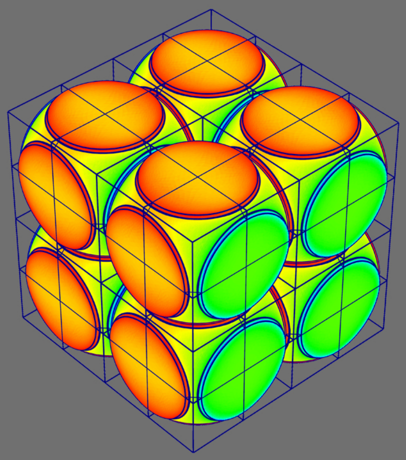
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Чуев В. Ю., Дубограй И. В. Модели двусторонних боевых действий многочисленных группировок. Математическое моделирование и численные методы, 2016, №1 (9), с. 89-104

УДК 519.8

Модели двусторонних боевых действий многочисленных группировок

© В.Ю. Чуев, И.В. Дубограй

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

На основе теории марковских процессов разработаны модели «плохо организованного» боя. Получены расчетные формулы для вычисления его основных показателей при различной начальной численности противоборствующих сторон. Проведено сравнение результатов моделирования боя при использовании вероятностных и детерминированных моделей. Установлено, что на ошибки моделей динамики средних влияет в первую очередь соотношение сил противоборствующих сторон в начале боя. Показано существенное влияние упреждающего удара одной из сторон на основные показатели боя в противостоянии близких по силам группировок и его незначительное влияние, если одна из противоборствующих сторон имеет в начале боя большое преимущество. Также показано увеличение влияния упреждающего удара на ожидаемые потери более сильной стороны и уменьшение его влияния на ожидаемые потери более слабой стороны при пропорциональном увеличении численности участвующих в бою группировок.

Ключевые слова: *боевые единицы, эффективная скорострельность, марковские процессы, параметр соотношения сил, модели двусторонних боевых действий.*

Введение. При создании новых образцов различных технических устройств возникает задача построения математической модели их функционирования [1−6]. Важнейшими характеристиками систем вооружения и военной техники являются показатели их боевой эффективности, позволяющие дать количественную оценку степени их приспособленности к решению поставленных боевых задач. В качестве такой оценки целесообразно выбрать модель двусторонних боевых действий, так как она позволяет более полно учесть технические параметры систем вооружения, влияющие на эффективность в реальных боевых условиях, в отличие от модели без учета ответного огня [7−13].

Одним из возможных способов описания процесса боевых действий многочисленных группировок является метод динамики средних. К достоинствам этого метода относятся простота, возможность учета многих факторов (точности стрельбы, практической скорострельности, защищенности от огня противника и т. д.), наличие аналитических решений [14, 15].

Построение модели боя на основе метода динамики средних основано на следующих допущениях. Согласно закону больших чисел, количественные составы сохранившихся боевых единиц противоборствующих сторон в каждый момент времени близки к средним (математическим ожиданиям), что дает возможность не рассматривать подробности, связанные со случайным состоянием отдельно взятой боевой единицы (поражена или нет), и рассматривать процесс боевых действий как детерминированный [2, 7]. При этом допущении все показатели боя (расход боеприпасов, время протекания боя и т. д.) также не будут случайными величинами — их заменят соответствующие математические ожидания.

Последовательность выстрелов, осуществляемая каждой боевой единицей, представляется в виде пуассоновского потока событий [3, 9]. Используется также прием, заключающийся в переходе от потока выстрелов к потоку успешных выстрелов, который тоже считается пуассоновским [10]. Выстрел называется успешным, если поражает боевую единицу противника [11, 12].

Другим возможным способом отображения боевых действий является применение теории непрерывных марковских процессов [1]. Процесс, протекающий в системе, называется марковским, если для каждого момента времени вероятность любого состояния системы в будущем зависит только от ее состояния в настоящий момент и не зависит от того, каким образом система пришла в это состояние [5]. Поток выстрелов и поток успешных выстрелов, осуществляемые каждой участвующей в бою единицей, также считаются пуассоновскими.

Вероятностные модели двусторонних боевых действий значительно сложнее моделей динамики средних: их сложность существенно возрастает с ростом начальных составов противоборствующих группировок. Однако, учитывая стохастический характер протекания боя, они позволяют исследовать его со значительно большей степенью точности и полноты, чем модели динамики средних.

Вероятностные модели двусторонних боевых действий также позволяют исследовать приемлемость использования метода динамики средних о возможности замены фактически сохранившихся в каждый момент времени численных составов противоборствующих группировок их математическими ожиданиями.

Описание боя при одновременном открытии огня противоборствующими сторонами. Рассмотрим модель так называемого плохо организованного боя, известную в литературе как модель Ланчестера [10]. Исследуем бой двух группировок — X и Y. Сторона X имеет в начале боя m однотипных боевых единиц, сторона Y — n однотипных боевых единиц, необязательно того же рода, что и боевые единицы стороны X.

