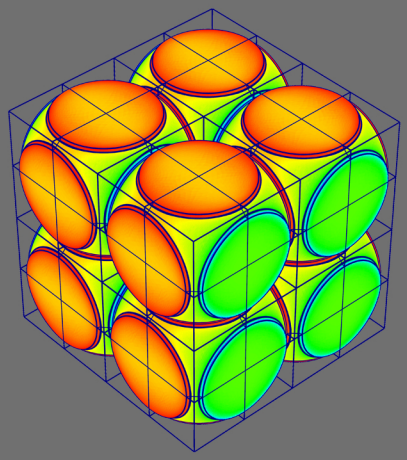
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Belkin A., Semenov V. Mathematical modeling of massive tire stationary rolling on the chassis dynamometer with regard to energy dissipation in rubber. Mathematical Modeling and Cотputational Methods, 2016, №1 (9), pp. 17-37

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/86/

Параметры загрузки:
IP: 3.41.188.32
17.11.2026 08:19:52

УДК 539.3

Моделирование стационарного качения массивной шины по беговому барабану с учетом диссипации энергии в резине

© А.Е. Белкин, В.К. Семенов

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 10055, Россия

Рассмотрена задача математического моделирования испытаний по обкатке массивной шины на стенде с беговым барабаном, в ходе которых определены характеристики сопротивления качению шины. Подробно изложены основные этапы построения модели. Приведена формулировка контактной задачи свободного стационарного качения шины по испытательному барабану с учетом рассеяния энергии в резине при циклическом деформировании. Вязкоупругое поведение резины описано с помощью модели Бергстрема — Бойс, числовые параметры которой установлены по результатам испытаний образцов. Условия контакта в нормальном и тангенциальном направлениях сформулированы с использованием функций внедрения, для выполнения контактных ограничений применен метод штрафа. Численное решение трехмерной задачи вязкоупругости получено методом конечных элементов. Для оценки адекватности построенной модели проведено сравнение результатов расчетов с данными испытаний массивной шины на стенде Hasbach по значениям полученных сил сопротивления качению при различных нагрузках на шину. Сопоставлены распределения давления в площади контакта, полученные расчетным путем и экспериментально с применением оборудования фирмы XSENSOR Technology Corporation.

Ключевые слова: *массивная шина, беговой барабан, стационарное качение, диссипация энергии, сопротивление качению, математическое моделирование, вязкоупругость, контактная задача.*

Введение. Испытания на шинообкатном стенде с беговым барабаном — один из наиболее информативных методов экспериментального исследования эксплуатационных характеристик и ресурса шин. При качении шины по беговому барабану можно определить в частности силы сопротивления качению, температуры саморазогрева шины, т. е. характеристики, зависящие от рассеяния энергии в резине при циклическом деформировании. Их расчет представляет собой сложную задачу математического моделирования, при решении которой большое значение приобретает настройка модели на воспроизведение результатов испытаний. В статье рассмотрено решение задачи свободного стационарного качения массивной шины по беговому барабану с учетом диссипации энергии и проведена проверка достоверности предлагаемой модели при сравнении ее с результатами испытаний.

Обзор решений. Задача контакта качения для вязкоупругого толстостенного цилиндра с жестким сердечником (обрезиненного катка) решена методом конечных элементов (МКЭ) в трудах [1–4]. В работе [1] изучен контакт по нормали к поверхности барабана без учета контактных тангенциальных сил. В статьях [2, 3] рассмотрена общая формулировка условий одностороннего контакта для катящегося цилиндра, учитывающая силы трения в пятне контакта. В указанных статьях также были исследованы плоские деформации резинового массива катка. Для резины применяли соотношение вязкоупругости с экспоненциальным ядром релаксации, содержащим характерное для материала время релаксации. Более общий подход к описанию вязких эффектов в эластомерных материалах при циклическом нагружении использован в [4], где сформулирован закон состояния с внутренними переменными процесса деформирования, определяющими изменение вязких составляющих деформаций. В [5–7] обсуждены вычислительные проблемы контактной задачи качения шины.

Постановка задачи. Массивная шина состоит из металлического обода и привулканизованного к нему резинового массива. Схема к решению задачи качения шины по беговому барабану показана на рис. 1. Абсолютно жесткий барабан, вращающийся с постоянной угловой скоростью ω_d, приводит шину в движение с угловой скоростью ω. Параметр, задающий контакт двух тел, — сближение их осей u_0.

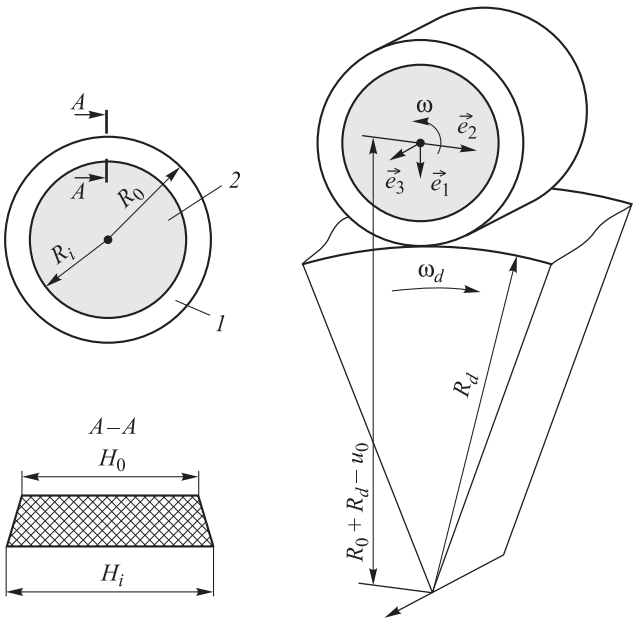


Рис. 1. Схема к решению задачи качения массивной шины по беговому барабану:

1 — резиновый массив; *2* — металлический диск

Испытания показывают, что при максимальных эксплуатационных нагрузках отношение обжатия шины u_0 к толщине резинового массива $h = R_0 - R_i$ не превышает 8 %, т. е. резина деформирована слабо. Данное обстоятельство позволяет решить задачу в геометрически линейной постановке.

Для формулировки уравнений будем использовать декартову систему координат x_1, x_2, x_3 с ортами $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ (см. рис. 1) и по необходимости цилиндрические координаты r, φ, x_3 с ортами $\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3 = \vec{e}_3$ соответственно радиального, окружного и осевого направлений.

