



# Математическое моделирование и численные методы

Шокиров Ф. Ш. Математическое моделирование бризеров двумерной  $O(3)$  нелинейной сигма-модели. Математическое моделирование и численные методы, 2016, №4 (12), с. 3-16

Источник: <https://mmcm.bmstu.ru/articles/81/>

## Математическое моделирование бризеров двумерной О(3) нелинейной сигма-модели

© Ф.Ш. Шокиров

Физико-технический институт им. С.У. Умарова  
Академии наук Республики Таджикистан, Душанбе, 734063, Таджикистан

*Проведено исследование процессов формирования и эволюции стационарных и движущихся бризеров двумерной О(3) нелинейной сигма-модели. Определен аналитический вид пробных функций двумерного уравнения синус-Гордона, которые эволюционируют к периодическим во времени (бризерным) решениям. На основе найденных решений добавлением вращений вектору А3-поля в изотопическом пространстве  $S^2$  получены решения для О(3) нелинейной сигма-модели. Выполнено численное исследование динамики полученных решений, показана их стабильность в стационарном и движущемся состояниях в течение достаточно долгого времени, хотя и при наличии слабого излучения.*

**Ключевые слова:** двумерный бризер, нелинейная сигма-модель, уравнение синус-Гордона, усредненный лагранжиан, изотопическое пространство, численное моделирование.

**Введение.** Самолокализованные в пространстве и периодические во времени решения бризерного типа нелинейных теоретико-полевых моделей, состоящих из двух противофазных солитонов, привлекают внимание многих исследователей [1–9]. Процессы формирования пространственно-однородных колебательных мод, которые можно интерпретировать как классические модели составных частиц (например, поле мезонов), представляют особый интерес в солитонной теории. Определение условий, приводящих к формированию устойчивых частицеподобных возбуждений, — один из ключевых вопросов нелинейных теоретико-полевых моделей, допускающих локализованные (солитонные) решения. Особый класс практических задач в солитонной теории представляет поиск осциллирующих решений, когерентных структур, обладающих собственной динамикой внутренней степени свободы, — бионов, бризеров, дублетов, пульсонов и т. д.

Рассмотрим метод решения этой задачи, предложенный в работе [1], где исследованы процессы формирования и эволюции бризерных решений двумерного уравнения синус-Гордона (С–Г):

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} + \sin u = 0, \quad (1)$$

в лагранжевом и гамильтоновом подходах. В частности, на основе пробной функции вида

$$u(x, y, t) = -4 \operatorname{arctg} \left[ \frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}} \sin(v) \operatorname{sech}(\lambda x) \operatorname{sech}(\lambda y) \right], \quad (2)$$

$$\lambda = \lambda(t), \quad v = v(t)$$

авторами работы [1] в гамильтоновом подходе были получены численные и асимптотические решения уравнения (1) в виде устойчивых стационарных и движущихся бризерных солитонов.

В настоящей работе продолжены исследования, проведенные авторами работы [1] в лагранжевом подходе. В частности, усреднением лагранжиана

$$L = \frac{1}{2} (u_t^2 - u_x^2 - u_y^2) - 1 + \cos u \quad (3)$$

уравнения (1) относительно быстрой фазы  $v(t)$  и решением интегрального уравнения вида

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} L dv \quad (4)$$

получены выражения для фазовых переменных  $\lambda(t)$  и  $v(t)$  пробного решения (2), которые приведены во второй части работы. На основе найденных решений уравнения С–Г (1) добавлением специально подобранных возмущений вектору А3-поля изотопического пространства  $S^2$  [9–12] получены решения двумерной О(3) нелинейной сигма-модели (НСМ). Заметим, что в работе [1] интегральное уравнение (4) решено асимптотическими методами, а результаты, полученные таким образом в лагранжевом подходе, не приведены.

В третьей и четвертой частях настоящей статьи представлены результаты численного моделирования [13, 14] найденных бризеров уравнения (1) (в качестве тестовых задач) и двумерной О(3) НСМ в стационарном и движущемся состояниях. Полученные в рамках О(3) НСМ устойчивые периодические решения, названные в этой статье бризерами, при эволюции освобождаются от лишней энергии в виде радиально-симметричных линейных волн возмущений, поглощаемых на краях области моделирования специально разработанными граничными условиями [9–12, 15, 16]. В последней части работы приведены свойства полученных результатов и возможные способы их применения для исследования других задач.