Полагаем, что каждая боевая единица стороны X может стрелять по любой боевой единице противника, и наоборот, одним выстрелом нельзя поразить более одной единицы противника. Также считаем, что информация о состоянии боевых единиц противника (поражены или нет) не поступает, перенос огня с пораженных целей не осуществляется и огонь равномерно ведется как по уцелевшим, так и по уничтоженным единицам противника.

Введем следующие обозначения: p_X, p_Y — вероятность поражения боевой единицы противника одним выстрелом сторон X и Y соответственно; λ_X, λ_Y — практическая скорострельность боевых единиц сторон X и Y; $v = p_X\lambda_X; u = p_Y\lambda_Y$ — эффективная скорострельность боевых единиц сторон X и Y соответственно.

Полагая, что в любой момент времени боя суммарная боевая мощь каждой группировки пропорциональна не самомỳ случайному числу сохранившихся боевых единиц, а его среднему значению (математическому ожиданию), а также считая, что стороны X и Y начинают боевые действия одновременно, получаем следующую систему уравнений для отображения процесса боевых действий [2]:

$$\begin{cases} x' = -u\dfrac{xy}{n}; \\ y' = -v\dfrac{xy}{m} \end{cases} \tag{1}$$

с начальными условиями

$$x(0) = m; \, y(0) = n. \tag{2}$$

При постоянной в ходе боя эффективной скорострельности боевых единиц сторон, т. е. при $v = \text{const}, u = \text{const}$, приведенном времени $\overline{t} = \sqrt{uv}t$ и параметре соотношения сил $æ = \dfrac{n}{m}\sqrt{\dfrac{u}{v}}$ [4] решение системы (1) примет вид

$$\begin{cases} x = m\dfrac{æ - \dfrac{æ^{-1}}{æ}}{æe^{\left(æ-\frac{1}{æ}\right)\overline{t}} - \dfrac{æ^{-1}}{æ}}; \\ y = \dfrac{\dfrac{æ^{-1}}{æ} - æ}{\dfrac{æ^{-1}}{æ}e^{\left(\frac{1}{æ}-æ\right)\overline{t}} - æ} \quad \text{при } æ \neq 1; \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{m}{1+\overline{t}}; \\ y = \dfrac{n}{1+\overline{t}} \quad \text{при } æ = 1. \end{cases} \tag{4}$$

Будем считать, что бой ведется до полного уничтожения одной из противоборствующих сторон, т. е. $x_k = 0$ или $y_k = 0$, где x_k и y_k — математические ожидания количества сохранившихся к концу столкновения боевых единиц сторон X и Y соответственно.

Будем также считать, что при условии

$$\begin{cases} x_k > 0; \\ y_k = 0 \end{cases}$$

победу одержит сторона X, а при условии

$$\begin{cases} x_k = 0; \\ y_k > 0 \end{cases}$$

— сторона Y.

Получаем, что при $æ < 1$ победу одержит сторона X, при этом

$$\begin{cases} x_k = m\left(1 - æ^2\right); \\ y_k = 0, \end{cases} \tag{5}$$

а в случае $æ > 1$ победу одержит сторона Y, при этом

$$\begin{cases} x_k = 0; \\ y_k = y_0\left(1 - \dfrac{1}{æ^2}\right). \end{cases} \tag{6}$$

Полное уничтожение более слабой стороны за конечное время не достигается. При $æ = 1$ не выполняется условие победы ни одной из противоборствующих сторон.

При использовании вероятностной модели динамика боя описывается системой уравнений [8]:

$$\begin{aligned}
&F'_{0j}(t) = \frac{ju}{m} F_{1j}(t),\ j = \overline{1, n}; \\
&F'_{i0}(t) = \frac{iv}{n} F_{i1}(t),\ i = \overline{1, m}; \\
&F'_{ij}(t) = -\frac{ij}{mn}\left(mv + nu\right) F_{ij}(t) + \frac{ijv}{n} F_{i,j+1}(t) + \frac{iju}{m} F_{i+1,j}(t), \\
&i = \overline{1, m-1};\ j = \overline{1, n-1}; \\
&F'_{in}(t) = -\frac{i}{m}\left(mv + nu\right) F_{in}(t) + \frac{inu}{m} F_{i+1,n}(t),\ i = \overline{1, m-1}; \\
&F'_{mj}(t) = -\frac{j}{n}\left(mv + nu\right) F_{mj}(t) + \frac{jmv}{n} F_{m,j+1}(t),\ j = \overline{1, n-1}; \\
&F'_{mn}(t) = -\left(mv + nu\right) F_{mn}(t)
\end{aligned} \tag{7}$$

с начальными условиями

$$\begin{cases} F_{mn}(0)=1; \\ F_{ij}(0)=0 \text{ при } i+j<m+n, \end{cases} \qquad (8)$$

где $F_{ij}(t)$ — вероятность того, что в момент времени t сохранилось i единиц стороны X и j единиц стороны Y (вероятность состояния $i:j$ в момент времени t); $F'_{ij}(t)$ — ее производная по времени.