При стационарном качении вектор скорости произвольной точки шины определяем по формуле

$$\vec{v} = \omega r \vec{i}_2 + \omega \frac{\partial \vec{u}}{\partial \varphi},$$

где $\vec{u} = u_i \vec{e}_i$ — вектор перемещения точки, связанный с деформированием шины (здесь и далее по повторяющемуся латинскому индексу идет суммирование от 1 до 3).

Представим скорость в декартовых координатах:

$$\vec{v} = \omega\,(-x_2 + \partial_\varphi u_1)\,\vec{e}_1 + \omega\,(x_1 + \partial_\varphi u_2)\,\vec{e}_2 + \omega\,\partial_\varphi u_3\,\vec{e}_3,$$

где $\partial_\varphi \equiv \dfrac{\partial}{\partial \varphi} = x_1 \dfrac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \dfrac{\partial}{\partial x_1}$ — оператор дифференцирования по угловой координате.

Деформации ε_{ij} и напряжения σ_{ij} в любой материальной точке шины называют периодическими функциями времени

$$\varepsilon_{ij}(t+T) = \varepsilon_{ij}(t); \qquad \sigma_{ij}(t+T) = \sigma_{ij}(t), \tag{1}$$

причем периодом служит время оборота колеса $T = 2\pi / \omega$.

Опишем потери энергии в резине, взяв за основу вязкоупругую модель деформирования эластомеров, предложенную Бергстремом и Бойс [8, 9]. Получаем, что поведение вязкоупругого материала при одноосном напряжении подобно поведению условной трехзвенной механической системы (рис. 2), в которой скорость вязкой деформации

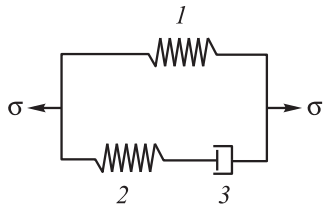


Рис. 2. Условная модель вязкоупругого материала

звена *3* подчинена соотношению теории течения с упрочнением. Авторы [8, 9] полагают, что для эластомеров в качестве параметра упрочнения следует принимать удлинение полимерной цепочки.

При трехосном напряженном состоянии в случае малых деформаций модель Бергстрема — Бойс имеет вид:

$$\sigma_{ij} = K\Theta\delta_{ij} + 2G\text{э}_{ij} + S^v_{ij}; \tag{2}$$

$$S^v_{ij} = 2G^* (\text{э}_{ij} - \text{э}^v_{ij}); \tag{3}$$

$$\frac{d\text{э}^v_{ij}}{dt} = f\left(\lambda^v_{\text{chain}}, \sigma^v_u\right) S^v_{ij}; \tag{4}$$

$$f\left(\lambda^v_{\text{chain}}, \sigma^v_u\right) = \frac{B\left(\sigma^v_u\right)^m}{\left(\lambda^v_{\text{chain}} - 1 + \varepsilon_0\right)^n}, \tag{5}$$

где функции с верхним индексом *v* относят к вязкому звену; K — модуль объемного сжатия; $\Theta = \varepsilon_{ii}$ — объемная деформация; δ_{ij} — символ Кронекера; G, G^* — равновесный и релаксационный модули сдвига; э_{ij}, э^v_{ij} — компоненты девиатора деформаций и их вязкие составляющие; $\sigma^v_u = \left(\frac{3}{2} S^v_{ij} S^v_{ij}\right)^{1/2}$ — интенсивность напряжений в вязком звене; $\lambda^v_{\text{chain}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{(\lambda^v_{11})^2 + (\lambda^v_{22})^2 + (\lambda^v_{33})^2}$ — кратность усредненного вязкого удлинения макромолекулярной цепи эластомера [8]; m, n, B — параметры закона деформирования; ε_0 — малая постоянная деформация, добавляемая для описания скорости ползучести при нулевой деформации.

Представленная модель прошла испытания по циклическому сжатию образцов резины [10] и полиуретана [11].

Положим в основу расчета катящейся шины уравнение баланса виртуальных работ внутренних и внешних сил. Изучая стационарное качение с невысокими скоростями (максимальная скорость движения транспортного средства 70 км/ч), пренебрежем влиянием сил инерции и рассмотрим процесс как статический. Предположим, что обжатие шины происходит в результате смещения бегового барабана на заданную величину u_0 к оси колеса. Для произвольного момента времени запишем уравнение баланса виртуальных работ

$$\int_V \sigma_{ij}\,\delta\varepsilon_{ij}\,dV = \delta W_c\,, \qquad (6)$$

где δW_c — работа сил в области контакта.

При подсчете работы δW_c необходимо принимать во внимание условия контакта, накладывающие ограничения на возможные перемещения и контактные силы. Искомую контактную нагрузку $\vec{p}_c$, возникающую на части наружной поверхности Ω_c шины, разложим на составляющие в осевом, окружном и нормальном по отношению к барабану направлениях:

$$\vec{p}_c = p_{t1}\vec{t}_{d1} + p_{t2}\vec{t}_{d2} + p_n\vec{n}_d\,,$$

где $\vec{t}_{d1} = \vec{e}_3$, $\vec{t}_{d2}$, $\vec{n}_d$ — единичные векторы указанных направлений.

Сформулируем условия контакта шины с беговым барабаном. Уравнение пологой поверхности барабана в пределах возможной площади контакта запишем в виде выражения (см. рис. 1)

$$x_{1d} = R_0 + \frac{x_{2d}^2}{2R_d} - u_0\,.$$

Определим «единичные» (в приближении теории пологих поверхностей) векторы

$$\vec{t}_{d2} = (x_2 / R_d)\vec{e}_1 + \vec{e}_2\,; \qquad \vec{n}_d = -\vec{e}_1 + (x_2 / R_d)\vec{e}_2\,.$$

Пространственные координаты точек наружной поверхности деформированной шины $x_i + u_i$ должны удовлетворять условию непроникания внутрь барабана:

$$x_1 + u_1 \le R_0 + \frac{(x_2 + u_2)^2}{2R_d} - u_0\,,$$

где $x_1 = R_0 - x_2^2 \big/ 2R_0$ — уравнение той же поверхности в недеформированном состоянии.

Введя функцию зазоров между контактирующими поверхностями

$$g_+ = \frac{(x_2 + u_2)^2}{2R_d} - u_0 + \frac{x_2^2}{2R_0} - u_1\,,$$

перепишем условие непроникания как требование неотрицательности зазоров:

$$g_+ \geq 0,$$

где $g_- = -g_+$ — функция, противоположная по знаку функции зазоров, называемая внедрением. Она не может быть положительной в случаях:

$g_- = 0$, если точка шины находится в контакте;

$g_- < 0$, если контакт отсутствует.