**Теоретические расчеты.** В настоящей работе усредненная плотность лагранжиана (3) получена в следующем виде:

$$\mathcal{L} = \Xi(\lambda) \lambda_t^2 + \Omega(\lambda) v_t^2 - \Theta(\lambda), \quad (5)$$

$$\text{где } \Xi(\lambda) = \frac{2}{(1-\lambda^2)^{3/2}}; \quad \lambda = \lambda(t); \quad \Omega(\lambda) = \frac{4\lambda^2}{\sqrt{1-\lambda^2}}; \quad v = v(t); \quad \Theta(\lambda) = \\ = \frac{48}{\lambda} \operatorname{arsh}(\lambda) - 32.$$

Заметим, что динамику пробной функции (2) можно описать исследованием свойств фазовых параметров [1]  $\lambda(t)$  и  $v(t)$ , которые в рассматриваемом случае определены [17] из уравнений:

$$\lambda_{tt} + f(\lambda)\lambda_t^2 + g(\lambda) = 0, \quad (6)$$

$$v_{tt} + \frac{2-\lambda^2}{\lambda(1-\lambda^2)} \lambda_t v_t = 0, \quad (7)$$

где

$$f(\lambda) = \frac{3\lambda}{2(1-\lambda^2)}; \\ g(\lambda) = -\lambda(2-\lambda^2)v_t^2 - \frac{12\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda^2} \left( (1-\lambda^2) \operatorname{arcth}(\lambda) - \lambda \right).$$

Напомним, что уравнения Эйлера — Лагранжа двумерной  $O(3)$  НСМ для анизотропного случая [10–12, 15, 16] есть

$$2\partial_\mu\theta\partial^\mu\theta + \sin 2\theta \left( 1 - \partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi \right) = 0, \quad (8)$$

$$2\cos\theta\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi + \sin\theta\partial_\mu\partial^\mu\varphi = 0,$$

где  $\mu = 0, 1, 2$ ;  $\theta(x, y, t)$ ,  $\varphi(x, y, t)$  — эйлеровы углы, связанные с изоспиновыми параметрами модели (8) следующим образом:

$$s_1 = \sin\theta\cos\varphi, \quad s_2 = \sin\theta\sin\varphi, \quad s_3 = \cos\theta, \quad s_i s_i = 1, \quad i = 1, 2, 3.$$

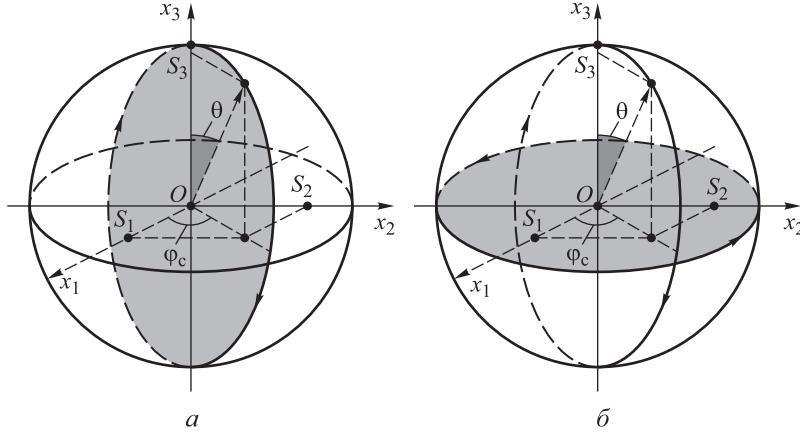
Отметим, что уравнения (8) в специальной параметризации  $2\theta$  меридианного сечения  $\varphi_0(x, y, t) = \text{const}$  изотопического пространства сферы  $S^2$  (рис. 1, *a*) сводятся [9–12] к уравнению (1) вида:

$$2\square\theta = -\sin 2\theta. \quad (9)$$

Таким образом, в качестве начального приближения можно использовать выражение для пробной функции (2) уравнения С–Г (1) и, соответственно, вводя в него некоторое специальным образом подобранное возмущение (рис. 1, *б*):

$$\varphi(x, y, t) = \varphi_c(x, y, t_0) + \omega\tau, \quad \omega \neq 0, 0,$$

путем решения задачи Коши получить новые численные решения О(3) НСМ (8) [9–12].



**Рис. 1.** Динамика изотопического спина  $S(s_1, s_2, s_3)$  в пространстве сферы  $S^2$ :

*a* — в меридианном сечении  $\varphi_c = \text{const}$  (поле уравнения С–Г в рамках НСМ);

*б* — с наличием вращения  $0 \leq \varphi_v \leq 2\pi$  (поле НСМ)

Для полевых функций  $s_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) имеем

$$s_1 = -\frac{2\xi}{1+\xi^2} \cos \varphi, \quad s_2 = -\frac{2\xi}{1+\xi^2} \sin \varphi, \quad s_3 = \frac{1-\xi^2}{1+\xi^2}, \quad (10)$$

$$\xi(x, y, t) = \frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}} \frac{\sin(v)}{\cosh(\lambda x) \cosh(\lambda y)}.$$

Для численной схемы применен алгоритм, разработанный в трудах [9, 15, 16], где использованы свойства стереографической проекции (рис. 2): точки верхней полусфера ( $s_3 > 0$ ) проецируются на касательную комплексную плоскость, проходящую через «северный полюс», точки нижней полусфера ( $s_3 < 0$ ) — на касательную плоскость, проходящую через «южный полюс» блоховской сферы  $S^2$ . В точках «экватора» ( $s_3 = 0$ ) специальным образом производится «прошивка» решения, и, таким образом, выполняется взаимно однозначная проекция (компактификация  $S^2 - R_{\text{comp}}^2$ ) всех точек комплексной плоскости  $z$  (включая  $(x, y) = \infty$ )

$$z = x + iy = \frac{s_1 + is_2}{1 \pm s_3} = \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} \quad (11)$$