При постоянной эффективной скорострельности боевых единиц сторон формулы для вычисления окончательных состояний (при $t\to\infty$) имеют следующий вид [8]:

$$F_{10}(\infty)=C_{m+n-2}^{n-1}\frac{(mv)^n(nu)^{m-1}}{(mv+nu)^{m+n-1}};$$

....

$$F_{i0}(\infty)=C_{m+n-i-1}^{n-1}\frac{(mv)^n(nu)^{m-i}}{(mv+nu)^{m+n-i}};$$

....

$$F_{m0}(\infty)=\frac{(mv)^n}{(mv+nu)^n};$$

$$F_{01}(\infty)=C_{m+n-2}^{m-1}\frac{(mv)^{n-1}(nu)^m}{(mv+nu)^{m+n-1}}; \qquad (9)$$

....

$$F_{0j}(\infty)=C_{m+n-j-1}^{m-1}\frac{(mv)^{n-j}(nu)^m}{(mv+nu)^{m+n-j}};$$

....

$$F_{0n}(\infty)=\frac{(nu)^m}{(mv+nu)^m};$$

$$F_{ij}(\infty)=0 \text{ при } i,j\neq 0,$$

где $C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ — коэффициенты бинома Ньютона.

Изменение основных показателей боя при упреждающем ударе одной из противоборствующих сторон. Исследуем влияние упреждающего удара одной из противоборствующих сторон на ход протекания боя и его основные показатели. Пусть в течение времени t_c (или приведенного времени $\overline{t_c} = \sqrt{uv} t_c$) сторона X ведет огонь по противнику, не испытывая ответного противодействия. Тогда при $t \in [0; t_c]$ ход протекания боя, согласно методу динамики средних, можно описать системой уравнений

$$\begin{cases} x' = 0; \\ y' = -\dfrac{vm}{n} y \end{cases} \tag{10}$$

с начальными условиями (2).

В момент времени t_c открытия стороной Y ответного огня имеем:

$$\begin{cases} x(t_c) = m; \\ y(t_c) = ne^{-\frac{vm}{n} t_c} = ne^{-\frac{\overline{t_c}}{æ}} = y_1. \end{cases} \tag{11}$$

Если в момент открытия стороной Y ответного огня сторона X не имеет информации о состоянии боевых единиц противника и продолжает вести равномерный огонь как по уцелевшим, так и по уничтоженным во время упреждающего удара единицам противника, дальнейшее протекание боя описывается системой уравнений (1) с начальными условиями (11).

Решением этой системы является

$$\begin{cases} x = m \dfrac{æ_1 - \dfrac{æ^{-1}}{æ}}{æ_1 e^{\left(æ_1 - \frac{1}{æ}\right)\overline{t_1}} - \dfrac{æ^{-1}}{æ}}; \\ y = n \dfrac{\dfrac{æ^{-1}}{æ} - æ_1}{\dfrac{æ_1^{-1}}{æ_1} e^{\left(\frac{1}{æ} - æ_1\right)\overline{t_1}} - æ} \end{cases} \tag{12}$$

при $æ, æ_1 \neq 1$ или $æ \neq e^{\frac{\overline{t_c}}{2æ}}$ и

$$\begin{cases} x = \dfrac{m}{æ_1 \bar{t}_1 + 1}; \\ y = \dfrac{n e^{-\frac{\bar{t}_c}{æ}}}{æ_1 \bar{t}_1 + 1} \end{cases} \tag{13}$$

при $æ = e^{\frac{\bar{t}_c}{2æ}}$, где $æ_1 = æ e^{-\frac{\bar{t}_c}{æ}}$; $\bar{t}_1 = \bar{t} - \bar{t}_c$.

При $æ < e^{\frac{\bar{t}_c}{2æ}}$ победу одержит сторона X. При этом

$$\begin{cases} x_k = m\left(1 - ææ_1\right) = m\left(1 - æ^2 e^{-\frac{\bar{t}_c}{æ}}\right); \\ y_k = 0. \end{cases} \tag{14}$$

При $æ > e^{\frac{\bar{t}_c}{2æ}}$ победу одержит сторона Y. При этом

$$\begin{cases} x_k = 0; \\ y_k = y_1\left(1 - \dfrac{1}{ææ_1}\right) = y_0\left(e^{-\frac{\bar{t}_c}{æ}} - \dfrac{1}{æ^2}\right). \end{cases} \tag{15}$$

Полное уничтожение более слабой стороны за конечное время также не достигается. При $æ = e^{\frac{\bar{t}_c}{2æ}}$ не выполняется условие победы ни одной из противоборствующих сторон.