Для описания условий контакта можно использовать и функцию зазоров, и функцию внедрения. Далее будем применять функцию внедрения.

Проведя линеаризацию функции g_- по отношению к малым перемещениям точек шины, получим

$$g_- = g_-^\circ + u_1 - (x_2 / R_d)\, u_2$$

или

$$g_- = g_-^\circ - u_n, \tag{7}$$

где $g_-^\circ = u_0 - \dfrac{x_2^2}{2R_d} - \dfrac{x_2^2}{2R_0}$ — начальное внедрение, возникающее на проницаемой контактной поверхности; $u_n = \vec{n}_d \vec{u}$ — перемещение точки шины в направлении нормали к опорной поверхности.

Итак, условия нормального (в направлении нормали) контакта можно сформулировать следующим образом. В искомой области контакта Ω_c

$$g_-^\circ - u_n = 0, \; p_n \geq 0. \tag{8}$$

Для формулировки тангенциальных условий контакта определим функцию скорости проскальзывания при качении шины по барабану

$$\vec{\xi} = \omega_d R_d \vec{t}_{d2} - \vec{v}_{(r=R_0)}.$$

В проекциях на оси барабана $\vec{t}_{d1}$, $\vec{t}_{d2}$ имеем

$$\xi_{t1} = -\omega \; \partial_\phi u_3;$$

$$\xi_{t2} = \omega_d R_d - \omega R_0 \left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{x_2}{R_0} + \frac{x_2}{R_d} \right)^2 \right] - \omega \left(\frac{x_2}{R_d} \right) \partial_\phi u_1 - \omega \left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{x_2}{R_d} \right)^2 \right] \partial_\phi u_2.$$

В общем случае качения шины область контакта Ω_c делим на зону сцепления Ω_c^{st} и зону скольжения Ω_c^{sl}. В зоне сцепления полное

касательное напряжение $p_t = \sqrt{(p_{t1})^2 + (p_{t2})^2}$ меньше предельного напряжения, вычисленного по закону Кулона, проскальзывание отсутствует, т. е. верны условия

$$p_t < \mu\, p_n; \qquad \xi_t = \sqrt{(\xi_{t1})^2 + (\xi_{t2})^2} = 0,$$

где μ — коэффициент трения скольжения.

В зоне скольжения касательное напряжение имеет предельное значение $p_t = \mu\, p_n$, причем согласно закону трения Кулона,

$$\xi_t \neq 0;\ p_{t1} = \mu\, p_n(\xi_{t1} / \xi_t);\ \ p_{t2} = \mu\, p_n(\xi_{t2} / \xi_t).$$

Условия $\xi_{t1} = 0$, $\xi_{t2} = 0$, налагаемые на скорости проскальзывания в зоне сцепления, могут быть сформулированы и в перемещениях. В пределах области контакта $\left|x_2 / R_d\right| < 0{,}05$, поэтому можно полагать $\vec{t}_{d2} \approx \vec{e}_2$. После входа в контакт соответствующие материальные точки шины и бегового барабана проходят одинаковый путь, где их пространственные координаты совпадают. Представим условия сцепления в окружном и осевом направлениях в виде

$$g_t^{\circ} - u_2 = 0; \qquad u_3(\varphi_0) - u_3 = 0, \tag{9}$$

где введена функция начального «проникания» для окружного направления, аналогичная функции начального внедрения g_-°

$$g_t^{\circ} = \left(\frac{\omega_d}{\omega} R_d - R_0 \right)(\varphi - \varphi_0) + u_2(\varphi_0). \tag{10}$$

В выражениях (9), (10) угловая координата входа в контакт, зависящая от x_3, обозначена как φ_0.

При нормальных условиях испытаний шины на беговом барабане проскальзывание практически отсутствует. Будем считать, что во всей области контакта Ω_c справедливы условия сцепления (9).

Для решения контактной задачи используем метод штрафа, трактуя работу сил в контакте δW_c в уравнении (6) как вариант штрафной функции. Для выполнения условия нормального контакта (8) установим зависимость между искомым давлением p_n и функцией внедрения (7) контактирующих тел:

$$p_n = k_n (g_-^{\circ} - u_n),$$

где k_n — коэффициент штрафа.

Работу давления представим в виде

$$\delta W_{p_n} = \int\limits_{\Omega_c} k_n (g_-^\circ - u_n)\, \delta u_n \, d\Omega, \qquad (11)$$

где $\delta u_n = \vec{n}_d \delta \vec{u}$.

Данная процедура применима при составлении выражения виртуальной работы тангенциальных сил в контакте. Положим, что эти силы пропорциональны невязкам в условиях сцепления (9), т. е.

$$p_{t1} = k_t (u_{30} - u_3); \qquad p_{t2} = k_t (g_t^\circ - u_2),$$

где k_t — коэффициент штрафа при выполнении условий сцепления, $u_{30} = u_3(\varphi_0)$.

Тогда для работы тангенциальных сил получим выражение

$$\delta W_{p_t} = \int\limits_{\Omega_c} \left[k_t (g_t^\circ - u_2)\, \delta u_2 + k_t (u_{30} - u_3)\, \delta u_3 \right] d\Omega. \qquad (12)$$

Сумма работ (11) и (12) определяет функцию δW_c, т. е. правую часть уравнения в вариациях (6).

Вычисление работы внутренних сил. В рассматриваемой задаче деформации и напряжения при удалении от зоны контакта быстро затухают. Ограничим область значимых напряжений и деформаций углами φ_- и φ_+, предположив, что вне этой области $\sigma_{ij} = 0$, $\varepsilon_{ij} = 0$. Периодичность (1) заменим условиями затухания компонент напряженно-деформированного состояния, возникающего при приближении к границам расчетной области:

$$\sigma_{ij} \to 0, \quad \varepsilon_{ij} \to 0 \quad \text{при } \varphi \to \varphi_- \quad \text{и при } \varphi \to \varphi_+. \qquad (13)$$

Для вычисления работы внутренних сил запишем соотношения вязкоупругости (2)–(3) в измененной форме:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \sigma_{ij}^e - 2G^* \int\limits_{-\infty}^{t} \dot{э}_{ij}^v \, d\tilde{t}\,; \\ \sigma_{ij}^e &= K\Theta\, \delta_{ij} + 2(G + G^*)\, э_{ij}, \end{aligned} \qquad (14)$$

где σ_{ij}^e — мгновенные напряжения, определенные по соотношениям упругости; $\dot{э}_{ij}^v$ — скорости вязких деформаций, определяемые по

формулам (5), (6); звездочкой обозначено дифференцирование по времени.