и сферы  $S^2$ :

$$s_i s_i = 1, \quad i = 1, 2, 3.$$

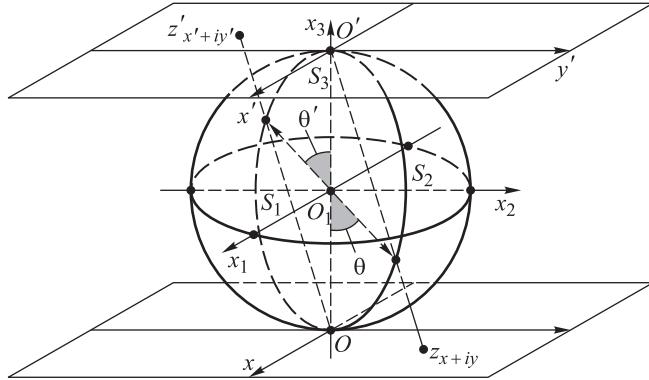


Рис. 2. Алгоритм применения свойств стереографической проекции

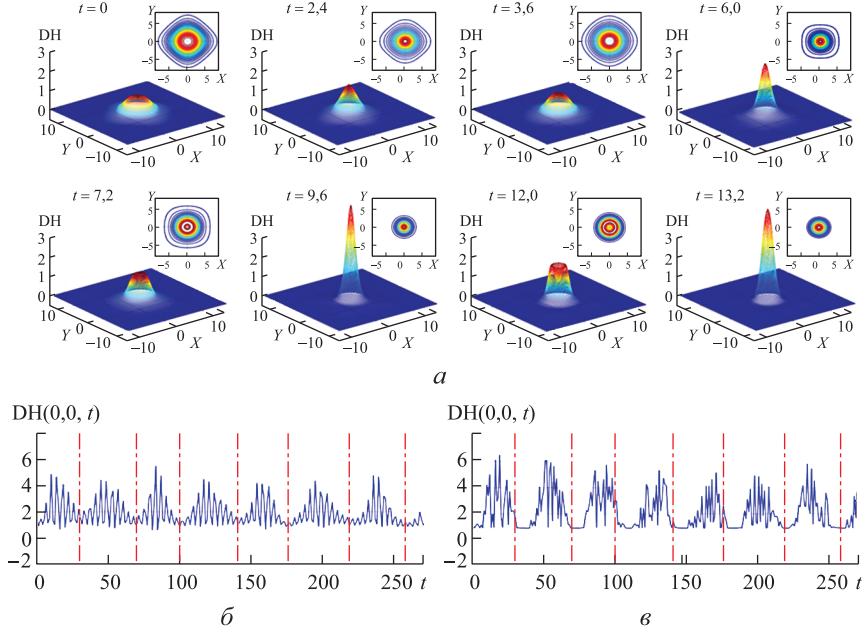
Составлены трехслойные явные разностные схемы [9–16] с погрешностью аппроксимации второго порядка точности по времени и координате  $O(h^2 + \tau^2)$  [13, 14]. С учетом воздействия граничных поглощающих условий интеграл энергии полученных моделей сохранялся с хорошей точностью  $En_{loss} < 5,15\%$  в пределах 45 000 итерационных циклов ( $t \in [0, 0, 270, 0]$ ). Получены хорошие согласования между численными и аналитическими расчетами.

**Стационарные бризеры.** На первом этапе в качестве тестовых моделей получены устойчивые стационарные численные бризеры (10) уравнения С–Г (9) (в рамках модели (8) при  $\omega = 0, 0$ ), которые, изначально не являясь радиально-симметричными, эволюционировали к радиально-симметричному виду. Данное свойство подробно исследовано в работе [1]. Однако в отличие от результатов работы [1] в этой статье процесс перехода бризерного решения к радиально-симметричной форме происходит периодически (рис. 3).

На рис. 3, а приведен процесс эволюции бризерного решения (10) модели (9), в котором изначально квадратичная контурная структура бризера плавно принимает радиально-симметричную форму. В данном случае приведена эволюция плотности энергии DH бризерного поля при  $t \in [0, 0, 13, 2]$ . Плотность энергии DH определена на основе гамильтониана двумерной  $O(3)$  НСМ (в изоспиновой параметризации, Ip) [10–12, 15, 16]:

$$\mathcal{H}_{Ip} = \frac{1}{2} \left[ (\partial_0 s_a)^2 + (\partial_1 s_a)^2 + (\partial_2 s_a)^2 + (1 - s_3^2) \right],$$

