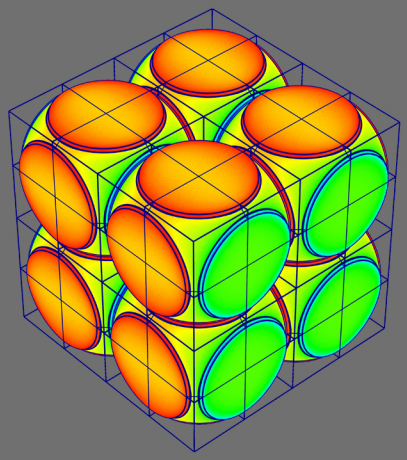
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Димитриенко Ю. И., Губарева Е. А., Сборщиков С. В. Многомасштабное моделирование упругопластических композитов с учетом повреждаемости. Математическое моделирование и численные методы, 2016, №2 (10), с. 3-23

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/93/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.216.112
18.01.2026 00:12:29

УДК 539.3+519.86

Многомасштабное моделирование упругопластических композитов с учетом повреждаемости

© Ю.И. Димитриенко, Е.А. Губарева, С.В. Сборщиков

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Предложена модель деформирования упругопластических композиционных материалов периодической структуры с учетом повреждаемости фаз композита, основанная на варианте деформационной теории пластичности при активном нагружении. Для моделирования эффективных характеристик упругопластических композитов применен метод асимптотической гомогенизации периодических структур. Для численного решения локальных задач упругопластичности с учетом повреждаемости на ячейке периодичности предложен вариант итерационного метода линеаризации, а для численного решения линеаризованных задач на ячейке периодичности — метод конечных элементов с использованием программной среды SMCM, разработанной в Научно-образовательном центре «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов» (СИМПЛЕКС) МГТУ им. Н.Э. Баумана. Приведены примеры численных расчетов для дисперсно-армированного металлокомпозита (алюминиевой матрицы, наполненной частицами SiC). Представлены результаты численного моделирования процессов деформирования, накопления повреждений и разрушения металлокомпозита.

Ключевые слова: *численное моделирование, композиты, метод асимптотического осреднения, упругопластические композиты, повреждаемость, метод конечных элементов, локальные проблемы, ячейка периодичности, алюминиевая матрица, частицы SiC.*

Введение. Несмотря на то что существует достаточно большой класс композитов, проявляющих упругопластическое поведение, упругопластические свойства этих материалов в настоящее время мало изучены. Можно выделить композиты: на металлических матрицах; армированные дисперсными частицами или непрерывными волокнами; на термопластических матрицах и на основе эластомерных матриц. В технике наиболее широко распространены композиты на основе термореактивных матриц, армированные тканями — они проявляют заметные нелинейно-упругие свойства.

Методы моделирования упругопластических характеристик композитов появились достаточно давно [1], но до настоящего времени они базировались на приближенном анализе механического поведения композитов, основанном на определенных гипотезах относительно совместного деформирования компонентов композита [2–5]. Сейчас наиболее перспективным методом для прогнозирования эффективных свойств композитов и моделирования микромеханических процессов в них является метод асимптотического осреднения (homogenization method) [6–10]. Его успешно применяют для моделирования различных механических и физических процессов в компо-

зитах [11–14]. В работах [15–20] предложены вычислительные алгоритмы решения так называемых локальных задач метода асимптотического осреднения.

Цель настоящей работы заключена в дальнейшем развитии исследований, начатых в работе [21], для случая упругопластических деформаций композитов при учете эффектов повреждаемости. Под повреждаемостью обычно понимают возникновение и развитие множественных дефектов в композитах. Она, как правило, имеет многомасштабный характер [22]: существуют микродефекты, возникающие в матрице и наполнителях композита. При определенном уровне напряжений возникают дефекты (как правило, трещины) в матрице и на границе раздела матрицы и наполнителей, их можно назвать мезоповреждениями. При еще более высоких нагрузках, близких к предельным, в композитах возникают макроразрушения. В настоящей работе с использованием метода асимптотического осреднения предложена модель упругопластического деформирования композитов с учетом многомасштабных эффектов повреждаемости.

Постановка задачи механики упругопластических композитов с микроповреждаемостью. Рассмотрим композит, которому в пространстве R^3 соответствует область V с поверхностью Σ. Композит состоит из N компонент V_α, $\alpha = 1, ..., N$. Компоненты с индексами $\alpha = 1, ..., N-1$ представляют собой включения различных типов, а компонента с индексом $\alpha = N$ — это матрица. Введем Σ_α — поверхности областей V_α; $\Sigma_{\alpha N}$ — поверхности контакта матрицы и включений (пологаем их не контактирующими между собой); $\Sigma_{\alpha e}$ — часть поверхности Σ композита, занятая α-м компонентом (причем $\Sigma_\alpha = \Sigma_{\alpha N} \cup \Sigma_{\alpha e}$ — для включений и $\Sigma_N = \bigcup\limits_{\alpha=1}^{N-1} \Sigma_{\alpha N} \cup \Sigma_{Ne}$ — для матрицы). Включения и матрицу положим изотропными упругопластическими, соответствующими деформационной теории пластичности с учетом микроповреждаемости [13]. Тогда в каждой области V_α, $\alpha = 1, ..., N$, имеем следующую задачу механики упругопластических сред с микроповреждаемостью:

$$\begin{cases} \nabla_j \sigma_{ij}^\alpha = 0 \ \text{ в } \ V_\alpha, \\ \sigma_{ij}^\alpha = F_{ij}^\alpha \left(z^\alpha, \varepsilon_{kl}^\alpha \right) \ \text{ в } \ V_\alpha \cup \Sigma_\alpha, \\ \varepsilon_{ij}^\alpha = \dfrac{1}{2} \left(\nabla_j u_i^\alpha + \nabla_i u_j^\alpha \right) \ \text{ в } \ V_\alpha, \\ u_i^\alpha = u_i^N, \left(\sigma_{ij}^\alpha - \sigma_{ij}^N \right) n_j = 0 \Big\} \ \text{ на } \ \Sigma_{\alpha N}, \\ u_i^\alpha = u_{ie} \ \text{ на } \ \Sigma_{\alpha e}^1, \ \sigma_{ij}^\alpha n_j = S_{ie} \ \text{ на } \ \Sigma_{\alpha e}^2. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь σ_{ij}^{α}, $\varepsilon_{ij}^{\alpha}$, u_i^{α} — напряжения, деформации и перемещения в α-м компоненте; $\mathcal{F}_{ij}^{\alpha}\left(z^{\alpha},\varepsilon_{kl}^{\alpha}\right)$ — нелинейная тензорная функция определяющих соотношений упругопластичности при активном нагружении; $z^{\alpha}=z^{\alpha}(\sigma_{ij}^{\alpha})$ — параметры микроповреждаемости, зависящие от напряжений $z^{\alpha}(\sigma_{ij}^{\alpha})$; $\nabla_j u_i^{\alpha}=\partial u_i^{\alpha}/\partial \overline{x}^j$ — частные производные по декартовым координатам $\overline{x}^j$ (последние два условия в системе (1) — это условия идеального контакта матрицы и включений, а также условия на внешних поверхностях).

Модель деформационной теории упругопластичности для сред с повреждаемостью. Выберем тензорные функции $\mathcal{F}_{ij}^{\alpha}\left(z^{\alpha},\varepsilon_{kl}^{\alpha}\right)$ соответствующими изотропной среде, которая подчиняется модифицированной деформационной теории малых упругопластических деформаций А.А. Ильюшина для активного нагружения [23], которая модифицирована введением зависимости упругих констант от параметра микроповреждаемости $z^{\alpha}=z^{\alpha}(\sigma_{ij}^{\alpha})$. В этом случае функция $\mathcal{F}_{ij}^{\alpha}\left(z^{\alpha},\varepsilon_{kl}^{\alpha}\right)$ имеет следующий вид (индекс α опущен):

$$\sigma_{ij}=\mathcal{F}_{ij}\left(z,\varepsilon_{kl}\right)=\left(K(z)-\frac{2}{3}G(z)(1-\omega)\right)\varepsilon_{kk}\delta_{ij}+2G(z)(1-\omega)\varepsilon_{ij}, \qquad (2)$$

где $K(z)$ — модуль объемного сжатия материала; $G(z)$ — модуль сдвига; $\omega(\varepsilon_u)$ — функция пластичности А.А. Ильюшина. Выберем ее в степенном виде [23]

$$\omega(\varepsilon_u)=\begin{cases}0, & \varepsilon_u\le\varepsilon_T,\\ 1-(\varepsilon_T/\varepsilon_u)^{1-n}, & \varepsilon_u>\varepsilon_T,\end{cases} \qquad (3)$$

где ε_u — второй инвариант (интенсивность) тензора деформации; ε_T — деформация начала текучести материала; n — показатель упрочнения [24].

