] Плюснин А.В., Бондаренко Л.А., Сабиров Ю.Р. Анализ газогидродинамических процессов и методов их расчета на основе опыта предприятия в отработке подводного минометного старта. *Ракетные комплексы и ракетно-космические системы — проектирование, экспериментальная отработка, летные испытания, эксплуатация: Труды секции 22 имени академика В.Н. Челомея XXXIX Академических чтений по космонавтике*. Реутов, 2015, с. 74–83.

[8] Плюснин А.В. Реконструкция результатов газодинамических испытаний при неполном объеме измерений. *Ракетные комплексы и ракетно-космические системы — проектирование, экспериментальная отработка, летные испытания, эксплуатация: Труды секции 22 имени академика В.Н. Челомея XXXIX Академических чтений по космонавтике*. Реутов, 2015, с. 84–93.

[9] Плюснин А.В. Восстановление параметров движения летательного аппарата по данным их дискретной регистрации. Ч. 1. Способы, не использующие регуляризацию. *Математическое моделирование и численные методы*, 2016, № 1 (9), с. 68–88.

[10] Михлин С.Г. *Вариационные методы в математической физике*. Москва, Наука, 1970, 512 с.

[11] Demmel J.W. *Applied Numerical Linear Algebra*. Philadelphia: SIAM, 1997, 430 p.

[12] Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. *Методы решения некорректных задач*. Москва, Наука, 1979, 288 с.
[13] Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ*. Москва, Наука, 1977, 744 с.
[14] Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г. *Численные методы решения некорректных задач*. Москва, Наука, 1990, 232 с.
[15] Леонов А.С. *Решение некорректно поставленных задач: Очерк теории, практические алгоритмы и демонстрации в МАТЛАБ*. Москва, Либроком, 2010, 336 с.
[16] Алашеев В.И., Давтян А.А., Плюснин А.В., Сабиров Ю.Р. Анализ условий обеспечения допустимых нагрузок и безударного выхода изделия из пусковой установки. *Аэрокосмические технологии. Научные материалы Третьей международной научно-технической конференции, посвященной 100-летию со дня рождения академика В.Н. Челомея*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014, с. 163–164.

Статья поступила в редакцию 18.05.2016

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Плюснин А.В. Восстановление параметров движения летательного аппарата по данным их дискретной регистрации. Ч. 2. Способы, использующие регуляризацию. *Математическое моделирование и численные методы*, 2016, № 2(10), с. 39–54.

Плюснин Андрей Владимирович окончил Днепропетровский государственный университет по специальности «Гидроаэродинамика» и аспирантуру кафедры «Волновая и газовая динамика» МГУ им. М.В. Ломоносова. Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры ФН-11 МГТУ им. Н.Э. Баумана, заместитель начальника отдела АО «ВПК «НПО машиностроения». Автор ряда работ по нестационарным задачам гидрогазодинамики и теории упругости. e-mail: andrey.plusnin@gmail.com

Aircraft motion parameters recovery from the data of their discrete registration. Part 2. Methods using regularization

© A.V. Plyusnin

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

The article examines methods of aircraft motion parameters recovery from the data of their low resolution recordings in the gas-dynamic ejection experimental test.

Keywords: *aircraft gas-dynamic ejection, aircraft, motion parameters recovery, piecewise polynomial interpolation.*

REFERENCES

[1] Plyusnin A.V. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2014, no. 2, pp.77–100.
[2] Plyusnin A.V. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2014, no. 3, pp. 55–73.
[3] Dimitrienko Yu.I., Zakharov A.A., Koryakov M.N., Syzdykov E.K., Minin V.V. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation*, 2013, no. 9. Available at: http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/aero/1114.html

[4] Dimitrienko Yu.I., Dimitrienko I.D., Koryakov M.N. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation*, 2013, no. 9. Available at: http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/technic/1120.html

[5] Dimitrienko Yu.I., Zakharov A.A., Koryakov M.N., Syzdykov E.K. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Mashinostroenie — Proceedings of Higher Educational Institutions. Machine Building,* 2014, no. 3. pp. 23–34.

[6] Efremov G.A., Strakhov A.N., Minasbekov D.A., Gorlashkin A.A., Plyusnin A.V., Sokolov P.M., Bondarenko L.A., Govorov V.V. Otrabotka gazodinamiki podvodnogo starta na nazemnom gazodinamicheskom stende predpriyatiya [Underwater launch gas dynamic tests on the gas dynamics ground test bench of the enterprise]. *Raketnye kompleksy i raketno-kosmicheskiye sistemy — proyektirovaniye, eksperimentalnaya otrabotka, letnye ispytaniya, ekspluatatsiya. Trudy sektsii 22 XXXVIII Akademicheskikh chteniy po kosmonavtike* [Rocket and space-rocket systems — designing, experimental tests, flight tests, exploitation. Proc. of the 22nd section of XXXVIII Academic Space Technology Readings.]. Reutov, 2014, pp. 65–74.