$$s_a s_a = 1, \quad a = 1, 2, 3.$$

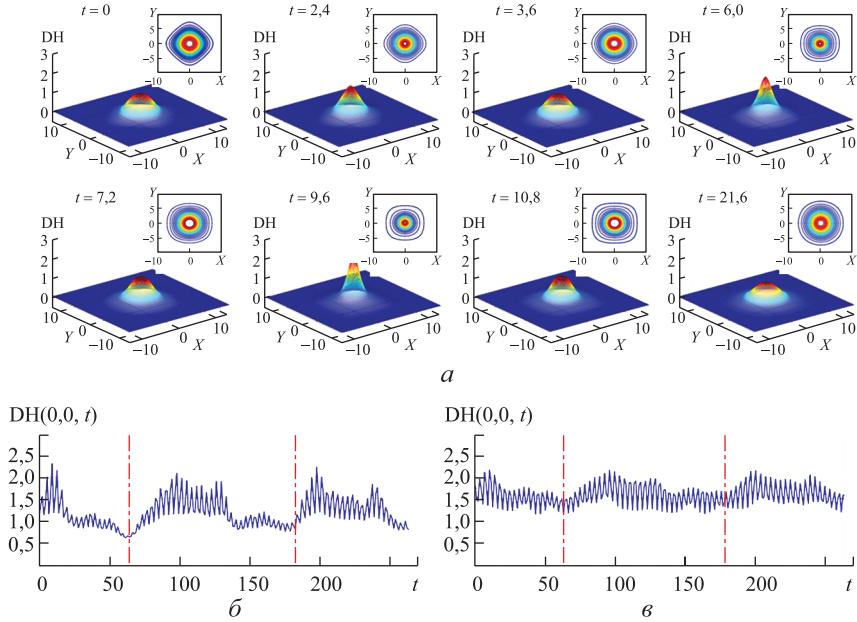


**Рис. 3.** Эволюция плотности энергии DH бризерных решений (10) модели (8) (уравнения (9) при  $\omega = 0,0$ ),  $t \in [0,0, 13,2]$  (а). Значения  $DH(0,0,t)$  получены численным моделированием (б) и аналитически (в). Общее время моделирования  $t \in [0,0, 270,0]$

Как было отмечено выше, в рассматриваемом случае процесс перехода бризерного решения (10) к радиально-симметричной форме имеет периодический характер. Обратим внимание на изменения значений плотности энергии DH центральной части бризера (точка  $x_0, y_0$ ), полученные в результате численного моделирования (рис. 3, б) и аналитических методов (рис. 3, в). В случае, приведенном на рис. 3, динамику центральной точки плотности энергии бризерного поля  $DH(x_0, y_0, t)$  в течение всего времени моделирования ( $t \in [0,0, 270,0]$ ) можно условно подразделить на периодически повторяющиеся волновые пакеты (в данном случае наблюдаются семь условных пакетов волн разной продолжительности  $t \in (30,0, 45,0)$ ). В каждом волновом пакете бризерное решение (10), изначально не являясь радиально-симметричным (рис. 3, а), эволюционирует к радиально-симметричному виду, но в конце каждого пакета снова теряет данное свойство [17].

Для тестовых моделей (см. рис. 3) добавлением вращения вектору АЗ-поля (в нашем случае  $\omega = 0,5$ ) в изотопическом пространстве  $S^2$

получены устойчивые бризеры двумерной  $O(3)$  НСМ (8). На рис. 4 даны иллюстрации эволюции плотности энергии DH численных бризеров (10)  $O(3)$  НСМ (8) при  $\omega = 0,5$ .



**Рис. 4.** Эволюция плотности энергии DH бризерных решений (10) модели (8) при  $\omega = 0,5$ ,  $t \in [0,0, 21,6]$  (а). Значения  $DH(0,0, t)$ , полученные численным моделированием (б) и аналитически (в). Общее время моделирования —  $t \in [0,0, 270,0]$

Графики на рис. 4, б, в показывают, что в течение всего времени моделирования ( $t \in [0,0, 270,0]$ ) значения амплитуды центральной точки бризерного поля можно условно подразделить на периодически повторяющиеся волновые пакеты (в данном случае наблюдаются три условных пакета волн разной продолжительности  $t \in (60,0, 120,0)$ ). В каждом волновом пакете бризерное решение (10), изначально не являясь радиально-симметричным, эволюционирует к радиально-симметричному виду (рис. 4, а), но в конце каждого пакета снова теряет данное свойство [17].

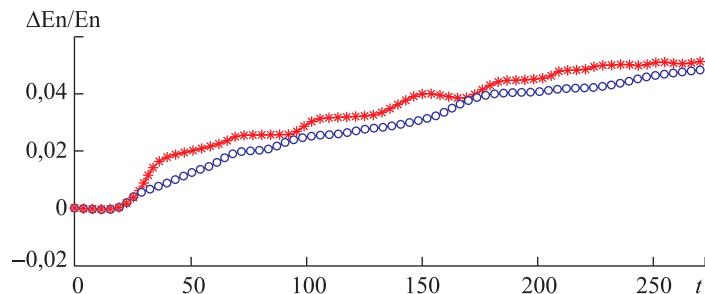
Заметим, что плотности энергии DH центральной части бризеров (10)  $O(3)$  НСМ (8) при наличии вращения вектора А3-поля  $\omega \neq 0,0$  ( $DH_{\max} \approx 2,3291$  в случае  $\omega = 0,5$ ) значительно меньше относительно случая  $\omega = 0,0$  ( $DH_{\max} \approx 5,5539$ ). При этом бризеры (10)  $O(3)$  НСМ (8) ( $\omega \neq 0,0$ ) обладают большей энергией  $E_n$  относитель-