Второй инвариант (рис. 1) можно вычислить по формуле

$$\varepsilon_u=\frac{1}{\sqrt{2}}\left((\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22})^2+(\varepsilon_{22}-\varepsilon_{33})^2+(\varepsilon_{33}-\varepsilon_{11})^2+6({\varepsilon_{12}}^2+{\varepsilon_{13}}^2+{\varepsilon_{23}}^2)\right)^{1/2}. \qquad (4)$$

Модуль объемного сжатия материала $K(z)$ и модуль сдвига $G(z)$ зависят от параметра микроповреждаемости z следующим образом:

$$K(z) = K_0 a(z), \qquad G(z) = G_0 a(z), \tag{5}$$

где K_0 и G_0 — упругие константы при отсутствии микроповреждаемости; $a(z)$ — функция, описывающая микроповреждаемость материала. Выберем ее в следующем виде:

$$a(z) = \frac{1}{2}\left(\left|1-(1-a_z)z^{m_z}\right| + 1-(1-a_z)z^{m_z}\right) + \frac{a_z}{2}\left(1-z-\left|1-z\right|\right), \tag{6}$$

где $a_z << 1$ — константа, описывающая уровень снижения упругих свойств после возникновения микроразрушения; m_z — константа, описывающая микроповреждаемость. Функция (6) удовлетворяет следующим условиям:

$$a(z) = 1, \text{ если } z = 0,$$

$$a(z) = 1-(1-a_z)z^{m_z}, \text{ если } 0 < z < 1,$$

$$a(z) = a_z, \text{ если } z \geq 1.$$

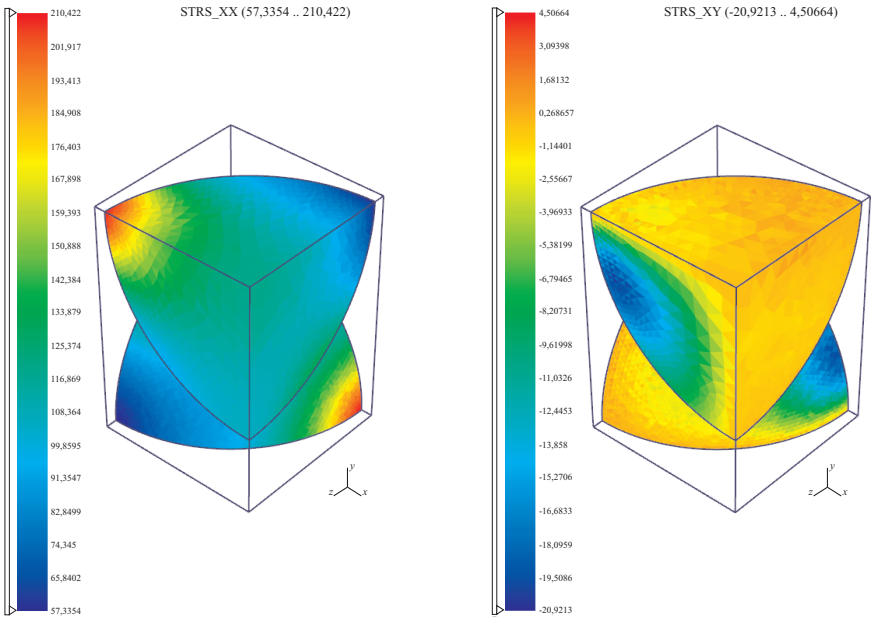


Рис. 1. Поля микронапряжений $\sigma_{11}^{(\alpha)}$ и $\sigma_{12}^{(\alpha)}$ в ячейке периодичности композита Al + SiC при растяжении в направлении оси $O\xi_1$

Для параметра повреждаемости z примем следующую зависимость от инвариантов тензора напряжений:

$$z = \frac{\sigma_u^2}{3\sigma_S^2(1+B_1V(\sigma))} + \left(\frac{1}{\sigma_T^2} - \frac{1}{3\sigma_S^2}\right)\sigma_+^2, \tag{7}$$

где σ_u — второй инвариант; σ — первый инвариант; σ_+ (σ_-) — знакопостоянный инвариант тензора напряжений (рис. 2). Их вычисляют по формулам

$$\sigma = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33},$$

$$\sigma_u = \frac{1}{\sqrt{2}}\left((\sigma_{11}-\sigma_{22})^2 + (\sigma_{11}-\sigma_{33})^2 + (\sigma_{22}-\sigma_{33})^2 + 6(\sigma_{12}^2+\sigma_{13}^2+\sigma_{23}^2)\right)^{1/2}, \tag{8}$$

$$\sigma_+ = \frac{1}{2}\left(|\sigma| + \sigma\right),$$

$$\sigma_- = \frac{1}{2}\left(|\sigma| - \sigma\right).$$

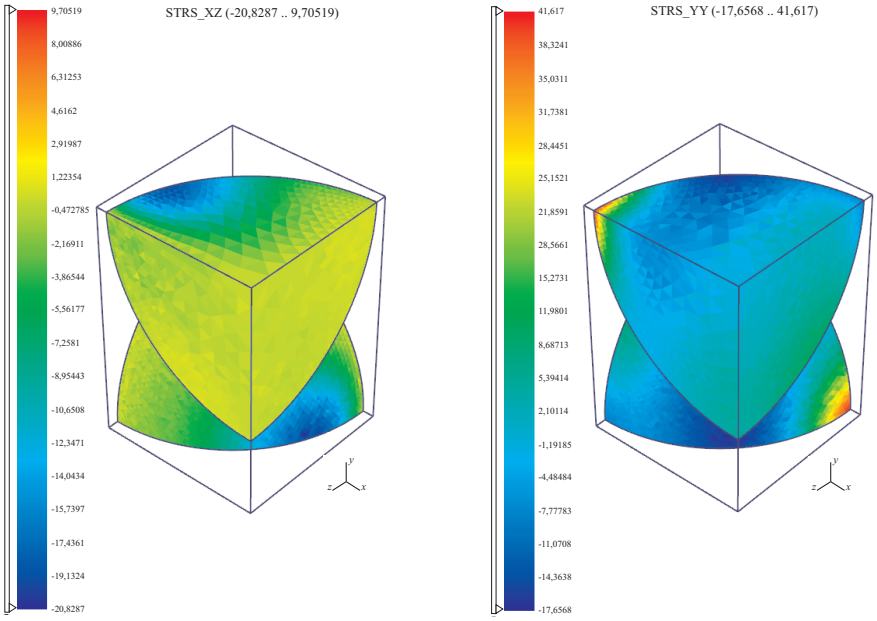


Рис. 2. Поля напряжений $\sigma_{13}^{(\alpha)}$ и $\sigma_{22}^{(\alpha)}$ в ячейке периодичности композита Al + SiC при растяжении в направлении оси $O\xi_1$

Пределы прочности при растяжении σ_T, сжатии σ_C и сдвиге σ_S связаны между собой следующими соотношениями:

$$\sigma_C > \sqrt{3}\sigma_S, \;\; \sigma_C > 0, \;\; \sigma_S > 0, \;\; \sigma_T < \sqrt{3}\sigma_S.$$

Константу B_1 выразим через пределы статической прочности при сжатии и сдвиге:

$$B = \left(\frac{\sigma_C^2}{3\sigma_S^2} - 1 \right) \frac{1}{\sigma_C}. \tag{9}$$

Функция $V(\sigma)$ в формуле (7) описывает гладкий переход накопления микроповреждений между областями растяжения и сжатия:

$$V(\sigma) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \sigma > 0, \\ -\sigma\,, & \text{если} \quad -\sigma_C < \sigma < 0, \\ \sigma_C, & \text{если} \quad \sigma < -\sigma_C. \end{cases} \tag{10}$$

Модель (7) с (10) позволяет учитывать эффект различия накопления микроповреждений в области растяжения и сжатия, характерный для большинства материалов.