[7] Plyusnin A.V., Bondarenko L.A., Sabirov Yu.R. Analiz gazogidro-dinamicheskikh protsessov i metodov ikh rascheta na osnove opyta predpriyatiya v otrabotkye podvodnogo minom'etnogo starta [Analysis of gas and hydro dynamic processes and their calculation methods on the basis of the enterprise experience in underwater mortar launch tests]. *Raketnye kompleksy i raketno-kosmicheskiye sistemy — proyektirovaniye, eksperimentalnaya otrabotka, letnye ispytaniya, ekspluatatsiya. Trudy sektsii 22 XXXVIII Akademicheskikh chteniy po kosmonavtike* [Rocket and space-rocket systems — designing, experimental tests, flight tests, exploitation. Proc. of the 22nd section of XXXVIII Academic Space Technology Readings]. Reutov, 2015, pp. 74–83.

[8] Plyusnin A.V. Reconstruktsiya rezul'tatov gazodinamicheskikh ispytaniy pri nepolnom obyome izmereniy [Gas-dynamic tests results recovery in case of incomplete measurements]. *Raketnye kompleksy i raketno-kosmicheskiye sistemy — proyektirovaniye, eksperimentalnaya otrabotka, letnye ispytaniya, ekspluatatsiya. Trudy sektsii 22 XXXVIII Akademicheskikh chteniy po kosmonavtike* [Rocket and space-rocket systems — designing, experimental tests, flight tests, exploitation. Proc. of the 22nd section of XXXVIII Academic Space Technology Readings:]. Reutov, 2015, pp. 84–93.

[9] Plyusnin A.V. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2016, no. 1, pp. 68–88.

[10] Mikhlin S.G. *Variatsionnyye metody v matematicheskoy fizike* [Variational methods in mathematical physics]. Moscow, Nauka Publ., 1970, 512 p.

[11] Demmel J.W. *Applied Numerical Linear Algebra*. Philadelphia, SIAM, 1997, 430 p.

[12] Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. *Metody resheniya nekorrektnykh zadach* [Methods for solving incorrect problems]. Moscow, Nauka Publ., 1979, 288 p.

[13] Kantorovich L.V., Akilov G.P. *Funktsional'nyy analiz* [Function analysis]. Moscow, Nauka Publ., 1977, 744 p.

[14] Tikhonov A.N., Goncharsky A.V., Stepanov V.V., Yagola A.G. *Chislennyye metody resheniya nekorrektnykh zadach* [Numerical methods for solving incorrect problems]. Moscow, Nauka Publ., 1990, 232 p.

[15] Leonov A.S. *Resheniye nekorrektno postavlennykh zadach: Ocherk teorii, prakticheskiye algoritmy i demonstratsii v MATLAB* [The solution of incorrectly posed problems: Essay on the theory, practical algorithms and demonstrations in MATLAB]. Moscow, Librokom Publ., 2010, 336 p.

[16] Alasheev V.I., Davtyan A.A., Plyusnin A.V., Sabirov Yu.R. Analiz usloviy obespecheniya dopustimykh nagruzok i bezudarnogo vykhoda izdeliya iz puskovoy ustanovki [Analysis of conditions to ensure permissible loads and shock-free release of the product launcher]. *Aerokosmicheskiye tekhnologii: Nauchnyye materialy Tret'yey mezhdunarodnoy nauchno-tekhnicheskoy konferentsii, posvyashchennoy 100-letiyu so dnya rozhdeniya akademika V.N. Chelomeya* [Aerospace Technologies: Research materials of the Third International Scientific Conference dedicated to the 100th anniversary of the birth of Academician V.N. Chelomey]. Moscow, BMSTU Publ., 2014, pp. 163–164.

Plyusnin A.V. graduated from the Dnepropetrovsk State University, majoring in Aero-hydrodynamics and obtained a degree in the Department of Wave and Gas Dynamics, Lomonosov Moscow State University. Cand. Sci. (Phys. & Math.), Assoc. Professor of the Computational Mathematics and Mathematical Physics Department at the Bauman Moscow State Technical University, Deputy Chief of the Department in at JSC MIC Mashinostroyenia. Author of several publications in the field of nonstationary problems of hydro- and gas dynamics and elasticity theory. e-mail: andrey.plusnin@gmail.com