но бризеров уравнения С–Г (9) (в рамках О(3) ВНСМ при  $\omega = 0,0$ ). Бризерное поле (10) уравнения С–Г (9) по отношению к О(3) НСМ (8) при  $t > 0,0$  обладает более сильным градиентом в центральной части, а также большими значениями амплитуды осциллирующей динамики центральной точки (см. рис. 3, *a*). Тем не менее численные и аналитические расчеты показывают, что бризерное поле (10) в случае  $\omega > 0,0$  (бризеры О(3) НСМ) действует в более широком градиентном поле и обладает относительно большими значениями интеграла энергии  $En$  [17]. Более того, наличие вращения изотопического спина  $S(s_1, s_2, s_3)$  в пространстве сферы  $S^2$  (в данном случае  $\omega = 0,5$ ) привело к определенному увеличению устойчивости бризеров (10) О(3) НСМ. При численном моделировании в течение 45 000 итерационных циклов ( $t \in [0,0, 270,0]$ ) общая потеря энергии  $En_{loss}$  бризеров (10) О(3) НСМ составила:

$$En_{loss} (\omega = 0,5) \approx 4,823 \%,$$

что примерно на 6 % меньше аналогичных потерь бризеров уравнения С–Г (рис. 5):

$$En_{loss} (\omega = 0,0) \approx 5,109 \%.$$



**Рис. 5.** Потеря энергии  $En_{loss}$  бризеров (10) модели (8)

для случаев:

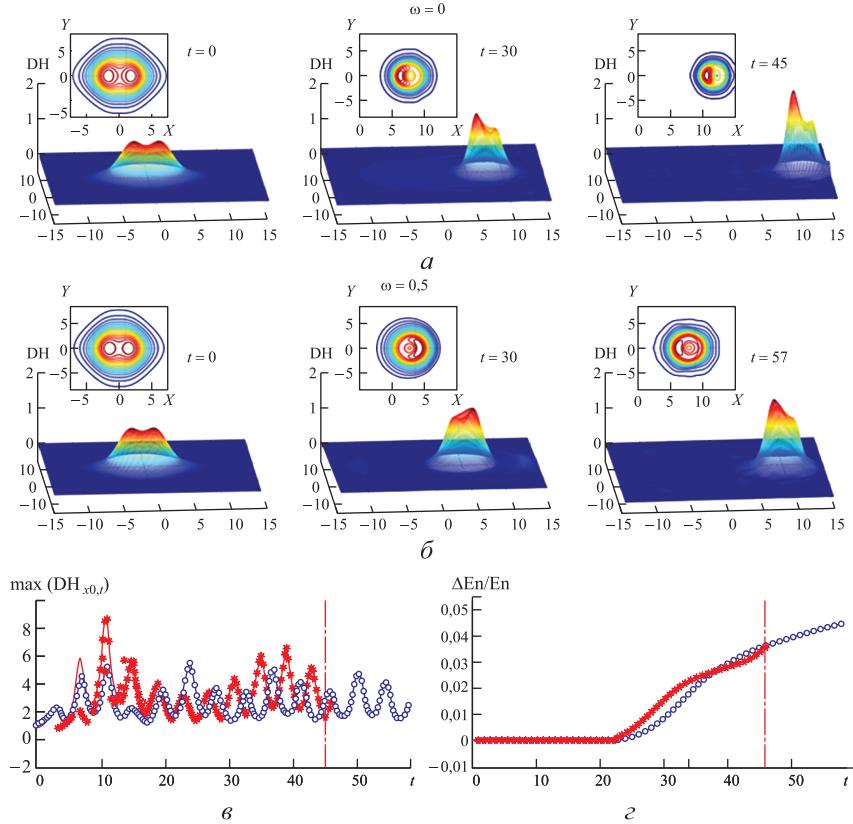
—\*—  $En_{loss} (\omega = 0,0) \approx 5,1 \%$ ; —○—  $En_{loss} (\omega = 0,5) \approx 4,82 \%$ .

Время моделирования  $t \in [0,0, 270,0]$

**Движущиеся бризеры.** Свойства Лоренц-инвариантности О(3) НСМ позволяют получить также модели движущихся решений. На рис. 6 приведены состояние плотности энергии DH бризера (10) двумерной О(3) НСМ (8) для случаев  $\omega = 0,0$  (*a*) и  $\omega = 0,5$  (*б*) при заданной преобразованием Лоренца начальной (при  $t_0 = 0,0$ ) скорости

$v_{t_0} \approx 0,7071$ . Как видно на рис. 6,  $a$ , движущийся бризер сохраняет устойчивость, потеря энергии на излучение при  $t = 45,0$  составляет  $En_{loss} \approx 3,3731\%$  и  $En_{loss} \approx 3,5401\%$  для случаев  $\omega = 0,0$  и  $\omega = 0,5$  соответственно.

Отметим еще раз, что в наших моделях на краях области моделирования (в данном случае  $L_m [3001 \times 3001]$ ) вставлены специальные граничные условия, которые поглощают излучаемую осциллирующим солитоном лишнюю энергию в виде линейных волн возмущений. Как и в стационарном случае, контурные проекции плотности энергии DH моделей эволюции движущихся решений (10) показывают, что в случае  $\omega = 0,5$  бризеры обладают более широким ненулевым градиентным полем (рис. 6).