Когда параметр микроповреждаемости z достигает значения единицы в некоторой точке некоторого компонента композита, происходит локальное микроразрушение компонента в этой точке. Из условия $z = 1$ и формулы (7) получим следующий критерий прочности материала (компонента) композита:

$$\frac{\sigma_u^2}{3\sigma_S^2(1 + B_1 V(\sigma_-))} + \left(\frac{1}{\sigma_T^2} - \frac{1}{3\sigma_S^2} \right) \sigma_+^2 = 1. \tag{11}$$

Согласно этому критерию, в области растяжении ($\sigma > 0$) поверхность прочности имеет эллипсоидальную форму:

$$\frac{\sigma_u^2}{3\sigma_S^2} + \left(\frac{1}{\sigma_T^2} - \frac{1}{3\sigma_S^2} \right) \sigma_+^2 = 1. \tag{12}$$

В области сжатия $(-\sigma_C < \sigma < 0)$ происходит увеличение предела прочности, критерий прочности принимает вид

$$\sigma_u^2 = 3\sigma_S^2 (1 + B\sigma). \tag{13}$$

В области «сверхсжатия» $(\sigma < -\sigma_C)$ поверхность прочности совпадает с поверхностью прочности по критерию Мизеса [23]:

$$\sigma_u^2 = \sigma_C^2. \tag{14}$$

По критерию Мизеса, при всестороннем сжатии, когда выполняется условие $\sigma_u = 0$, разрушения не происходит ни при каких значениях напряжений. При всестороннем растяжении, когда выполняют-

ся условия $\sigma > 0$, $\sigma_u = 0$, критерий прочности можно свести к уравнению

$$\sigma_+^2 = \left(\frac{1}{\sigma_T^2} - \frac{1}{3\sigma_S^2} \right)^{-1}. \tag{15}$$

Введем тензор четвертого ранга — тензор переменных модулей упругости

$$C(z,\omega)_{ijkl} = \left(K(z) - \frac{2}{3} G(z)(1-\omega) \right) \delta_{kl}\delta_{ij} + G(z)(1-\omega)(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}), \tag{16}$$

где δ_{ij} — символ Кронекера. Тогда определяющее соотношение (2) можно записать в псевдолинейном виде:

$$\sigma_{ij} = C(z,\omega)_{ijkl}\varepsilon_{kl}. \tag{17}$$

Применение метода асимптотического осреднения для упругопластических композитов с повреждаемостью. Пусть композиционный материал обладает периодической структурой, т. е. у него можно выделить ячейку периодичности (ЯП) V_ξ и ввести малый параметр $\kappa = l / L << 1$ как отношение характерного размера ЯП к характерному размеру всего композита, а также ввести безразмерные глобальные $x^k = \overline{x}^k / L$ и локальные $\xi^k = x^k / \kappa$ координаты. Положим, что матрица является связной областью. Обозначим через $V_{\alpha\xi}$ области в ЯП, соответствующие α-компоненту; через $\Sigma_{\xi\alpha N} = \Sigma_{\alpha N} \cap V_\xi$ — поверхности раздела матрицы и включений в ЯП.

В этом случае для периодической структуры может быть применен метод асимптотического осреднения [7–9], согласно которому решение задачи (1) для матрицы и включений можно построить в виде асимптотических разложений вида

$$\begin{aligned}
u_i^\alpha &= u_i^{(0)}(x^k) + \kappa u_i^{\alpha(1)}(x^k,\xi^l) + \kappa^2, ..., \\
\varepsilon_{ij}^\alpha &= \varepsilon_{ij}^{\alpha(0)}(x^k,\xi^l) + \kappa\varepsilon_{ij}^{\alpha(1)}(x^k,\xi^l) + \kappa^2, ..., \\
\sigma_{ij}^\alpha &= \sigma_{ij}^{\alpha(0)}(x^k,\xi^l) + \kappa\sigma_{ij}^{\alpha(1)}(x^k,\xi^l) + \kappa^2, ..., \\
z^\alpha &= z^{\alpha(0)}(x^k,\xi^l) + \kappa z^{\alpha(1)}(x^k,\xi^l) + \kappa^2, ...,
\end{aligned} \tag{18}$$

по аргументу ξ^l эти функции пологаем периодическими (рис. 3).

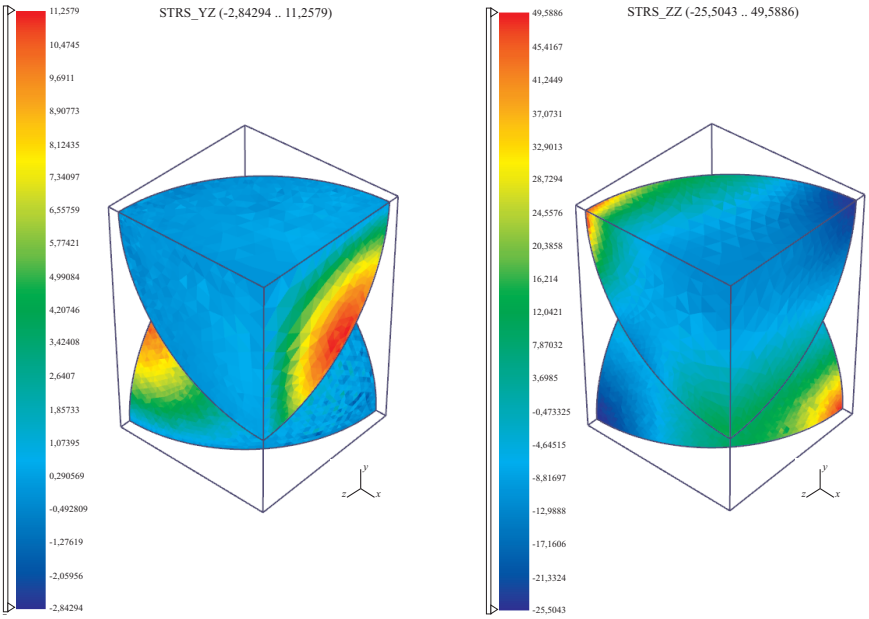


Рис. 3. Поле микронапряжений $\sigma_{23}^{(\alpha)}$ и $\sigma_{33}^{(\alpha)}$ в ЯП композита Al + SiC при растяжении в направлении оси $O\xi_1$

Деформации и напряжения нулевого уровня имеют следующий вид:

$$\varepsilon_{ij}^{\alpha(0)} = \overline{\varepsilon}_{ij} + \frac{1}{2}\left(u_{i/j}^{\alpha(1)} + u_{j/i}^{\alpha(1)}\right), \tag{19}$$

$$\overline{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j}^{(0)} + u_{j,i}^{(0)}\right), \tag{20}$$

$$\sigma_{ij}^{\alpha(0)} = \overset{\alpha}{_{ij}}\left(z^{\alpha(0)}, \varepsilon_{kl}^{\alpha(o)}\right), \text{ если } \xi^k \in V_{\alpha\xi}, \alpha = 1, ..., N, \tag{21}$$

где $u_{i/j}^{\alpha(1)} = \partial u_i^{\alpha(1)} / \partial \xi^j$ и $u_{i,j}^{(0)} = \partial u_i^{(0)} / \partial x^j$ — производные по двум типам координат. При выводе формул (19)–(21) и далее используем правило дифференцирования асимптотических разложений $\nabla_j f = f_{,j} + \frac{1}{\kappa} f_{/j}$.

Подставив выражения (18) в систему (1), применив правило дифференцирования и собрав члены при одинаковых степенях k, получим так называемую локальную задачу нулевого приближения на ЯП:

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{ij/j}^{\alpha(0)} = 0 \text{ в } V_\xi, \\
&\sigma_{ij}^{\alpha(0)} = F_{ij}^{\alpha}\left(z^{\alpha(0)}, \varepsilon_{kl}^{\alpha(0)}\right) \text{ в } V_\xi \cup \Sigma_s, \\
&\varepsilon_{ij}^{\alpha(0)} = \overline{\varepsilon}_{ij} + \frac{1}{2}\left(u_{i/j}^{\alpha(1)} + u_{j/i}^{\alpha(1)}\right) \text{ в } V_\xi, \\
&\left.\begin{aligned} &u_i^{\alpha(1)} = u_i^{N(1)}, \\ &\left(\sigma_{ij}^{\alpha(1)} - \sigma_{ij}^{N(1)}\right) n_j = 0 \end{aligned}\right\} \text{ на } \Sigma_{\xi\alpha N}, \\
&\left\langle u_i^{\alpha(1)} \right\rangle = 0, \left[\!\left[u_i^{\alpha(1)} \right]\!\right] = 0.
\end{aligned}
\tag{22}
$$