Для стационарного режима качения интегрирование по времени в (14) заменим интегрированием по угловой координате $\varphi = \omega t$, причем нижний предел интегрирования с учетом условий (13) будет $\varphi = \varphi_-$:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^e - 2G^* \omega^{-1} \int_{\varphi_-}^{\varphi} \dot{\varepsilon}_{ij}^v \, d\tilde{\varphi}. \tag{15}$$

Начальные условия интегрирования считаем нулевыми:

$$\sigma_{ij}(\varphi_-) = 0, \qquad \varepsilon_{ij}(\varphi_-) = 0.$$

Выполненные преобразования позволяют записать уравнение принципа виртуальных работ в виде:

$$\begin{aligned} &\int_V (\sigma_{ij}^e - 2G^* \omega^{-1} \int_{\varphi_-}^{\varphi} \dot{\varepsilon}_{ij}^v \, d\tilde{\varphi}) \, \delta\varepsilon_{ij} \, dV = \\ &= \int_{\Omega_c} \left[k_n (g_-^\circ - u_n) \, \delta u_n + k_t (g_t^\circ - u_2) \, \delta u_2 + k_t (u_{30} - u_3) \, \delta u_3 \right] d\Omega, \end{aligned} \tag{16}$$

где V — расчетная область шины, ограниченная радиальными сечениями и $\varphi = \varphi_-$ и $\varphi = \varphi_+$.

При решении уравнения (16) напряжения (15) рассчитывают итерационным способом, поскольку скорости вязких деформаций $\dot{\varepsilon}_{ij}^v$ зависят от определяемых напряжений. В каждом цикле вязкие деформации

$$\varepsilon_{ij}^v(\varphi) = \omega^{-1} \int_{\varphi_-}^{\varphi} f\left(\lambda_{\text{chain}}^v, \sigma_u^v\right) S_{ij}^v \, d\tilde{\varphi} \tag{17}$$

вычисляют путем численного интегрирования по методу Рунге — Кутты.

В настоящей работе уравнение (16) решено методом конечных элементов, описанным в авторской программе В.К. Семенова. При этом использованы объемные восьмиузловые элементы в форме параллелепипеда с трилинейной аппроксимацией перемещений.

Выбранное представление перемещений с помощью функций гладкости C° приводит к разрыву деформаций и напряжений на границе между соседними конечными элементами (КЭ). Для вычисления интеграла (17) на текущей итерации проведена аппроксимация

деформаций, полученных на предыдущей итерации. В качестве иллюстрации алгоритма на рис. 3 схематично представлена область шины, разбитая на КЭ.

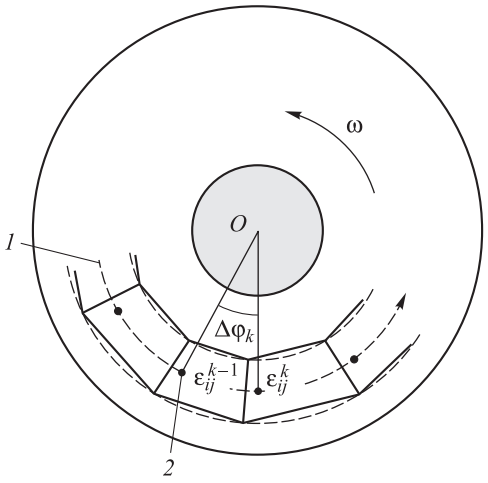


Рис. 3. Схема области шины, разбитой на конечные элементы:
1 — ряд КЭ; *2* — гауссова точка

Рассмотрим произвольный ряд элементов, выстроенных в окружном направлении, по которому проводят численное интегрирование скоростей деформаций. Между одноименными гауссовыми точками (т. е. точками с одинаковыми локальными координатами) двух смежных КЭ, в которых деформации равны ε_{ij}^{k-1}, ε_{ij}^{k}, вводим линейную аппроксимацию:

$$\varepsilon_{ij}^{\alpha} = \varepsilon_{ij}^{k-1} + \alpha\left(\varepsilon_{ij}^{k} - \varepsilon_{ij}^{k-1}\right), \quad \alpha \in [0,1].$$

Полагая, что вязкие деформации $\left(э_{ij}^{v}\right)^{k-1}$ элемента $k-1$ известны, последовательно вычисляем коэффициенты метода Рунге — Кутты:

$$k_{ij}^{1} = \dot{э}_{ij}^{v}\left(\left(э_{rs}^{v}\right)^{k-1};\quad \varepsilon_{rs}^{k-1}\right);$$

$$k_{ij}^{2} = \dot{э}_{ij}^{v}\left(\left(э_{rs}^{v}\right)^{k-1} + k_{rs}^{1}\frac{\Delta\varphi_k}{2\omega}, \varepsilon_{rs}^{0,5}\right);$$

$$k_{ij}^{3} = \dot{э}_{ij}^{v}\left(\left(э_{rs}^{v}\right)^{k-1} + k_{rs}^{2}\frac{\Delta\varphi_k}{2\omega}, \varepsilon_{rs}^{0,5}\right); \qquad (18)$$

$$k_{ij}^{4} = \dot{э}_{ij}^{v}\left(\left(э_{rs}^{v}\right)^{k-1} + k_{rs}^{3}\frac{\Delta\varphi_k}{\omega}, \varepsilon_{rs}^{k}\right),$$

где $\Delta\varphi_k$ — шаг интегрирования (см. рис. 3).

При вычислении коэффициентов (18) скорости вязких деформаций определяют по формулам (4), (5). Окончательно деформации вязкого звена в соответствующей гауссовой точке *k*-го КЭ вычисляют как

$$\left(\text{э}_{ij}^{v}\right)^{k} = \left(\text{э}_{ij}^{v}\right)^{k-1} + \frac{\Delta\varphi_k}{6\omega}\left(k_{ij}^{1} + 2k_{ij}^{2} + 2k_{ij}^{3} + \text{k}_{ij}^{4}\right).$$

Далее после введения полученных деформаций в выражения (3) и (2) получаем переопределенные напряжения. Процесс интегрирования начинают с фиктивного (не участвующего в решении задачи) элемента ряда, для которого напряжения и деформации равны нулю.

Таким образом, при свободном стационарном качении шины скорость ее вращения ω определяют по заданной скорости вращения барабана ω_d, исходя из условия отсутствия тягового или тормозного момента на оси шины.