При использовании вероятностной модели получаем, что при $t \in \left[0; t_c\right]$ динамика боя описывается следующими уравнениями:

$$F'_{m0}(t) = \frac{mv}{n} F_{m1}(t);$$

$$F'_{m1}(t) = -\frac{mv}{n} F_{m1}(t) + \frac{2mv}{n} F_{m2}(t);$$

....

$$F'_{mj}(t) = -\frac{jmv}{n} F_{mj}(t) + \frac{(j+1)mv}{n} F_{m;\ j+1}(t); \tag{16}$$

....

$$F'_{m;n-1}(t) = -\frac{(n-1)mv}{n} F_{m;n-1}(t) + mvF_{mn}(t);$$
$$F'_{mn}(t) = -mvF_{mn}(t);$$
$$F'_{ij}(t) = 0$$

при $0 \le i \le m-1; 0 \le j \le n$ с начальными условиями (2).

В момент времени t_c открытия стороной Y ответного огня имеем:

$$\begin{gathered} F_{m0}(t_c) = (1-b)^n = d_0; \\ F_{m1}(t_c) = nb(1-b)^{n-1} = d_1; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F_{mj}(t_c) = C_n^j b^j (1-b)^{n-j} = d_j; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F_{m;n-1}(t_c) = nb^{n-1}(1-b) = d_{n-1}; \\ F_{mn}(t_c) = b^n = d_n; \\ F_{ij}(t_c) = 0 \end{gathered} \tag{17}$$

при $0 \le i \le m-1; 0 \le j \le n,$ где $b = e^{-\frac{mv}{n}t_c} = e^{-\frac{\overline{t_c}}{æ}};$ $\overline{t_c} = \sqrt{uv}t_c;$ $C_n^j = \frac{n!}{j!(n-j)!}.$

Вычислим математическое ожидание количества сохранившихся боевых единиц стороны Y в момент времени t_c:

$$M_y(t_c) = \sum_{j=1}^{n} jF_{mj}(t_c) = \sum_{j=1}^{n} jC_n^j b^j (1-b)^{n-j} = \sum_{j=1}^{n} j\frac{n!}{j!(n-j)!} b^j (1-b)^{n-j} =$$
$$= \sum_{j=1}^{n} nb \frac{(n-1)!}{(j-1)!(n-j)!} b^{j-1} (1-b)^{n-j} = \left\{ \begin{matrix} i = j-1 \\ j = i+1 \end{matrix} \right\} =$$
$$= nb\sum_{i=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{i!(n-i-1)!} b^i (1-b)^{n-i-1} = nb\sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i b^i (1-b)^{n-i-1} = ne^{-\frac{mv}{n}t_c} = ne^{-\frac{\overline{t_c}}{æ}}.$$

Приходим к выводу, что математические ожидания количества сохранившихся к моменту открытия стороной Y ответного огня ее боевых единиц, полученные на основе модели динамики средних и вероятностной модели, равны между собой.

Дальнейшее протекание боя описывается системой уравнений (7) с начальными условиями (16). При постоянной эффективной скорострельности боевых единиц сторон формулы для вычисления окончательных состояний примут следующий вид:

$$F_{10}(\infty)=\sum_{j=1}^{n} d_j C_{m+j-2}^{m-1}\frac{(mv)^j (nu)^{m-1}}{(mv+nu)^{m+j-1}};$$

....

$$F_{k0}(\infty)=\sum_{j=1}^{n} d_j C_{m+j-k-1}^{m-k}\frac{(mv)^j (nu)^{m-k}}{(mv+nu)^{m+j-k}};$$

....

$$F_{m0}(\infty)=d_0+\sum_{j=1}^{n} d_j \frac{(mv)^j}{(mv+nu)^j};$$

$$F_{01}(\infty)=\sum_{j=1}^{n} d_j C_{m+j-2}^{m-1}\frac{(mv)^{j-1} (nu)^{m}}{(mv+nu)^{m+j-1}}; \qquad (18)$$

....

$$F_{0l}(\infty)=\sum_{j=l}^{n} d_j C_{m+j-l-1}^{m-1}\frac{(mv)^{j-l} (nu)^{m}}{(mv+nu)^{m+j-l}};$$

....

$$F_{0n}(\infty)=d_n\frac{(nu)^m}{(mv+nu)^m}.$$

Анализ результатов расчетов. Исследуем влияние упреждающего удара на основные показатели боя, а также возможность использования для его описания более простой модели динамики средних без существенного ущерба для точности расчетов.

Одними из важнейших характеристик боя являются математические ожидания относительного количества сохранившихся к концу противостояния боевых единиц сторон $\mu_X=\frac{x_k}{m}$, $\mu_Y=\frac{y_k}{n}$ при использовании модели динамики средних и

$$\begin{cases} \mu_X=\dfrac{1}{m}\sum\limits_{i=1}^{m} iF_{i0}(\infty); \\ \mu_Y=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n} jF_{0j}(\infty) \end{cases}$$

при использовании вероятностных моделей боя.