Здесь оператор осреднения обозначен $\left\langle u_i^{\alpha} \right\rangle = \sum_{\alpha=1}^{N} \int_{V_{\xi\alpha}} u_i^{\alpha} dV_\xi$. Условие $\left[\!\left[u_i^{\alpha} \right]\!\right] = 0$ — это условие периодичности функций на границе ячейки периодичности. Наличие условия $\left\langle u_i^{\alpha} \right\rangle = 0$ вызвано требованием единственности решения локальной задачи [7]. В силу периодичности функций $u_i^{\alpha(1)}$ имеет место соотношение

$$
\overline{\varepsilon}_{ij} = \left\langle \varepsilon_{ij}^{\alpha(0)} \right\rangle = \frac{1}{2}\left(u_{i,j}^{(0)} + u_{j,i}^{(0)}\right). \tag{23}
$$

Численный метод решения локальной задачи деформирования упругопластического материала с повреждаемостью. Для решения локальной задачи теории пластичности (22) с соотношениями (17) применим один из вариантов метода упругих решений, согласно которому, определяющее соотношение (17) линеаризуем с помощью итерационного алгоритма

$$
\sigma_{ij}^{\alpha(m)} = C^{\alpha}(z^{\alpha(m-1)},\ \omega^{\alpha(m-1)})_{ijkl}\, \varepsilon_{kl}^{\alpha(m)}, \tag{24}
$$

где $\sigma_{ij}^{\alpha(m)}$ и $\varepsilon_{kl}^{\alpha(m)}$ — значения напряжений $\sigma_{ij}^{\alpha(0)}$ и деформаций $\varepsilon_{ij}^{\alpha(0)}$ на m-м шаге итерационного цикла; $C_{ijkl}^{\alpha\ \{m-1\}} = C^{\alpha}(z^{\alpha(m-1)},\ \omega^{\alpha(m-1)})_{ijkl}$ — тензоры переменных модулей упругости компонентов композита на m-м шаге итерации (рис. 4).

Если в какой-либо точке параметр микроповреждаемости $z^{\alpha(m-1)}$ достигает значения единицы, то происходит микроразрушение в компоненте композита. При этом, согласно формулам (6) и (16), существенно снижаются все упругие модули $C^{\alpha}(z^{\alpha(m-1)}, \omega^{\alpha(m-1)})_{ijkl}$ в данной точке. После появления микроразрушения в ЯП возникает область $V_{d\xi}$ со сниженными упругими характеристиками. При увели-

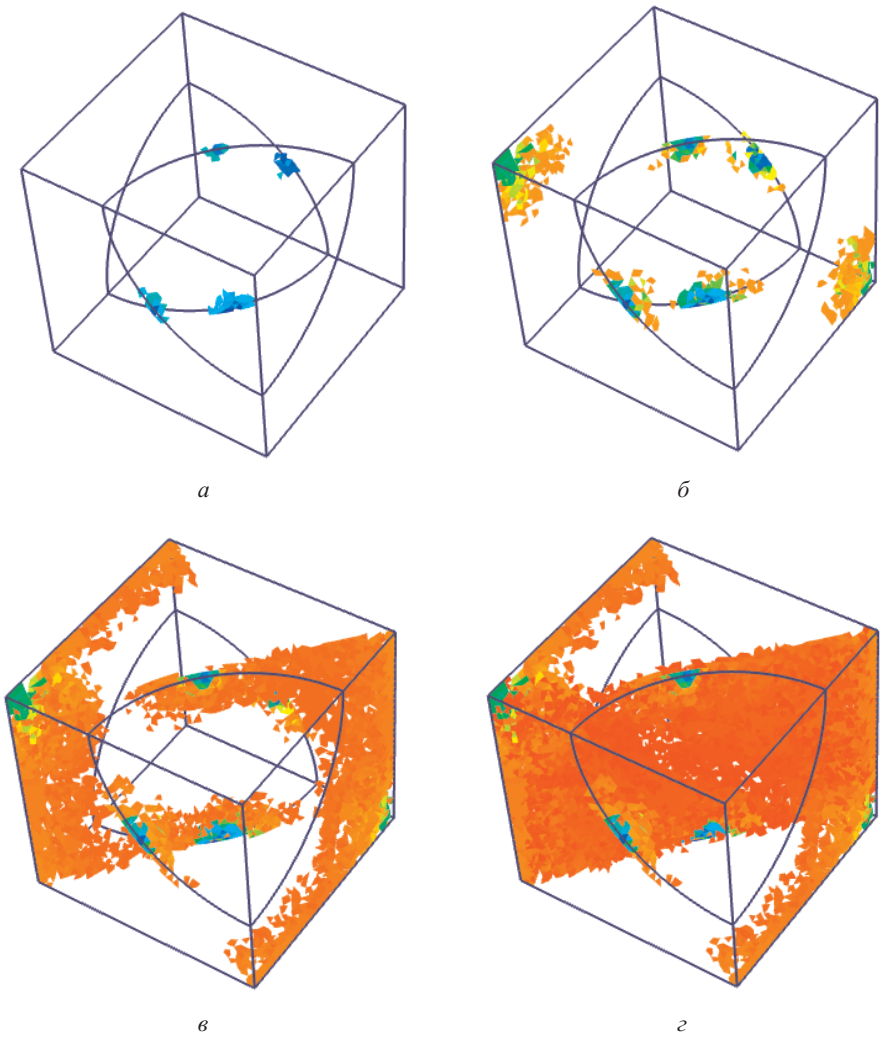


Рис. 4. Численное моделирование процесса распространения мезоповреждений в ЯП композита Al + SiC (27,5 % частиц SiC) при растяжении вдоль направления оси $O\xi_1$ (*а–г*)

чении значений средних деформаций $\overline{\varepsilon}_{ij}$ эта область увеличивается в размерах и происходит рост зоны микроразрушения $V_{d\xi}$. Назовем эту стадию мезоповреждаемостью композита. Рост зоны $V_{d\xi}$ продолжается до тех пор, пока не выполнится условие выхода области $V_{d\xi}$ как минимум на две противоположные поверхности ЯП: Σ_s и Σ'_s. Это предельное значение введем через $V_{d\xi}{}^*$. В этом случае происходит разрушение композита на мезоуровне — мезоразрушение. Макроразрушением композита обычно называют ситуацию, когда зона разру-

шения возникает не на уровне отдельной ЯП, а в масштабе L всего композита. Макроразрушение в данной работе не рассматривается.

Обозначим через $u_{ij}^{\alpha\{m\}}$ значения перемещений $u_{ij}^{\alpha(1)}$ на m-м шаге итерационного цикла. Тогда на m-м шаге итерации вместо задачи (22) получим линеаризованную задачу

$$\begin{cases} \sigma_{ij/j}^{\alpha\{m\}} = 0 \ \text{ в } \ \tilde{V}_\xi, \\ \sigma_{ij}^{\alpha\{m\}} = C_{ijkl}^{\alpha\ \{m-1\}} \varepsilon_{kl}^{\alpha\{m\}} \ \text{ в } \ \tilde{V}_\xi \cup \Sigma'_s \cup \Sigma_s, \\ \varepsilon_{ij}^{\alpha\{m\}} = \overline{\varepsilon}_{ij} + \dfrac{1}{2}\left(u_{i/j}^{\alpha\{m\}} + u_{j/i}^{\alpha\{m\}}\right) \ \text{ в } \ \tilde{V}_\xi, \\ \left.\begin{aligned} & u_i^{\alpha\{m\}} = u_i^{N\{m\}}, \\ & \left(\sigma_{ij}^{\alpha\{m\}} - \sigma_{ij}^{N\{m\}}\right) n_j = 0 \end{aligned}\right\} \ \text{ на } \ \tilde{\Sigma}_{\xi\alpha N}. \end{cases} \tag{25}$$

В качестве критерия выбора числа необходимых итераций используем условие достижения заданного значения Δ — относительного отклонения напряжений:

$$\max_{\alpha} \max_{\xi^k \in V_{\alpha\xi}} \frac{\sum\limits_{i,j} |\, \sigma_{ij}^{\alpha\{m\}}(\xi^k) - \sigma_{ij}^{\alpha\{m-1\}}(\xi^k)\,|}{\sum\limits_{i,j} |\, \sigma_{ij}^{\alpha\{m-1\}}(\xi^k)\,|} < \Delta. \tag{26}$$