Задача контакта неподвижной шины с плоской опорной поверхностью. Данную задачу рассматривали в качестве тестовой для настройки математической модели, поскольку для неподвижной шины существуют обширные экспериментальные данные о параметрах контакта [12]. Эксперименты проводили на массивной шине типоразмера 630 × 170 мм, геометрические параметры которой приведены ниже:

Размеры резинового массива шины

Наружный радиус R_0, мм……	312,8
Внутренний радиус R_1, мм…….	272,8
Ширина беговой дорожки H_0, мм……..	149
Ширина основания резинового массива H_i, мм…	162,6

В экспериментах, проведенных на оборудовании фирмы XSENSOR Technology Corporation с применением сенсора IX500:256.256.16, были исследованы форма и размеры пятна контакта, а также распределение контактного давления при различных нагрузках на шину. Вид испытательного стенда с объектом испытаний показан на рис. 4.

В расчетах статического обжатия шины поведение резины принимали как упругое. Постоянные упругости считали равными G = = 4,3 МПа, K = 108 МПа. Отметим, что значениям G и K соответствует коэффициент Пуассона 0,48. Расчетный сектор шины выделен углами $\varphi_- = -\pi/3,\ \varphi_+ = \pi/3$.

Для оценки влияния трения в контакте задача решена в двух вариантах: при наличии и отсутствии ограничений на тангенциальные

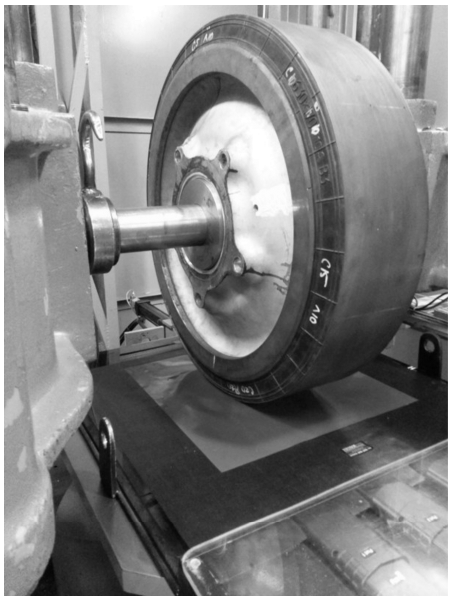


Рис. 4. Стенд для измерения давления в контакте шины с плоской опорной поверхностью

перемещения точек, вошедших в контакт. В первом случае были запрещены осевые перемещения. Для выполнения условий контакта коэффициенты штрафа заданы как $k_n = k_t = 2000$ МПа.

Испытания по обжатию шины также проведены в двух режимах: без смазки и со смазкой, снижающей трение в контакте. Нагрузочные характеристики шины, полученные расчетным путем и экспериментально, показаны на рис. 5. Отметим, что результаты расчета с условием сцепления в осевом направлении соответствуют данным эксперимента по обжатию шины на «сухую» поверхность. Расчеты без ограничения тангенциальных перемещений в контакте (светлые точки) приводят к некоторому занижению жесткости шины.

Вывод о том, что для случая «сухой» опорной поверхности расчеты по схеме сцепления лучше соответствуют данным испытаний, подтверждает анализ распределения давления в контакте (рис. 6).

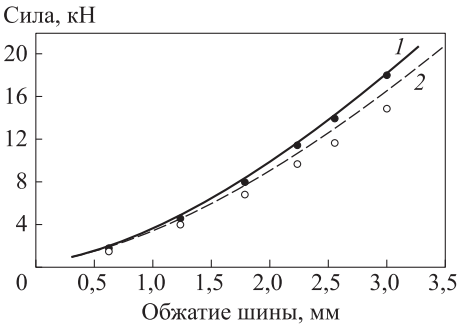


Рис. 5. Нагрузочные характеристики шины:

1, *2* — экспериментальные характеристики, полученные при отсутствии и при наличии смазки в области контакта; ● и ○ — результаты расчетов, выполненных при запрещенных осевых перемещениях в контакте и при отсутствии тангенциальных сил в контакте соответственно

Результаты расчетов показали, что варьирование коэффициентов штрафа k_n, k_t в диапазоне $20\ldots2\cdot10^5$ МПа/мм практически не влияет на получаемые контактные силы, значения которых весьма устойчивы.

Задача качения шины по беговому барабану. Численное исследование циклического напряженно-деформированного состояния катящейся шины провели с использованием модели вязкоупругости Бергстрема — Бойс. Для определения значений параметров модели

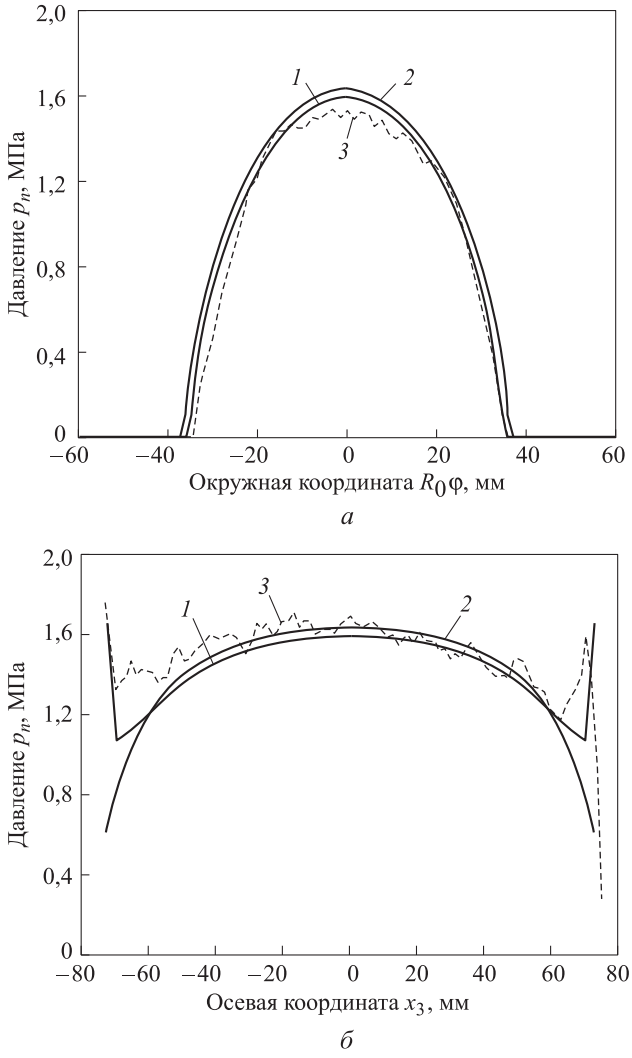


Рис. 6. Эпюры изменения контактного давления по окружному (*а*) и осевому (*б*) направлениям в сечениях шины, проходящих через центр пятна контакта, при нагрузке 11,5 кН:

1, *2* — решения контактной задачи при наличии и отсутствии ограничений на осевые тангенциальные перемещения в области контакта соответственно; *3* — результаты эксперимента при отсутствии смазки

короткие цилиндрические образцы резины испытывали на циклическое пульсационное сжатие на электродинамическом стенде Instron ElectroPuls-1000. Проанализированы циклы нагружения двух видов: гармонический и трапецеидальный (рис. 7) с различными частотами и размахами напряжения.