При использовании вероятностных моделей к таким показателям относятся также вероятности победы сторон X и Y соответственно:

$$p_{X_0} = \sum_{i=1}^{m} F_{i0}(\infty),$$

$$p_{Y_0} = \sum_{j=1}^{n} F_{0j}(\infty).$$

На рис. 1−3 представлены изменения величин μ_X (сплошными линиями) и μ_Y (штриховыми линиями) в зависимости от параметра соотношения сил æ для различных соотношений начальных составов группировок, а также значения μ_X и μ_Y, полученные согласно модели динамики средних при различном времени нанесения упреждающего удара стороной X.

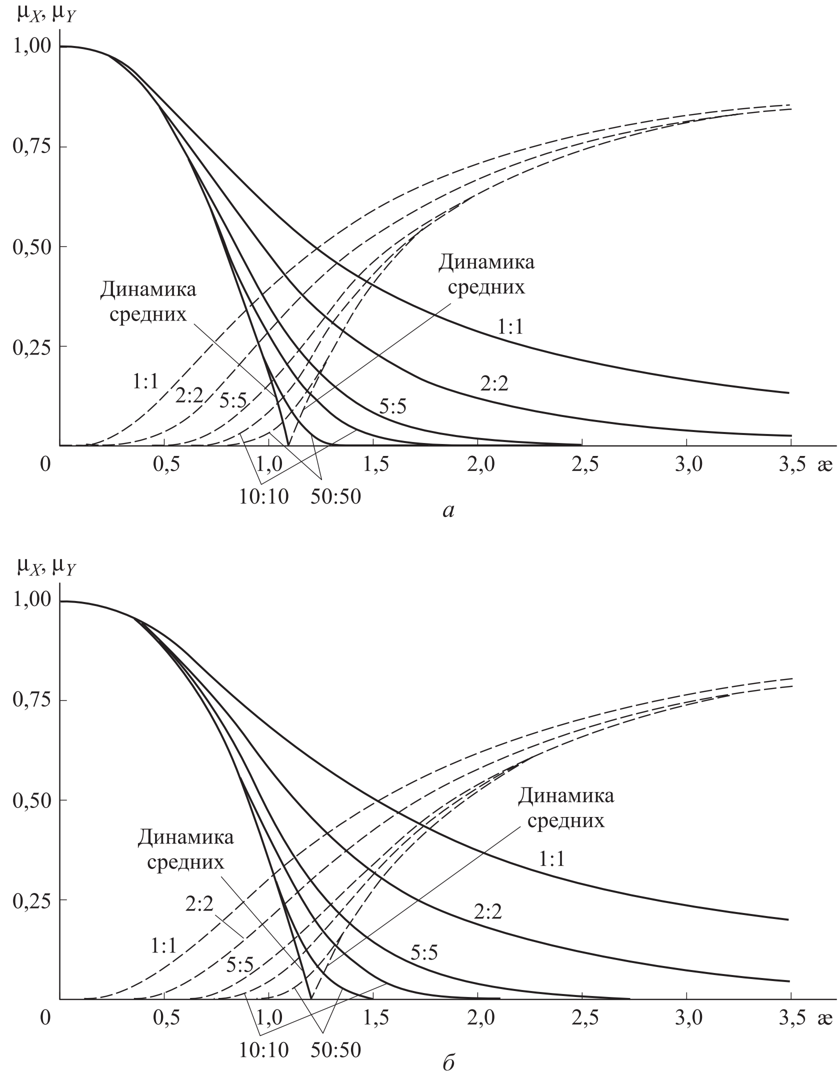
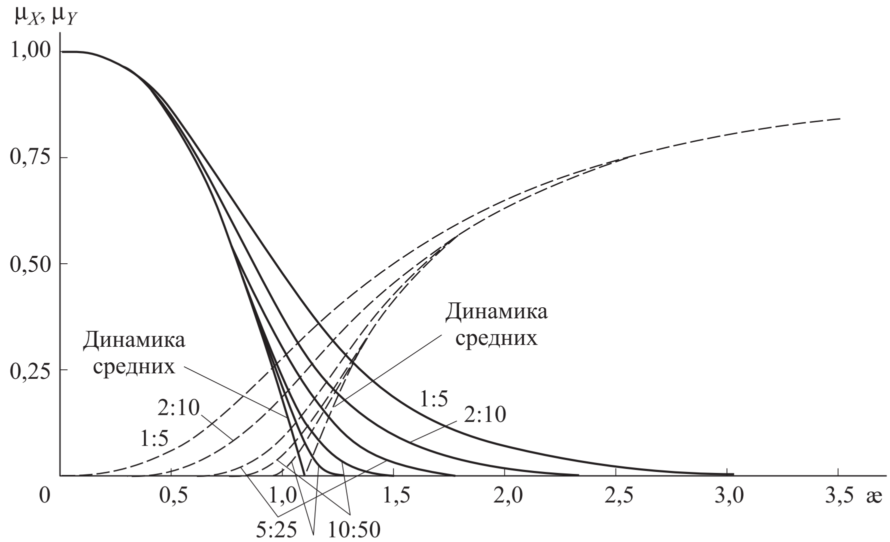
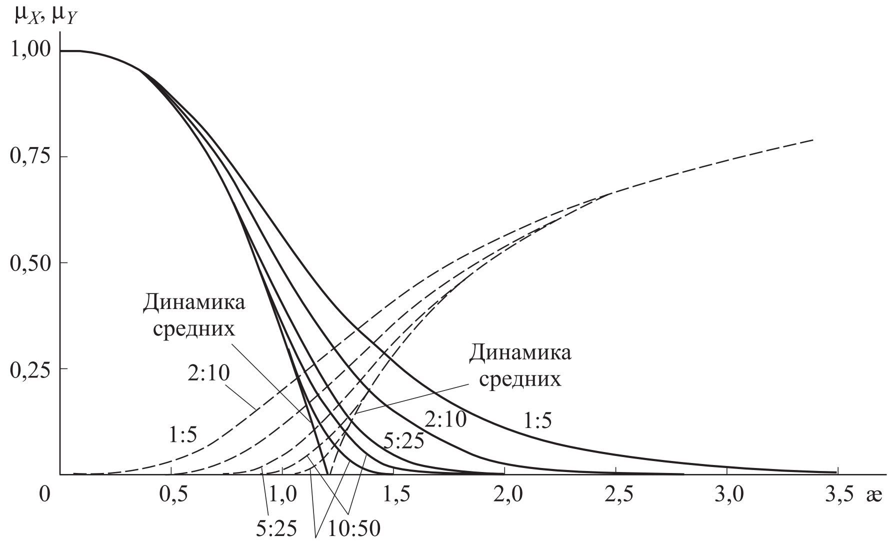