Согласно предложенному в работе [12] методу решения линейных локальных задач (25), их решение при каждом значении m представляют в виде следующих сумм:

$$u_i^{\alpha\{m\}} = \sum_{p,q=1}^{3} u_{i(pq)}^{\alpha\{m\}}, \ \ \varepsilon_{ij}^{\alpha\{m\}} = \sum_{p,q=1}^{3} \varepsilon_{ij(pq)}^{\alpha\{m\}}, \ \ \sigma_{ij}^{\alpha\{m\}} = \sum_{p,q=1}^{3} \sigma_{ij(pq)}^{\alpha\{m\}},$$

$$\text{если } \xi^k \in V_{\alpha\xi}, \alpha = 1, ..., N. \tag{27}$$

Для функций $u_{i(pq)}^{\alpha\{m\}}$ для каждой комбинации индексов (pq) выделим линейную часть по локальным координатам:

$$u_{i(pq)}^{\alpha\{m\}} = -\overline{\varepsilon}_{pq}\left(\delta_{ip}\xi^q + \delta_{iq}\xi^p\right) + U_{i(pq)}^{\alpha\{m\}}(\xi^l), \tag{28}$$

где $U_{i(pq)}^{\alpha\{m\}}\left(\xi^i\right)$ — искомые функции, называемые псевдоперемещениями, для которых для каждой комбинации индексов (pq) получим задачу — линеаризованную локальную задачу L_{pq} на ячейке периодичности. Запишем ее следующим образом:

$$\begin{cases} \sigma_{ij(pq)/j}^{\alpha\{m\}} = 0 \text{ в } \tilde{V}_\xi, \\ \sigma_{ij(pq)}^{\alpha\{m\}} = C_{ijkl}^{\alpha\ \{m-1\}} \varepsilon_{ij(pq)}^{\alpha\{m\}} \text{ в } \tilde{V}_\xi \cup \Sigma'_s \cup \Sigma_s, \\ \varepsilon_{ij(pq)}^{\alpha\{m\}} = \dfrac{1}{2}\left(U_{i(pq)/j}^{\alpha\{m\}} + U_{j(pq)/i}^{\alpha\{m\}}\right) \text{ в } \tilde{V}_\xi, \\ \left.\begin{array}{l} U_{i(pq)}^{\alpha\{m\}} = U_{i(pq)}^{N\{m\}}, \\ \left(\sigma_{ij(pq)}^{\alpha\{m\}} - \sigma_{ij(pq)}^{N\{m\}}\right) n_j = 0 \end{array}\right\} \text{ на } \tilde{\Sigma}_{\xi\alpha N}. \end{cases} \tag{29}$$

Кроме того, присоединим к системе (29) условия на координатных $\left(\Sigma_s = \{\xi^s = 0\}\right)$ и на торцевых $\left(\Sigma'_s = \{\xi_s = 1/2\}\right)$ поверхностях ЯП при $s = 1,2,3$. Запишем их на Σ'_s.

При $(p = q)$ $U_{i(pq)}^{\alpha\{m\}} = 1/2\bar{\varepsilon}_{pq}\delta_{ip}$, $S_{j(pq)}^{\alpha} = 0$, $S_{k(pq)}^{\alpha} = 0$

$$\text{на } \Sigma'_i, \quad i \neq j \neq k \neq i, \tag{30}$$

при $(p \neq q)$ $U_{i(pq)}^{\alpha\{m\}} = (1/4)\bar{\varepsilon}_{ip}\delta_{ip}$, $S_{j(pq)}^{\alpha} = 0$, $U_{k(pq)}^{\alpha\{m\}} = 0$ на Σ'_j, $i, j = \{p, q\}$;

$$S_{i(pq)}^{\alpha} = 0, \ S_{j(pq)}^{\alpha} = 0, \ U_{k(pq)}^{\alpha\{m\}} = 0 \text{ на } \Sigma'_k, i \neq j \neq k \neq i,$$

а также

$$\text{при } (p = q) \ U_{i(pq)}^{\alpha\{m\}} = 0, \ S_{j(pq)}^{\alpha} = 0, \ S_{k(pq)}^{\alpha} = 0 \text{ на } \Sigma_i, i \neq j \neq k \neq i, \tag{31}$$

$$\text{при } (p \neq q) \ U_{i(pq)}^{\alpha\{m\}} = 0, S_{j(pq)}^{\alpha} = 0, \ U_{k(pq)}^{\alpha\{m\}} = 0 \text{ на } \Sigma_j, \ i, j = \{p, q\},$$

$$S_{i(pq)}^{\alpha} = 0, \ S_{j(pq)}^{\alpha} = 0, \ U_{k(pq)}^{\alpha\{m\}} = 0 \text{ на } \Sigma_k, \ i \neq j \neq k \neq i.$$

Здесь $S_{j(pq)}^{\alpha} = \sigma_{ij(pq)}^{\alpha\{m\}} n_j$, где n_j — вектор нормали.

Решение задачи (29)–(31) необходимо искать в области $\tilde{V}_\xi$, представляющей одну восьмую часть ЯП: $\tilde{V}_\xi = V_\xi \cap (\xi_i \geq 0)$, где $\tilde{\Sigma}_{\xi\alpha\beta}$ — поверхность контакта компонентов внутри $\tilde{V}_\xi$, следовательно, $\tilde{\Sigma}_{\xi\alpha\beta} = \Sigma_{\xi\alpha\beta} \cap \bar{V}_\xi$.

Для произвольного конечного объема $V \subset \tilde{V}_\xi$ вариационная формулировка задачи L_{pq} при фиксированных значениях p и q имеет вид

$$\int_V \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} \ dV = \int_\Sigma \delta\mathbf{U}^T \mathbf{S} d\Sigma. \tag{32}$$

Здесь обозначены координатные столбцы псевдоперемещений $\mathbf{U}$, напряжений $\boldsymbol{\sigma}$, деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}$ и поверхностных усилий $\mathbf{S}$, вычисляемые по формулам

$$\mathbf{U} = \left[U_{1(pq)}^{\alpha\{m\}}, U_{2(pq)}^{\alpha\{m\}}, U_{3(pq)}^{\alpha\{m\}}\right]^T,$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \left[\sigma_{11(pq)}^{\alpha\{m\}}, \sigma_{22(pq)}^{\alpha\{m\}}, \sigma_{33(pq)}^{\alpha\{m\}}, \sigma_{13(pq)}^{\alpha\{m\}} / \sqrt{2}, \quad \sigma_{23(pq)}^{\alpha\{m\}} / \sqrt{2}, \quad \sigma_{12(pq)}^{\alpha\{m\}} / \sqrt{2}\right]^T,$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \left[\varepsilon_{11(pq)}^{\alpha\{m\}}, \varepsilon_{22(pq)}^{\alpha\{m\}}, \varepsilon_{33(pq)}^{\alpha\{m\}}, \varepsilon_{13(pq)}^{\alpha\{m\}} / \sqrt{2}, \quad \varepsilon_{23(pq)}^{\alpha\{m\}} / \sqrt{2}, \quad \varepsilon_{12(pq)}^{\alpha\{m\}} / \sqrt{2}\right]^T, \tag{33}$$

$$\mathbf{S} = \left[S_{1(pq)}^{\alpha}, S_{2(pq)}^{\alpha}, S_{3(pq)}^{\alpha}\right]^T.$$

Линеаризованные определяющие соотношения (см. вторую группу уравнений в (29)) с использованием координатных столбцов записывают следующим образом: $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}$, где $\mathbf{C}$ — матрица упругости размером [6×6], составленная из компонентов тензора $C_{ijkl}^{\alpha\{m\}}$ стандартным образом [9].

Соотношения Коши (см. третью группу уравнений в (29)) в матричном виде записывают следующим образом: $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}\mathbf{U}$, где $\mathbf{D}$ — матрица линейных дифференциальных операторов дифференцирования [12]. Тогда вариационное уравнение (32) можно представить в виде

$$\int_V (\mathbf{D}\delta\mathbf{U})^T \mathbf{C}\mathbf{D}\mathbf{U} dV = \int_\Sigma \delta\mathbf{U}^T \mathbf{S} d\Sigma. \tag{34}$$

Аппроксимируем пседоперемещения $\mathbf{U}$ в конечном элементе (КЭ) линейными функциями $\mathbf{U} = \boldsymbol{\Phi}\mathbf{q}$, где $\boldsymbol{\Phi}$ — матрица функции формы, зависящая от типа КЭ; $\mathbf{q}$ — координатный столбец псевдоперемещений в узлах КЭ. В результате получим итоговую разрешающую систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$\mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{f}, \tag{35}$$

где $\mathbf{K}$ — локальная матрица жесткости; $\mathbf{f}$ — столбец правых частей.