**Рис. 6.** Эволюция плотности энергии DH, движущегося бризера (10)  $O(3)$  HCM (8):  
 $a$  — при  $t \in [0,0, 45,0]$ ;  $b$  — при  $t \in [0,0, 57,0]$ ;  $\vartheta$  — максимальные значения DH в сечении  $(x, y_0)$ ;  $\varepsilon$  — точность сохранения интеграла энергии бризерного поля  $\left(\frac{\Delta En}{En}\right)$ ;  $\textcolor{red}{\star}$  — для  $\omega = 0,0$  (SG);  $\textcolor{blue}{\circ}$  — для  $\omega = 0,5$  (NSM). Общее время моделирования  $t \in [0,0, 60,0]$

В случае движущихся бризеров необходимо отметить некоторые особенности изменения скорости их движения. Например, в работе [12] при исследовании взаимодействия одномерных бризеров О(3) НСМ было найдено, что скорость  $v_t$  ( $t > 0,0$ ) движения бризеров всегда меньше их начальной скорости  $v_{t_0} > v_t$ , тогда как при исследовании движущихся ТС типа кинк/антикинк всегда сохранялось равенство  $v_{t_0} \equiv v_t$ . Очевидно, что в случае бризеров определенная часть их энергии в начале эволюции  $\text{En}(v_{t_0})$  поглощается характерной осциллирующей динамикой. На рис. 6, *a* двумерный бризер (10) при  $t = 30,0$  проходит расстояние, равное  $s \approx 8$  единицам (средняя скорость —  $v_{t=30} \approx 0,2666$ ), и общая потеря скорости  $v_{\text{loss}} \approx 0,623\%$ . При  $t = 45,0$  бризер проходит расстояние  $s \approx 12$ , таким образом, скорость движения бризера (10) при  $v_{t_0} \approx 0,7071$  является постоянной:  $v_t \approx 0,2666$  (при  $t > 0,0$  и  $\omega = 0,0$ ).

На рис. 6, *б* (в случае  $\omega = 0,5$  и  $v_{t_0} \approx 0,7071$ ) при  $t = 30,0$  бризер проходит расстояние  $s \approx 5$  единиц (средняя скорость —  $v_{t=30} \approx 0,1666$ , общая потеря скорости  $v_{\text{loss}} \approx 0,7644\%$ ). При  $t = 57,0$  бризер проходит расстояние  $s \approx 10$ , таким образом, в интервале  $t \in [30,0, 57,0]$  можно наблюдать увеличение средней скорости движения бризера (10) до  $v_{t=57} \approx 0,1754$  ( $\approx 5,3\%$ ). Разность скоростей в случаях  $\omega = 0,0$  (рис. 6, *а*) и  $\omega = 0,5$  (рис. 6, *б*), а также неравномерность значений скорости бризеров (10) О(3) НСМ (8) можно объяснить воздействием дополнительной динамики вращения изотопического спина  $S(s_1, s_2, s_3)$  в пространстве сферы  $S^2$ .

Анализ максимальных значений плотности энергии ДН бризеров (10) модели (8) в плоскостном сечении  $(x, y_0)$  приведен на рис. 6, *в*:  $\max(\text{DH}(x, 0, t))$ . В случае  $\omega = 0,0$  аналогично стационарному случаю, приведенному на рис. 3, можно условно выделить образование двух волновых пакетов  $t_1 \approx (0,0, 25,0)$ ,  $t_2 \approx (25,0, 50,0)$ . В случае  $\omega = 0,5$  точка  $\max(\text{DH}(x, 0, t))$  осциллирует с относительно меньшими средними значениями частоты и амплитуды. В частности, при исследовании скорости движения бризера (10) модели (8) (при  $\omega = 0,5$ ) выявлено существенное уменьшение ее значений в интервале  $t_{v_t} \approx (13,0, 17,0)$ :  $v_t \rightarrow 0,0$ . Эти факторы объясняют обнаруженные выше разности скоростей бризеров (10) до и после момента  $t = 30,0$  для случая  $\omega = 0,5$ .

**Заключение.** В настоящей работе получены уравнения (6), (7) для фазовых параметров пробного решения (2) и определено точное аналитическое выражение для бризерного решения двумерного уравнения С–Г (9). Добавлением определенных возмущений найденным решениям получены бризерные решения (10) двумерной  $O(3)$  НСМ (8).

Отметим, что движущиеся осциллирующие решения в виде световых пуль двумерного уравнения С–Г, рассмотренные в работе [2], и стационарные периодические по времени решения, указанные в работе [3] (метастабильные бризеры), были получены приближенными методами. Движущиеся бризеры уравнения С–Г, полученные в работе [1] при численном моделировании в интервале времени  $t \in [0,0, 50,0]$ , излучают существенную часть своей энергии, точная величина которой в указанной работе не приводится.