Рис. 1. Математическое ожидание относительного количества сохранившихся к концу сражения боевых единиц сторон при $n = m$ для $\overline{t_c} = 0{,}25$ (*а*) и $\overline{t_c} = 0{,}5$ (*б*)



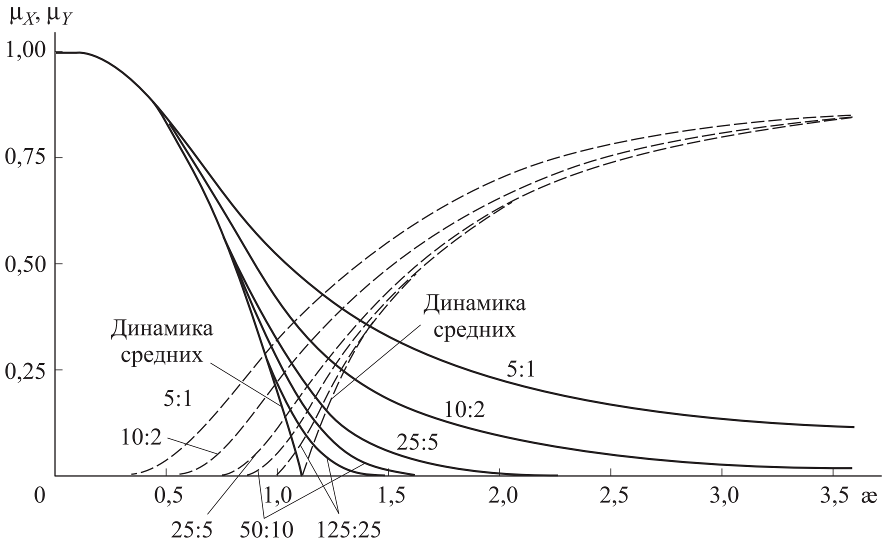
а



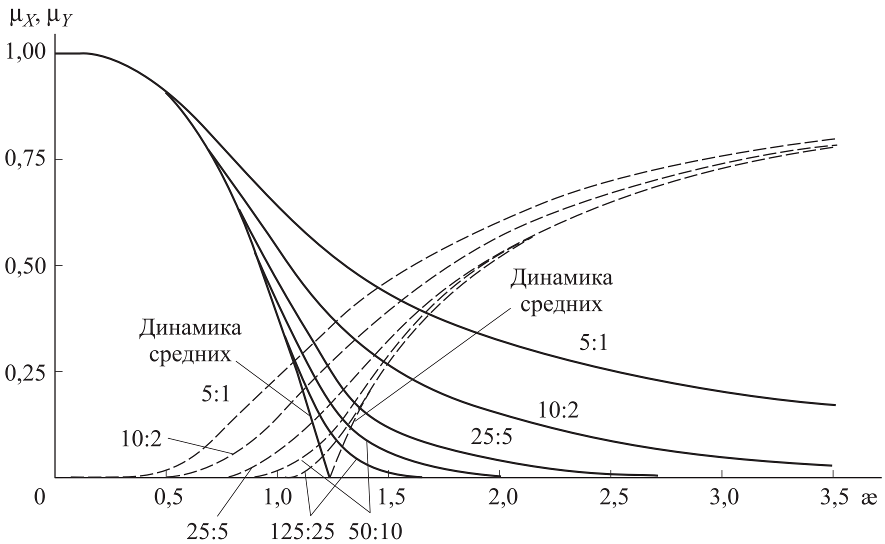
б

Рис. 2. Математическое ожидание относительного количества сохранившихся к концу сражения боевых единиц сторон при $n = 5m$ для $t_c = 0{,}25$ (*а*) и $t_c = 0{,}5$ (*б*)

Значения $\overline{t_c}$ соответствуют проведению боевыми единицами стороны X по 1–2 выстрела по противнику до открытия им ответного огня, так как в реальных боевых условиях после проведения выстрелов боевую единицу, как правило, обнаруживают и по ней открывают ответный огонь. Аналогичные рисунки, отражающие изменения величин μ_X и μ_Y в зависимости от параметра соотношения сил æ при одновременном открытии огня обеими сторонами, приведены в [7].