Тогда

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{C}\mathbf{B} dV, \qquad f = \int_\Sigma \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{S} d\Sigma. \tag{36}$$

Здесь $\mathbf{B} = \mathbf{D}\boldsymbol{\Phi}$. Решив СЛАУ (35) для всей области $\tilde{V}_\xi$, найдем перемещения q в узлах, по которым вычислим псевдоперемещения $\mathbf{U} = \boldsymbol{\Phi}\mathbf{q}$, деформации $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{q}$ и напряжения $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{q}$ в каждом КЭ.

Для решения СЛАУ был применен метод сопряженных градиентов. В качестве конечного элемента был выбран четырехузловой тетраэдр, обеспечивающий линейную аппроксимацию псевдоперемещений $\mathbf{U}$ и приводящий к постоянным напряжениям $\boldsymbol{\sigma}$ в каждом КЭ (рис. 5).

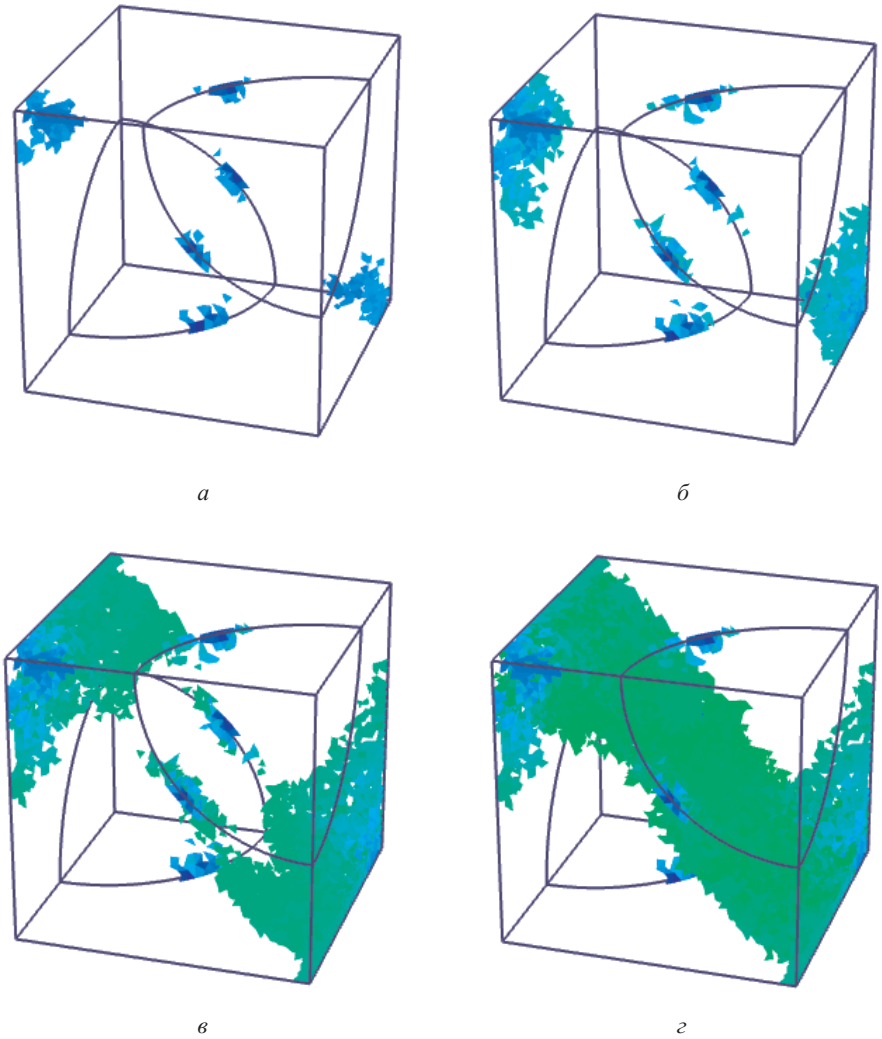


Рис. 5. Этапы численного моделирования процесса распространения мезоповреждений в ЯП композита Al + SiC (20 %) с учетом пластичности (*а–г*)

Каждая из указанных задач L_{pq} решена несколько раз. При заданных значениях деформаций $\overline{\varepsilon}_{pq}$ был осуществлен итерационный цикл решения соответствующей задачи до достижения условия сходимости решения согласно условию (26), где $\Delta = 0,01...0,001$. Число итераций $m = M$, обеспечивающее выполнение данного условия, для разных задач L_{pq} для разных значений $\overline{\varepsilon}_{pq}$ не превышало 10–15. Напряжения при максимальном значении номера итерации $m = M$ обозначены через $\sigma^{(\alpha)\{M\}}_{\beta\gamma(pq)}$.

Расчет эффективных упругопластических характеристик композиционного материала. После решения серии задач L_{pq} (29) для всех

pq предложенным численным методом проинтегрируем получившиеся напряжения $\sigma_{\beta\gamma(pq)}^{(\alpha)\{M\}}$ по областям, занятым включениями и матрицей:

$$\bar{\sigma}_{ij} = \left\langle \sigma_{ij}^{(\alpha)\{M\}} \right\rangle = \sum_{p,q=1}^{3} \left\langle \bar{\sigma}_{ij(pq)}^{(\alpha)\{M\}} \right\rangle. \tag{37}$$

В результате получим осредненные напряжения в композите.

Тогда эффективные упругопластические соотношения, связывающие осредненные напряжения и деформации $\bar{\sigma}_{ij}$ и $\bar{\varepsilon}_{pq}$, можно записать в следующем символическом операторном виде:

$$\bar{\sigma}_{ij} = \bar{F}_{ij}\left(\bar{z}, \bar{\varepsilon}_{pq}\right), \tag{38}$$

где $\bar{F}_{ij}\left(\bar{z}, \bar{\varepsilon}_{pq}\right)$ — оператор осредненных определяющих соотношений композита, значения которого находятся в процессе численных расчетов при различных значениях $\bar{\varepsilon}_{pq}$. Параметр $\bar{z}$ является индикатором наличия мезоповреждений в композите, его можно определить как $\bar{z} = V_{d\xi} / V_{d\xi}{}^{*}$.

Программная реализация численного метода осуществлена с использованием программной среды SMCM. Она разработана в Научно-образовательном центре «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов» (СИМПЛЕКС) МГТУ им. Н.Э. Баумана и предназначена для решения задач механики деформируемого твердого тела методом конечных элементов.

Моделирование процессов деформирования и повреждаемости композиционных материалов на основе алюминиевой матрицы и частиц SiC. В качестве примера были проведены численные расчеты микромеханических полей напряжений и деформаций в ЯП в композиционном материале на основе алюминиевого сплава, наполненного частицами SiC. Выше на рис. 1–3 были показаны результаты расчетов полей напряжений в ЯП этого композита при растяжении в направлении оси $O\xi_1$, а на рис. 4–5 — результаты численного моделирование процесса распространения мезоповреждений в ЯП композита Al + SiC при различных значениях концентрации частиц SiC при растяжении вдоль направления оси $O\xi_1$. Мезоразрушение упругопластического композита, как и хрупких композитов, начинается на границе раздела матрицы и наполнителей. Однако затем из-за наличия пластических деформаций дальнейшее распространение мезо-повреждений на границе раздела тормозится, появляется

вторая область мезоповреждений — в матрице на максимальном удалении от частиц наполнителя. Эти мезоповреждения при возрастании средних деформаций распространяются по всей ЯП под углом 45° к направлению действия растягивающей нагрузки. При определенных значениях деформации $\overline{\varepsilon}_{11}$ происходит полное мезоразрушение композита из-за образования сквозной зоны мезоповреждений.

Диаграммы деформирования композита Al+SiC при растяжении по направлению оси $O\xi_1$ вплоть до разделения на части при различных значениях концентрации наполнителя показаны на рис. 6.