Модели стационарных и движущихся бризеров двумерной  $O(3)$  НСМ, полученные в настоящей работе аналитическими и численными методами, показывают их устойчивость при различных значениях скорости их движения  $v_{t_0}$  и частоты вращения  $\omega_{t_0}$  вектора изотопического спина  $\vec{S}(s_1, s_2, s_3)$  в пространстве сферы  $S^2$ . Наличие дополнительного вращения  $S$  ( $\phi = \phi_0 + \omega t$ ,  $\omega \neq 0,0$ ) приводит к определенной диссипации динамики внутренней степени свободы и плотности энергии DH бризеров (10), а также к увеличению интеграла их энергии En (см. рис. 5).

Необходимо отметить также отличительное свойство полученных бризерных солитонов вида (10), которое заключается в их особой динамике (см. рис. 3, б, в, рис. 4, б, в), напоминающей динамику систем с разрывными колебаниями. Такие колебания происходят во многих нелинейных системах, и их исследование представляет определенный практический интерес. Наконец, заметим, что результаты настоящей работы позволяют провести исследования динамики взаимодействия бризеров двумерной  $O(3)$  НСМ, где в полной мере могут быть проявлены их особые частицеподобные свойства [18].

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Minzoni A.A., Smyth N.F., Worthy A.L. Evolution of two-dimensional standing and travelling breather solutions for the Sine-Gordon equation. *Physica D. Nonlinear Phenomena*, 2004, vol. 189, issue 3–4, pp. 167–187.
- [2] Xin J.X. Modeling light bullets with the two-dimensional Sine-Gordon equation. *Physica D. Nonlinear Phenomena*, 2000, vol. 135, issue 3–4, pp. 345–368.
- [3] Piette B., Zakrjewsky W.J. Metastable stationary solutions of the radial D-dimensional sine-Gordon model. *Nonlinearity*, 1998, no. 11, pp. 1103–1110.
- [4] Smyth N.F., Worthy A.L. Soliton evolution and radiation loss for the sine-Gordon equation. *Physical Review E*, 1999, no. 60, pp. 2330–2336.
- [5] Minzoni A.A., Smyth N.F., Worthy A.L. Pulse evolution for a two-dimensional Sine-Gordon equation. *Physica D. Nonlinear Phenomena*, 2001, no. 159, pp. 101–123.

- [6] Malomed B.A. Decay of shrinking solitons in multidimensional sine-Gordon equation. *Physica D. Nonlinear Phenomena*, 1987, vol. 24, issue 1–3, pp. 155–171.
- [7] Christiansen P.L., Gronbech-Jensen N., Lomdahl P.S., Malomed B.A. Oscillations of eccentric pulsions. *Physica Scripta*, 1997, vol. 55, pp. 131–134.
- [8] Geicke J. Cylindrical pulsions in nonlinear relativistic wave equations. *Physica Scripta A*, 1984, vol. 29, no. 5, pp. 431–434.
- [9] Муминов Х.Х., Чистяков Д.Ю. Новый тип бионных возбуждений в модели классического антиферромагнетика Гейзенберга. *Доклады АН РТ*, 2004, т. 47, № 9–10, с. 45–50.
- [10] Муминов Х.Х., Шокиров Ф.Ш. Новые двумерные бризерные решения О(3) векторной нелинейной сигма-модели. *Доклады АН РТ*, 2011, т. 54, № 10, с. 825–830.
- [11] Muminov Kh.Kh., Shokirov F.Sh. Dynamics of two-dimensional breathers in O(3) vectorial nonlinear sigma-model. *The Book of abstracts of the Int. Conf. Mathematic. modeling and computational physics*. Russia, Dubna, 2013, p. 134.
- [12] Муминов Х.Х., Шокиров Ф.Ш. Численное моделирование бризеров 1D и 2D О(3) векторной нелинейной сигма-модели. *II Всерос. конф. по проблемам динамики, физики частиц, физики плазмы и оптоэлектроники. Тезисы докладов*. Москва, РУДН, 2015, с. 94–98.
- [13] Самарский А.А. *Теория разностных схем*. Москва, Наука, 1977, 656 с.
- [14] Samarsky A.A., Vabishhevich P.N., Gulin A.V. Stability of operator-difference schemes. *Differential Equations*, vol. 35, no. 2, 1999, pp. 151–186.
- [15] Муминов Х.Х. О существовании и устойчивости двумерных топологических солитонов в модели изотропного классического антиферромагнетика Гейзенберга. *Доклады АН РТ*, 2002, т. 45, № 10, с. 21–27.
- [16] Муминов Х.Х. Многомерные динамические топологические солитоны в нелинейной анизотропной сигма-модели. *Доклады АН РТ*, 2002, т. 45, № 10, с. 28–36.
- [17] Shokirov F.Sh. Stationary and moving breathers in (2+1)-dimensional O(3) nonlinear  $\sigma$ -model. *MathPubs*, 2016. URL: <http://www.mathpubs.com/detail/1605.01000v1/Stationary-and-moving-breathers-in-21-dimensional-O3-nonlinearmodel> (data access 29.08.2016)
- [18] Маханьков В.Г. Солитоны и численный эксперимент. *ФЭЧАЯ*, 1983, т. 14, № 1, с. 123–180.

Статья поступила в редакцию 23.01.2017

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Шокиров Ф.Ш. Математическое моделирование бризеров двумерной О(3) нелинейной сигма-модели. *Математическое моделирование и численные методы*, 2016, № 4 (12), с. 3–16.