а



б

Рис. 3. Математическое ожидание относительного количества сохранившихся к концу сражения боевых единиц сторон при $m = 5n$ для $F_c = 0{,}25$ (*а*) и $F_c = 0{,}5$ (*б*)

Выводы. На основе теории непрерывных марковских процессов разработаны модели «плохо организованного» боя для различных начальных составов противоборствующих группировок при упреждающем ударе одной из сторон.

Установлено, что на ошибки метода динамики средних влияет в первую очередь соотношение сил противоборствующих группировок, а не соотношение их численности. Так, если одна из противоборствующих сторон имеет не менее чем двукратное превосходство, использование модели динамики средних приводит к незначительным ошибкам вычисления основных показателей боя даже малочисленных группировок $(m+n \geq 6)$.

Модели динамики средних приводят к грубым ошибкам в вычислении основных показателей боя немногочисленных близких по силам группировок (æ ≈ 1 при одновременном открытии огня обеими группировками и $æ \approx e^{\frac{\bar{t}_c}{2æ}}$ при упреждающем ударе стороны X). Причиной этих ошибок является достаточно высокая вероятность победы более слабой стороны. Модели динамики средних могут быть использованы для описания боя близких по силам группировок, если в бою участвуют не менее 150 единиц $(m+n \geq 150)$.

Упреждающий удар одной из противоборствующих сторон существенно влияет на основные показатели боя близких по силам группировок. При значительном начальном превосходстве одной из противоборствующих сторон (в три и более раз — для стороны, наносящей упреждающий удар, а также в четыре и более раз — для стороны, наносящей ответный удар) влияние упреждающего удара на основные показатели боя несущественно.

При пропорциональном увеличении составов участвующих в бою группировок усиливается влияние упреждающего удара на ожидаемые потери более сильной стороны и ослабевает его влияние на потери более слабой стороны, причем это влияние достаточно существенно.

При одинаковом начальном соотношении сил противоборствующих группировок $(æ = \text{const})$ и при одинаковых составах $(m+n = \text{const})$ упреждающий удар оказывает существенно большее влияние на ожидаемые потери группировки, имеющей бóльшую начальную численность. Причиной этого является проведение меньшего числа выстрелов по уже пораженным целям.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Алексеев О.Г., Анисимов В.Г., Анисимов Е.Г. *Марковские модели боя*. Москва, Министерство обороны СССР, 1985, 85 с.

[2] Вентцель Е.С. *Исследование операций*. Москва, УРСС, 2006, 432 с.

[3] Вентцель Е.С. *Теория вероятностей*. Москва, Высшая школа, 1999, 576 с.

[4] Дубограй И.В., Дьякова Л.Н., Чуев В.Ю. Учет упреждающего удара при моделировании двусторонних боевых действий. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 7. URL: http://enggournal.ru/catalog/mathmodel/hidden/842.html

[5] Дубограй И.В., Чуев В.Ю. Дискретная марковская модель двустороннего боя многочисленных группировок. *Наука и образование: электронное научное издание*, 2013, № 10. DOI 10.7463/1013.0617171

[6] Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Особенности математического моделирования технических устройств. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 1 (1), с. 5–17.

[7] Ткаченко П.Н. *Математические модели боевых действий*. Москва, Советское радио, 1969, 240 с.

[8] Чуев В.Ю. Вероятностная модель боя многочисленных группировок. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки,* 2011, спец. выпуск «Математическое моделирование», с. 223−232.

[9] Чуев В.Ю., Дубограй И.В. Вероятностная модель боевых действий при упреждающем ударе одной из сторон. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2015, № 2, с. 53−62.

[10] Чуев В.Ю. *Исследование операций в военном деле*. Москва, Воениздат, 1970, 270 с.

[11] Jaiswal N.K. *Military Operations Research. Quantitative Decision Making.* Boston, Kluwer Academic Publishers, 1997, 388 p.

[12] Lanchester F. *Aircraft in Warfare: the Dawn of the Fourth Arm*. London, Constable and Co., 1916, 243 p.

[13] Shanahan L., Sen S.. *Dynamics of Model Battle*: Markovian and strategic cases. New York, Physics Department, State University of New York, 2003, pp. 1–43.