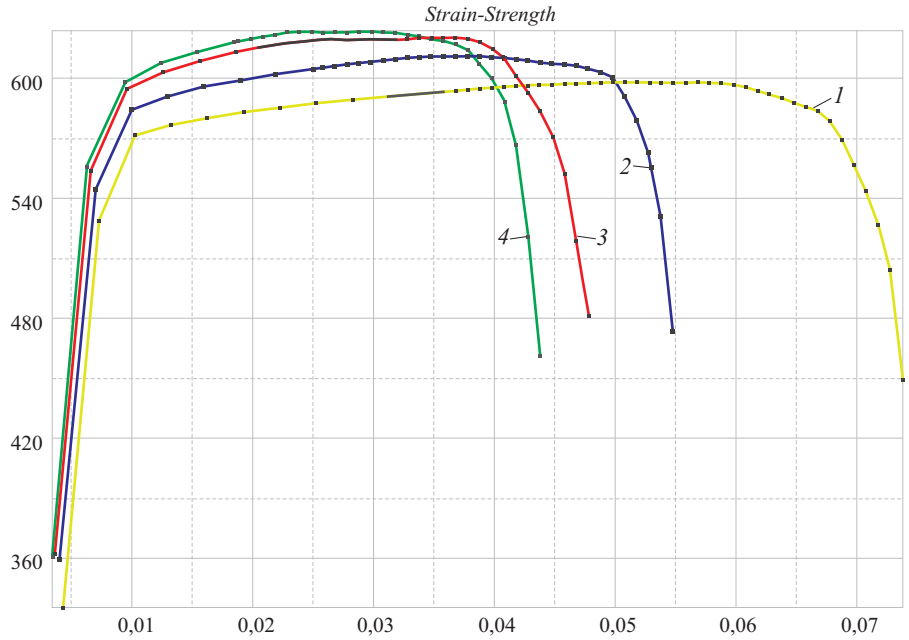


Рис. 6. Расчетные эффективные диаграммы деформирования композита Al + SiC с различным содержанием частиц SiC при растяжении:
1 — 10 %; *2* — 20 %; *3* — 27,5 %; *4* — 30 %

Установлено, что с повышением концентрации наполнителя с 10 до 30 % повышается и упрочнение материала. Кроме того, возрастает предельное значение растягивающего напряжения композита (рис. 7), его можно трактовать как прочность σ_T при растяжении композита.

Таким образом, разработанная модель деформирования и повреждаемости упругопластических композитов позволяет описать эффект повышения прочности композитов при увеличении содержания в них частиц хрупкого наполнителя. Модель упругого деформирования композита с повреждаемостью не описывает данный эффект. Отметим, что предельные деформации разрушения композита при растяжении уменьшаются с увеличением концентрации наполнителя, что обычно можно наблюдать в экспериментах.

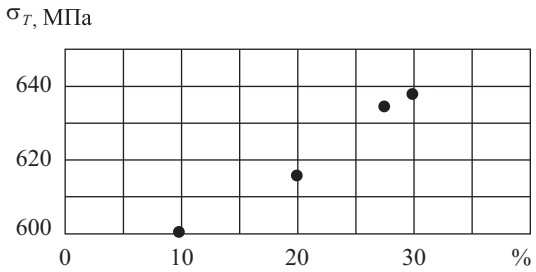


Рис. 7. Расчетная зависимость прочности при растяжении композита Al + SiC от содержания частиц SiC

Выводы. Предложена модель многомасштабного деформирования упругопластических композиционных материалов с учетом повреждаемости на микро- и мезоуровнях композита. Данная модель основана на варианте деформационной теории пластичности при активном нагружении с учетом микроповреждаемости, значения которой при растяжении и сжатии различны. Для моделирования деформирования упругопластических композитов применен метод асимптотической гомогенизации периодических структур. Для численного решения локальных задач упругопластичности с учетом повреждаемости на ячейке периодичности предложен вариант итерационного метода линеаризации, а для численного решения линеаризованных задач на ячейке периодичности — метод конечных элементов.

Проведено численное моделирование процесса деформирования и повреждаемости для дисперсно-армированного металлокомпозита на основе алюминиевой матрицы, наполненной частицами SiC. По его результатам можно сделать вывод, что разработанная модель позволяет описывать эффект повышения прочности при увеличении концентрации частиц армирующего наполнителя в определенном диапазоне значений концентраций.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №14- 19-00847).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Адамс Д.Ф. *Упругопластическое поведение композитов. Композиционные материалы. Т. 2: Механика композиционных материалов*. Москва, Мир, 1978, с. 196–241.

[2] Кристенсен Р.М. *Введение в механику композитов*. Москва, Мир, 1982, 336 с.

[3] Вильдеман В.Э., Соколкин Ю.В., Ташкинов А.А. *Механика неупругого деформирования и разрушения композиционных материалов*. Москва, Наука, 1997. 288 с.

[4] Nguyen B.N., Bapanapalli S.K., Kunc V., Phelps J.H., Tucker C.L. Prediction of the Elastic-Plastic Stress. Strain Response for Injection-Molded Long-Fiber Thermoplastics. *Journal of Composite Materials*, 2009, vol. 43, no. 3, pp. 217–246.

[5] Тарнопольский Ю.М., Жигун И.Г., Поляков В.А. *Пространственно-армированные композиционные материалы*. Москва, Машиностроение, 1987, 223 с.
[6] Bensoussan A., Lions J.L., Papanicolaou G. *Asymptotic analysis for periodic structures.* North-Holland, 1978.
[7] Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. *Осреднение процессов в периодических средах*. Москва, Наука, 1984, 352 с.
[8] Санчес-Паленсия Э. *Неоднородные среды и теория колебаний*. Москва, Мир, 1984, 472 с.
[9] Победря Б.Е. *Механика композиционных материалов*. Москва, Изд-во МГУ им. М.В. Ломоносова, 1984, 324 с.
[10] Manevitch L.I., Andrianov I.V., Oshmyan V.G. *Mechanics of Periodically Heterogeneous Structures*. Springer, 2002, 264 c.
[11] Khdir Y.K., Kanit T., Zaïri F., Naït-Abdelaziz M. Computational homogenization of elastic-plastic composites. *International Journal of Solids and Structures*, 2013, vol. 50, no. 18, pp. 2829–2835.
[12] Димитриенко Ю.И., Кашкаров А.И. Конечно-элементный метод для вычисления эффективных характеристик пространственно-армированных композитов. *Вестник МГТУ им. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2002, № 2, с. 95–108.
[13] Димитриенко Ю.И., Сборщиков С.В., Беленовская Ю.В., Анискович В.А., Перевислов С.Н. Моделирование микроструктурного разрушения и прочности керамических композитов на основе реакционно-связанного SiC. *Наука и образование: электронное научное издание.* 2013, № 11. DOI 10.7463/1113.0659438
[14] Димитриенко Ю.И., Яковлев Н.О., Ерасов В.С., Федонюк Н.Н., Сборщиков С.В., Губарева Е.А., Крылов В.Д., Григорьев М.М., Прозоровский А.А. Разработка многослойного полимерного композиционного материала с дискретным конструктивно-ортотропным заполнителем. *Композиты и наноструктуры*, 2014, т. 6, № 1, с. 32–48.
[15] Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Сборщиков С.В., Федонюк Н.Н. Моделирование вязкоупругих характеристик слоисто-волокнистых полимерных композиционных материалов. *Наука и образование: научное электронное издание*, 2014, № 11. DOI 10.7463/1114.0734246
[16] Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Сборщиков С.В. Конечно-элементное моделирование эффективных вязкоупругих свойств однонаправленных композиционных материалов. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 2, с. 28–49.
[17] Димитриенко Ю.И., Яковлев Д.О. Асимптотическая теория термоупругости многослойных композитных пластин. *Механика композиционных материалов и конструкций*, 2014, т. 20, № 2, 259–282 с.
[18] Димитриенко Ю.И. Метод многоуровневой гомогенизации иерархических периодических структур. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2002, № 1, с. 58–73.
[19] Dimitrienko Yu.I., Dimitrienko I.D. Simulation of local transfer in periodic porous media. *European Journal of Mechanics — B/Fluids*, 2013, vol. 37, pp. 174–179.
[20] Dimitrienko Yu.I., Dimitrienko I.D., Sborschikov S.V. Multiscale Hierarchical Modeling of Fiber Reinforced Composites by Asymptotic Homogenization Method. *Applied Mathematical Sciences*, 2015, vol. 9, no. 145, pp. 7211–7220. Available at: http://www.m-hikari.com/ams/ams-2015/ams-145-148-2015/p/dimitrienkoAMS145-148-2015.pdf

[21] Димитриенко Ю.И., Кашкаров А.И., Макашов А.А. Конечно-элементный расчет эффективных упругопластических характеристик композитов на основе метода асимптотического осреднения. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2007, № 1, с. 102–116.
[22] Talreja R., ed. *Damage Mechanics of Composite Materials.* Oxford, Elsevier Science, 1994.
[23] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. Т. 4: Основы механики твердого тела.* Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013, 624 с.
[24] Димитриенко Ю.И. *Тензорное исчисление.* Москва, Высшая школа, 2001, 575 с.

Статья поступила в редакцию 18.05.2016

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:
Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Сборщиков С.В. Многомасштабное моделирование упругопластических композитов с учетом повреждаемости. *Математическое моделирование и численные методы*, 2016, № 2(10), с. 3–23.