Гармонический цикл нагружения выбран как наиболее простой для отработки методики проведения эксперимента и анализа резуль-

татов, трапецеидальный цикл — как приближение к реальному циклу нагружения точек беговой поверхности шины. (Указанные на рис. 7 фазы нагружения τ_1 отдыха τ_2 соответствуют движению точек шины под нагрузкой и без нагрузки, т. е. расположены в пределах зоны контакта шины с опорной поверхностью и за ее пределами.) В экспериментах частоту циклов изменяли от 0,1 до 10 Гц.

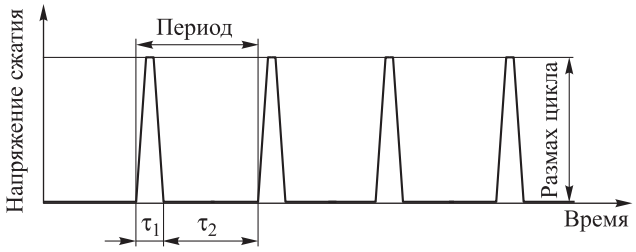


Рис. 7. Трапецеидальный цикл нагружения образца

По результатам испытаний установлены следующие значения параметров вязкоупругой модели: равновесный модуль сдвига $G \approx$ $\approx 3{,}9$ МПа; релаксационный модуль сдвига $G^* \approx 3{,}2$ МПа; показатели степеней в законе течения (5), (6) $m \approx n \approx 1$.

Коэффициент пропорциональности между скоростями вязких деформаций и напряжениями в законе (5), (6) считали зависящим от частоты нагружения материала, т. е. от скорости вращения шины. Мотивация данного решения подробно аргументирована в [10]. Конкретно в расчетах $B / \omega \approx 0{,}147$ МПа$^{-(m+1)}$.

Найденные значения параметров модели применили при расчете циклического деформирования резины. Теоретические диаграммы цикла сжатия резины, полученные в результате интегрирования системы уравнений (2)–(5) для случая гармонического изменения напряжения с частотой 10 Гц, показаны на рис. 8, *а*. Здесь же представлены экспериментальные кривые. Несмотря на некоторое различие в формах расчетных и экспериментальных гистерезисных петель, их площади, т.е. удельные механические потери, практически совпадают. К аналогичному выводу можно прийти при сопоставлении гистерезисных петель для трапецеидального пульсационного воздействия, полученных экспериментально и расчетным путем (рис. 8, *б*).

Выше указаны ориентировочные значения параметров модели материала, они подлежат уточнению в ходе настройки математической модели.

Рассмотрим результаты численного моделирования контакта качения шины по барабану радиуса $R_d = 1000$ мм. Такой радиус имеет беговой барабан испытательного стенда Hasbach, на котором измеряли силы сопротивления качению [12].

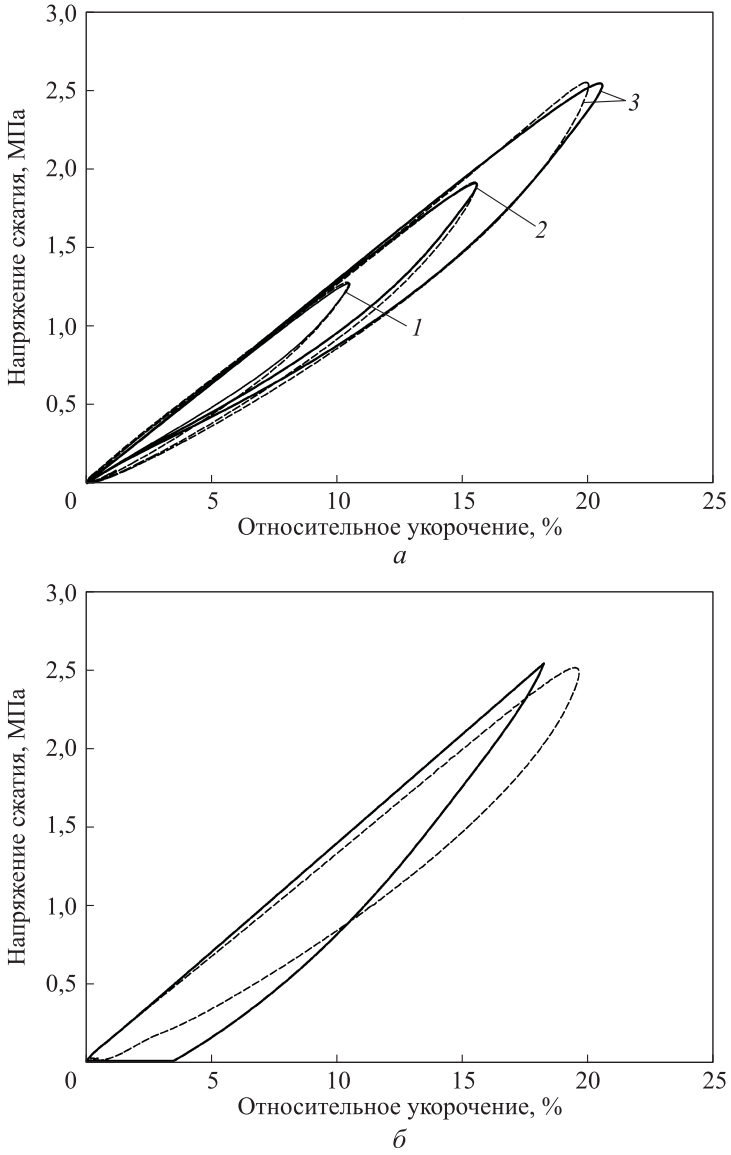


Рис. 8. Расчетные (сплошная линия) и экспериментальные (штриховая линия) гистерезисные петли для резины:

а — при пульсационном гармоническом нагружении с частотой 10 Гц и размахами напряжений; *б* — при пульсационном трапецеидальном цикле с временем нагружения $\tau_1 = 0{,}1$ с и временем отдыха $\tau_1 = 0{,}6$ с; *1* — 1,27 МПа, *2* — 1,91 МПа, *3* — 2,55 МПа

Распределение нормального давления и окружных сил сцепления в пятне контакта шины, обкатываемой по барабану со скоростью 60 км/ч, показано на рис. 9. Здесь же представлена эпюра давления для неподвижной шины.