[14] Chen X., Jing Yu., Li Ch., Li M. Warfare Command Stratagem Analysis for Winning Based on Lanchester Attrition Models. *J. of Science and Systems Engineering*, 2012, vol. 21 (1), pp. 94–105.

[15] Winston W.L. *Operations Research: Applications and Algorithms*. Duxbury Press, 2001, 128 p.

Статья поступила в редакцию 14.03.2015

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Чуев В.Ю., Дубограй И.В. Модели двусторонних боевых действий многочисленных группировок. *Математическое моделирование и численные методы*, 2016, № 1(9), с. 89–104.

Чуев Василий Юрьевич — канд. техн. наук, доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 20 научных работ в области прикладной математики. e-mail: vacilious@mail.ru

Дубограй Ирина Валерьевна — доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор ряда научных работ в области прикладной математики. e-mail: irina.dubograi@yandex.ru

Models of bilateral warfare of numerous groups

© V.U. Chuev, I.V. Dubogray

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

Based on the theory of Markov processes the model of "poorly organized" battle was developed. Formulae for calculating its basic parameters at different initial numbers of the opposing sides were obtained. A comparison of the results of modeling a battle using probabilistic and deterministic models was performed. It was found that the dynamics model errors of the average are primarily affected by the balance of forces of the opposing sides in the beginning of the battle. It was shown that in case of military groups of similar forces the first-strike attack is of significant importance. When one of the warring parties at the beginning of the battle has a great advantage, the influence of first-strike attack is negligible. An increase in the influence of first-strike attack on the expected losses of a strong hand, and a reduction of its impact on the expected losses of the weaker party, as the number of groups involved in the fight increases proportionally, is also shown.

Keywords: *combat units, the effective rapidity of fire, Markov processes, the balance of forces, the model of bilateral warfare.*

REFERENCES

[1] Alekseev O.G, Anisimov V.G, Anisimov E.G. *Markovskie modeli boya* [Markov models of a battle]. Moscow, Ministry of defense of the USSR Publ., 1985, 85 p.

[2] Venttsel E.S. *Issledovanie operatsiy* [Operation research]. Moscow, URSS Publ., 2006, 432 p.

[3] Venttsel E.S. *Teoriya veroyatnostey* [Probability theory]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1999, 576 p.

[4] Dubogray I.V., Dyakova L.N., Chuev V.Yu. *Inzhenernyi zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation*, 2013, no. 7. Available at: http://enggournal.ru/catalog/mathmodel/hidden/842.html

[5] Dubogray I.V., Chuev V.Yu. *Nauka i obrazovanie: elektronnoe nauchno-tekhnicheskoe izdanie — Science and education: Electronic scientific journal*, October 2013, no. 10. DOI 10.7463/1013.0617171

[6] Zarubin V. S., Kuvyrkin G. N. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye menody — Mathematical Modeling and Computational Methods,* 2014, no. 1, pp. 5–17.

[7] Tkachenko P.N. *Matematicheskie modeli boevykh deystviy* [Mathematical models of warfare]. Moscow, Sovetskoe radio Publ., 1969, 240 p.

[8] Chuev V.Yu. *Vestnic MGTU im. N.E. Baumana. Seria Estestvennye nauki — Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series: Natural Sciences*, 2011, Spetsialnyi vypusk “Matematicheskoe modelirovanie” [Special issue “Mathematical modeling”], pp. 223–232.

[9] Chuev V. Yu., Dubogray I.V. *Vestnic MGTU im. N.E. Baumana. Seria Estestvennye nauki — Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series: Natural Sciences*, 2015, no. 2, pp. 53–62.

[10] Chuev V.Yu. *Issledovanie operatsiy v voennom dele* [Operations research in military science]. Moscow, Voenizdat Publ., 1970, 270 p.

[11] Jaswal N. K. *Military Operations Rescarch. Quantitative Decision Making.* Kluwer Academic Publishers, 2000, 388 p.

[12] Lanchester F. *Aircraft in Warfare: the Dawn of the Fourth Arm*. London, Constable And Co., 1916, 243 p.
[13] Shamahan L. *Dynamics of Model Battles.* N.Y., Phisics Department, State University of New York Publ., 2003, pp. 1–43.
[14] Chen X., Jing Yu., Li Ch., Li M. Warfare Command Stratagem Analysis for Winning Based on Lanchester Attrition Models. *Journal of Science and Systems Engineering*, 2012, vol. 21(1), pp. 94 – 105.
[15] Winston W.L. *Operations Research: Applications and Algorithms.* Duxbury Press, 2001, 128 p.

Chuev V.Yu., Cand. Sci. (Eng.), Associate Professor of Computational Mathematics and Mathematical Physics Department at the Bauman Moscow State Technical University. The author of more than 20 researches in the field of applied mathematics. e-mail: vacili-ous@mail.ru

Dubogray I.V., Associate Professor of Computational Mathematics and Mathematical Physics Department at the Bauman Moscow State Technical University. The author of a number of researches in the field of applied mathematics.
e-mail: irina.dubograi@yandex.ru