Димитриенко Юрий Иванович окончил МГУ им. М.В. Ломоносова. Д-р физ.-мат. наук, директор Научно-образовательного центра СИМПЛЕКС МГТУ им. Н.Э. Баумана, заведующий кафедрой «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, действительный член Академии инженерных наук. Автор более 330 научных работ в области механики сплошных сред, вычислительной механики, газодинамики, механики и термомеханики композитов, математического моделирования в науке о материалах.
e-mail: dimit.bmstu@gmail.com

Губарева Елена Александровна окончила МГУ им. М.В. Ломоносова. Канд. физ.-мат. наук, доцент, заместитель заведующего кафедрой «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 40 научных работ в области механики сплошных сред, механики контактного взаимодействия, математического моделирования, механики композитов.
e-mail: elena.a.gubareva@yandex.ru

Сборщиков Сергей Васильевич окончил МГТУ им. Н.Э. Баумана. Младший научный сотрудник Научно-образовательного центра СИМПЛЕКС МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор 26 научных работ в области численного моделирования в механике композитов.

Multiscale modeling of elastic-plastic composites with an allowance for fault probability

© Yu.I. Dimitrienko, E.A. Gubareva, S.V. Sborshchikov

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

The purpose of this article is to propose a model of deformation of elastic-plastic composite materials with periodic structures with an allowance for fault probability of the composite phases. The model is based on a variant of the deformation theory of plasticity with the active loading. To simulate the effective characteristics of elastic-plastic composites, we applied the method of asymptotic homogenization of periodic structures. For numerical

solution of linearized problems on the periodicity cell we offered the finite elements method using SMCM software medium developed at the Scientific-Educational Center of Supercomputer Engineering Modeling and Program Software Development of the Bauman Moscow State Technical University. We provide the research with the examples of numerical computations for dispersion-reinforced metal composites (aluminum matrix filled with SiC particles). Finally, we present the results of numerical modeling of deformation processes, damage accumulation and metal-composite destruction.

Keywords: *numerical modeling, composites, method of asymptotic homogenization, elastic-plastic materials, composite destruction, finite elements method, local problems, periodicity cell, aluminum matrix, SiC particles.*

REFERENCES

[1] Adams D.F. *Uprugoplasticheskoe povedenie kompozitov. Kompozitsionnye materialy. T. 2: Mekhanika kompozitsionnykh materialov* [Elastic-plastic behavior of composites. Composite materials. Vol. 2: Mechanics of composite materials]. Moscow, Mir Publ., 1978, pp. 196–241.

[2] Kristensen R.M. *Vvedenie v mekhaniku kompozitov* [Introduction to mechanics of composites]. Moscow, Mir Publ., 1982, 336 p.

[3] Vildeman V.E., Sokolkin Yu.V., Tashkinov A.A. *Mekhanika neuprugogo deformirovaniya i razrusheniya kompozitsionnykh materialov* [Mechanics of inelastic deformation and destruction of composite materials]. Moscow, Nauka Publ., 1997, 288 p.

[4] Nguyen B.N., Bapanapalli S.K., Kunc V., Phelps J.H., Tucker C.L. *Journal of Composite Materials*, 2009, vol. 43, no. 3, pp. 217–246.

[5] Tarnopolskiy Yu.M., Zhigun I.G., Polyakov V.A. *Prostranstvenno-armirovannye kompozitsionnye materialy* [Space-reinforced composite materials]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1987, 223 p.

[6] Bensoussan A., Lions J.L., Papanicolaou G. *Asymptotic analysis for periodic structures*. North-Holland, 1978.

[7] Bakhvalov N.S., Panasenko G.P. *Osrednenie protsessov v periodicheskikh sredakh* [Process averaging in periodic media]. Moscow, Nauka Publ., 1984, 352 p.

[8] Sanches-Palensiya E. *Neodnorodnye sredy i teoriya kolebaniy* [Nonhomogeneous media and vibration theory]. Moscow, Mir Publ., 1984, 472 p.

[9] Pobedrya B.E. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov* [Mechanics of composite materials]. Moscow, Lomonosov MSU Publ., 1984, 324 p.

[10] Manevitch L.I., Andrianov I.V., Oshmyan V.G. *Mechanics of Periodically Heterogeneous Structures*. Springer, 2002, 264 p.

[11] Khdir Y.K., Kanit T., Zaïri F., Naït-Abdelaziz M. *International Journal of Solids and Structures*, 2013, vol. 50, no. 18, pp. 2829–2835.

[12] Dimitrienko Yu.I., Kashkarov A.I. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Seria Estestvennye nauki — Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series: Natural Sciences*, 2002, no. 2, pp. 95–108.

[13] Dimitrienko Yu.I., Sborshchikov S.V., Belenovskaya Yu.V., Aniskovich V.A., Perevislov S.N. *Science and Education*, 2013, no. 11. DOI 10.7463/1113.0659438

[14] Dimitrienko Yu.I., Yakovlev N.O., Erasov V.S., Fedonyuk N.N., Sborshchikov S.V., Gubareva E.A., Krylov V.D., Grigoryev M.M., Prozorovskiy A.A. *Kompozity i nanostruktury — Composites and Nanostructures*, 2014, vol. 6, no. 1, pp. 32–48.

[15] Dimitrienko Yu.I., Gubareva E.A., Sborshchikov S.V., Fedonyuk N.N. *Science and Education*, 2014, no. 11. DOI 10.7463/1114.0734246

[16] Dimitrienko Yu.I., Gubareva E.A., Sborshchikov S.V. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody — Mathematical Modeling and Computational Methods,* 2014, no. 2, pp. 28–49.
[17] Dimitrienko Yu.I., Yakovlev D.O. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsiy — Mechanics of Composite Materials and Structures*, 2014, vol. 20, no. 2, pp. 259–282.
[18] Dimitrienko Yu.I. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Seria Estestvennye nauki — Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series: Natural Sciences*, 2002, no. 1, pp. 58–73.
[19] Dimitrienko Yu.I., Dimitrienko I.D. *European Journal of Mechanics — B/Fluids*, 2013, vol. 37, pp. 174–179.
[20] Dimitrienko Yu.I., Dimitrienko I.D., Sborshchikov S.V. *Applied Mathematical Sciences*, 2015, vol. 9, no. 145, pp. 7211–7220. Available at: http://www.m-hikari.com/ams/ams-2015/ams-145-148-2015/p/dimitrienkoAMS145-148-2015.pdf
[21] Dimitrienko Yu.I., Kashkarov A.I., Makashov A.A. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Seria Estestvennye nauki — Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series: Natural Sciences*, 2007, no. 1, pp. 102–116.
[22] Talreja R., ed. *Damage Mechanics of Composite Materials.* Oxford, Elsevier Science, 1994.
[23] Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika sploshnoy sredy. T. 4: Osnovy mekhaniki tverdogo tela* [Continuum Mechanics. Vol. 4: Fundamentals of solid mechanics]. Moscow, BMSTU Publ., 2013, 624 p.
[24] Dimitrienko Yu.I. *Tenzornoe ischislenie* [Tensor calculus]. Moscow, Vysshaya shkola, 2001, 575 p.

Dimitrienko Yu.I. graduated from Lomonosov Moscow State University in 1984. Dr. Sci. (Phys. & Math.), Professor, Head of the Computational Mathematics and Mathematical Physics Department at the Bauman Moscow State Technical University, Director of Scientific-Educational Center of Supercomputer Engineering Modeling and Program Software Development of the Bauman Moscow State Technical University. Member of the Russian Academy of Engineering Science. Author of over 300 publications in the field of continuum mechanics, computational mechanics, gasdynamics, mechanics and thermomechanics of composite materials, mathematical modeling in material science. e-mail: dimit.bmstu@gmail.com

Gubareva E.A. graduated from Lomonosov Moscow State University. Cand. Sci. (Phys. & Math.), Assoc. Professor, Deputy Head of the Computational Mathematics and Mathematical Physics Department at the Bauman Moscow State Technical University. Author of over 40 publications in the field of continuum mechanics, contact mechanics, mathematical modeling, mechanics of composites. e-mail: elena.a.gubareva@yandex.ru

Sborshchikov S.V. graduated from Bauman Moscow State Technical University. Junior Research Scientist of Scientific-Educational Center of Supercomputer Engineering Modeling and Program Software Development of the Bauman Moscow State Technical University. Author of over 26 publications in the field of numerical modeling in mechanics of composites.