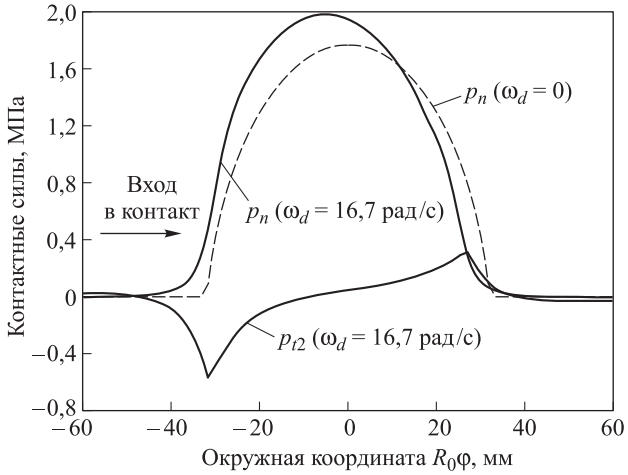


Рис. 9. Эпюры нормального давления p_n и окружных сил сцепления p_{t2} в сечении, проходящем через центр пятна контакта, при нагрузке 11,5 кН. Положительные силы сцепления на графике направлены в сторону окружных скоростей точек шины

По сравнению с решением для неподвижной шины при качении происходит смещение максимального давления в сторону входа в контакт. Окружные силы сцепления на входе и выходе из контакта имеют значения, соизмеримые с нормальным давлением, что говорит о возможности скольжения в зонах контакта. Учет зон скольжения при расчете может повлиять на распределение сил трения и, как следствие, на значение вычисляемой силы сопротивления качению. Однако при пересмотре решения силы нормального давления, определяющие напряженное состояние шины, существенно не изменяются. Поэтому силу сопротивления качению F_R целесообразно выразить через мощность рассеиваемой в резине энергии:

$$F_R = \frac{\int\limits_V \sigma_{ij}\,\dot{\varepsilon}_{ij}\,dV}{\omega_d\,R_d}.$$

С целью изучения зависимости силы сопротивления качению от скорости и нагрузки авторами настоящей работы проведены испытания шины на барабанном стенде. Шину обкатывали по барабану в режиме свободного качения. Графики изменения силы сопротивления от скорости при различных силах прижатия шины к барабану показаны на рис. 10.

При повышении скорости от 30 до 70 км/ч силы сопротивления увеличиваются не более чем на 10 %. Полученный результат вполне соотносим с экспериментальными данными для образцов резины, ги-

стерезисные потери в которых практически не зависят от частоты нагружения. Это обстоятельство позволяет сократить число проводимых испытаний шины, поскольку можно принять, что в рассмотренном диапазоне скоростей сила сопротивления не зависит от скорости качения. Результаты измерений можно усреднить по скоростям и построить график зависимости силы сопротивления качению от усилия прижатия шины к барабану. Зависимость, соответствующая «холодному» состоянию шины, представлена на рис. 11.

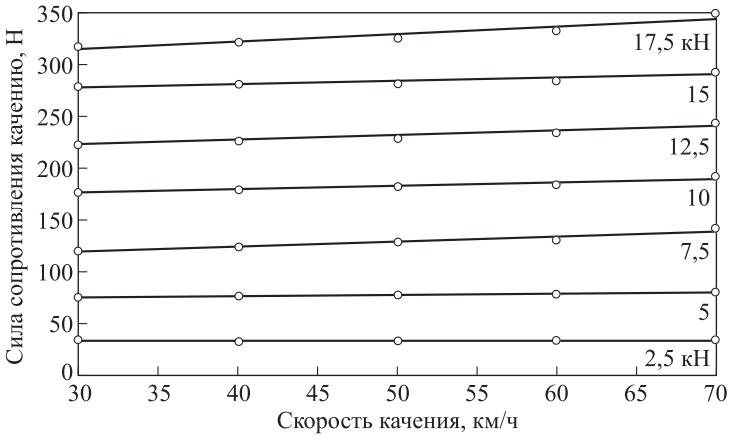


Рис. 10. Зависимость силы сопротивления качению «холодной» шины от скорости качения при разных силах прижатия к барабану. Точками показаны экспериментальные результаты, осредненные по числу измерений

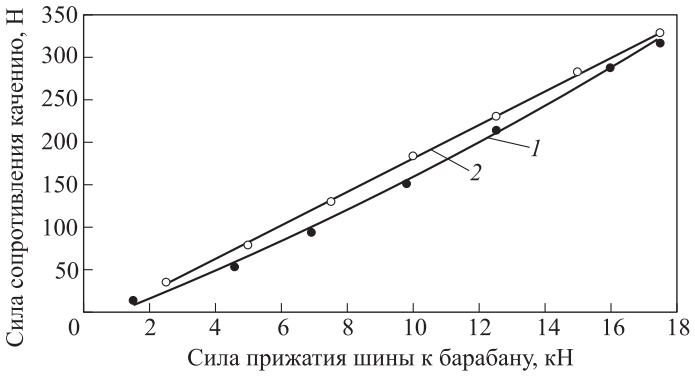


Рис. 11. Теоретическая (*1*) и экспериментальная (*2*) зависимости силы сопротивления качению «холодной» шины от силы прижатия к барабану. Точками показаны вычисленные (●) и экспериментально измеренные (○) значения, осредненные по скоростям

На рис. 11 видно, что экспериментальные результаты лежат на одной прямой (линия *2*). На этом же рисунке показаны результаты

математического моделирования (линия *1*). Поэтому делаем вывод о том, что расчетные и экспериментальные результаты качественно соответствуют друг другу.

Заключение. Полученные результаты по сопротивлению качению свидетельствуют о качественной достоверности расчета диссипации энергии в массивной шине с применением модели Бергстрема — Бойс для описания вязкоупругих циклических деформаций резины. Данная модель может быть положена в основу оценки мощности теплообразования в резине массивных шин при анализе их саморазогрева.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Bapat C.N., Batra R.C. Finite plane strain deformations of nonlinear viscoelastic rubber-covered rolls. *International journal for numerical methods in engineering*, 1984, vol. 20, pp. 1911–1927.