**Шокиров Фарход Шамсидинович** окончил Худжандский государственный университет имени академика Б. Гафурова. Канд. физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник отдела «Наноматериалов и нанотехнологий» Физико-технического института им. С.У. Умарова Академии наук Республики Таджикистан. Область научных интересов: физика магнитных и нелинейных явлений. e-mail: shokirov@phti.tj

## Mathematical modeling of breathers of two-dimensional $O(3)$ nonlinear sigma model

© F.Sh. Shokirov

S.U. Umarov Physical-Technical Institute  
of Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan, Dushanbe, 734063, Tajikistan

*The study examined the formation and evolution of stationary and moving breathers of a two-dimensional  $O(3)$  nonlinear sigma model. We detected analytical form of trial functions of two-dimensional sine-Gordon equations, which over time evolve into periodic (breather) solutions. According to the solutions found, by adding the rotation to an A3-field vector in isotopic space  $S^2$  we obtained the solutions for the  $O(3)$  nonlinear sigma model. Furthermore, we conducted the numerical study of the solutions dynamics and showed their stability in a stationary and a moving state for quite a long time, although in the presence of a weak radiation.*

**Keywords:** two-dimensional breather, nonlinear sigma model, sine-Gordon equation, averaged Lagrangian, isotopic space, numerical simulation.

### REFERENCES

- [1] Minzoni A.A., Smyth N.F., Worthy A.L. *Physica D. Nonlinear Phenomena*, 2004, vol. 189, issue 3–4, pp. 167–187.
- [2] Xin J.X. *Physica D. Nonlinear Phenomena*, 2000, vol. 135, issue 3–4, pp. 345–368.
- [3] Piette B., Zakrjewsky W.J. *Nonlinearity*, 1998, no. 11, pp. 1103–1110.
- [4] Smyth N.F., Worthy A.L. Soliton evolution and radiation loss for the sine-Gordon equation. *Physical Review E*, 1999, no. 60, pp. 2330–2336.
- [5] Minzoni A.A., Smyth N.F., Worthy A.L. *Physica D. Nonlinear Phenomena*, 2001, no. 159, pp. 101–123.
- [6] Malomed B.A. *Physica D. Nonlinear Phenomena*, 1987, pp. 155–171.
- [7] Christiansen P.L., Gronbech-Jensen N., Lomdahl P.S., Malomed B.A. *Physica Scripta*, 1997, vol. 55, pp. 131–134.
- [8] Geicke J. *Physica Scripta A*, 1984, vol. 29, pp. 431–434.
- [9] Muminov Kh.Kh., Chistyakov D.Yu. *Doklady Akademii nauk Respublikii Tadzhikistan — Reports of Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan*, 2004, vol. 47, no. 9–10, pp. 45–50.
- [10] Muminov Kh.Kh., Shokirov F.Sh. *Doklady Akademii nauk Respublikii Tadzhikistan — Reports of Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan*, 2011, vol. 54, no. 10, pp. 825–830.
- [11] Muminov Kh.Kh., Shokirov F.Sh. *The Book of abstracts of the International Conference Mathematical modeling and computational physics*. Russia, Dubna, 2013, p. 134.
- [12] Muminov Kh.Kh., Shokirov F.Sh. *LI Vserossiskaya konferentsiya po problemam dinamiki, fiziki chastits, fiziki plazmy i optoelektroniki — Proceedings of LI-Russian conference on the problems of dynamics, particle physics, plasma physics and optoelectronics*. Moscow, RUDN University Publ., 2015, pp. 94–98.
- [13] Samarsky A.A. *Teoriya raznostnykh skhem* [The theory of difference schemes]. Moscow, Nauka Publ., 1977, 656 p.

- [14] Samarsky A.A., Vabishvich P.N., Gulin A.V. Stability of operator-difference schemes. *Differential Equations*, vol. 35, no. 2, 1999, pp. 151–186.
- [15] Muminov Kh.Kh. *Doklady Akademii nauk Respublikii Tadzhikistan — Reports of Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan*, 2002, vol. 45, no. 10, pp. 21–27.
- [16] Muminov Kh.Kh. *Doklady Akademii nauk Respublikii Tadzhikistan — Reports of Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan*, 2002, vol. 45, no. 10, pp. 28–36.
- [17] Shokirov F.Sh. *MathPubs*, 2016. Available at:  
<http://www.mathpubs.com/detail/1605.01000v1/Stationary-and-moving-breathers-in-21-dimensional-O3-nonlinear-model> (data access 29.08.2016). 11 p.
- [18] Mahankov V.G. *Fizika elementarnykh chastits i atomnogo yadra — Physics of Particles & Nuclei*, 1983, vol. 14, no. 1, pp. 123–180.

**Shokirov F.Sh.** graduated from Gafurov Khujand State University. Cand. Sc. (Phys. & Math.), Leading Researcher of Nanomaterials and Nanotechnologies Department at S.U. Umarov Physical-Technical Institute of Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan. Research interests: physics of magnetic and non-linear phenomena.  
e-mail: shokirov@phti.tj