[2] Oden J.T., Lin T.L. On the general rolling contact problem for finite deformations of a viscoelastic cylinder. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 1986, vol. 57, issue 3, pp. 297–367.

[3] Oden J.T., Lin T.L., Bass J.M. A finite element analysis of the general rolling contact problem for a viscoelastic rubber cylinder. *Tire science and technology*, 1988, vol. 16, no. 1, pp. 18–43.

[4] Le Tallec P., Rahier C. Numerical models of steady rolling for non-linear viscoelastic structures in finite deformations. International journal for numerical methods in engineering, 1994, vol. 37, pp. 1159–1186.

[5] Nackenhorst U. The ALE-formulation of bodies in rolling contact: theoretical foundations and finite element approach. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 2004, vol. 193, issues 39–41, pp. 4299–4322.

[6] Wriggers P. Finite element algorithms for contact problems. *Archives of computational methods in engineering*, 1995, vol. 2, issue 4, pp. 1–49.

[7] Guangdi Hu, Wriggers P. On the adaptive finite element method of steady-state rolling contact for hyperelasticity in finite deformations. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 2002, vol. 191, no. 13, pp. 1333–1348.

[8] Bergström J.S., Boyce M.C. Constitutive modeling of the large strain time-dependent behavior of elastomers. *J. Mech. Phys. Solids*., 1998, vol. 46, pp. 931–954.

[9] Bergström J.S., Boyce M.C. Mechanical behavior of particle filled elastomers. *Rubber Chem. Technol.*, 1999, vol. 72, pp. 633–656.

[10] Семенов В.К., Белкин А.Е. Математическая модель вязкоупругого поведения резины при циклическом нагружении. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2014, № 2, с. 46–51.

[11] Белкин А.Е., Даштиев И.З., Лонкин Б.В. Моделирование вязкоупругости полиуретана при умеренно высоких скоростях деформирования. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 3, с. 39–54.

[12] Семенов В.К., Белкин А.Е., Веселов И.В. Экспериментальное исследование контакта, сопротивления качению и саморазогрева массивной шины при обкатке на барабанном стенде. *Инженерный вестник. Электронный научно-технический журнал*, 2014, № 12, с. 151–160.

Статья поступила в редакцию 14.03.2016

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Белкин А.Е., Семенов В.К. Моделирование стационарного качения массивной шины по беговому барабану с учетом диссипации энергии в резине. *Математическое моделирование и численные методы*, 2016, № 1 (9), с. 17–37.

Белкин Александр Ефимович окончил МВТУ им. Н.Э. Баумана. Д-р техн. наук, профессор кафедры «Прикладная механика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 70 научных работ в области численных методов расчета конструкций, механики резинокордных композитов и пневматических шин. e-mail: a_belkin@newmail.ru

Семенов Владимир Константинович — ассистент кафедры «Прикладная механика». МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор шести научных работ в области численных методов расчета конструкций и механики эластомерных материалов. e-mail: semenov0811@gmail.com

Mathematical modeling of massive tire stationary rolling on the chassis dynamometer with regard to energy dissipation in rubber

A.E. Belkin, V.K. Semyonov

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

The article examines the problem of mathematical modeling tests of massive tire bench run with the chassis dynamometer. Conducted tests enable to define the characteristics of resistance to the tire rolling. The article contains the main stages of model building. We give a formulation for the contact problem of tire stationary free rolling on the test drum considering the energy dissipation in the rubber during cyclic deformation. We also describe a rubber viscoelastic behavior by the model Bergstrom – Boyce and ascertain its numerical parameters according to the samples tests results. The contact conditions for normal and tangential directions are formulated on basis of the penetration function. For the contact restrictions implementation we use the penalty method and obtain the numerical solution of the three-dimensional viscoelasticity problem by the finite element method. To estimate the adequacy of the built model, we compare the calculation results with the test data received for massive tire on Hasbach test equipment. For this purpose rolling resistance forces under different loads were collated. The pressure distribution in the contact area obtained from calculations and experiments by using XSENSOR Technology Corporation equipment are also juxtaposed.

Keywords: *massive tire, test drum, stationary rolling, energy dissipation, rolling resistance, mathematical modeling, viscoelastic, contact problem.*

REFERENCES

[1] Bapat C.N., Batra R.C. *International journal for numerical methods in engineering*, 1984, vol. 20, pp. 1911–1927.
[2] Oden J.T., Lin T.L. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 1986, vol. 57, iss. 3, pp. 297–367.
[3] Oden J.T., Lin T.L., Bass J.M. *Tire science and technology*, 1988, vol. 16, no. 1, pp. 18–43.
[4] Le Tallec P., Rahier C. *International journal for numerical methods in engineering*, 1994, vol. 37, pp. 1159–1186.
[5] Nackenhorst U. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 2004, vol. 193, issues 39–41, pp. 4299–4322.
[6] Wriggers P. *Archives of computational methods in engineering*, 1995, vol. 2, issue 4, pp. 1–49.
[7] Guangdi Hu, Wriggers P. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 2002, vol. 191, no. 13, pp. 1333–1348.
[8] Bergström J.S., Boyce M.C. *Mech. Phys. Solids*, 1998, vol. 46, pp. 931–954.
[9] Bergström J.S., Boyce M.C. *Rubber Chem. Technol*., 1999, vol. 72, pp. 633–656.
[10] Semyonov V.K., Belkin A.E. *Izvestiya visshikh uchebnikh zavedenyy. Mashinostroyeniy — Proceedings of Higher Educational Institutions. Machine Building*, 2014, no. 2, pp. 46–51.
[11] Belkin A.E., Dashtiyev I.Z., Lonkin B.V. *Matematicheskoye modelirovaniye i chislennyye metody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2014, no. 3, pp. 39–54.
[12] Semyonov V.K , Belkin A.E., Veselov A.V. *Inzhenernyy vestnik — Engineering Herald*, 2014, no. 12, pp. 151–160.

Belkin A.E. graduated from Bauman Moscow Higher Technical School. Dr. Sci. (Eng.), professor of the Applied Mechanics Department at Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 70 publications on numerical methods of design calculation, mechanics of rubber-cord composites and pneumatic tires. e-mail: a_belkin@newmail.ru

Semenov V.K., Assistant of the Applied Mechanics Department at Bauman Moscow State Technical University. Author of six publications in the field of numerical calculation methods of structures and mechanics of elastomeric materials. e-mail: semenov0811@gmail.com