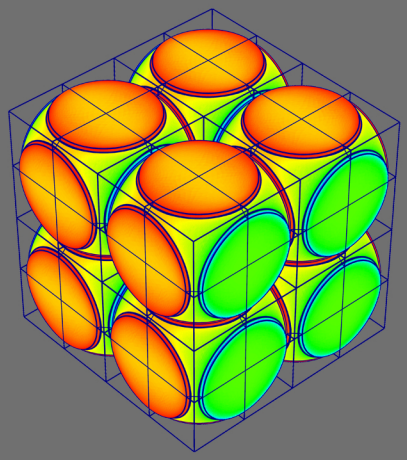
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Шокиров Ф. Ш. Математическое моделирование бризеров двумерной O(3) нелинейной сигма-модели. Математическое моделирование и численные методы, 2016, №4 (12), с. 3-16

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/81/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.216.50
09.10.2026 04:04:39

УДК 537.611+530.146 DOI 10.18698/2309-3684-2016-4-316

Математическое моделирование бризеров двумерной O(3) нелинейной сигма-модели

© Ф.Ш. Шокиров

Физико-технический институт им. С.У. Умарова
Академии наук Республики Таджикистан, Душанбе, 734063, Таджикистан

Проведено исследование процессов формирования и эволюции стационарных и движущихся бризеров двумерной O(3) *нелинейной сигма-модели. Определен аналитический вид пробных функций двумерного уравнения синус-Гордона, которые эволюционируют к периодическим во времени (бризерным) решениям. На основе найденных решений добавлением вращений вектору A3-поля в изотопическом пространстве* S^2 *получены решения для* O(3) *нелинейной сигма-модели. Выполнено численное исследование динамики полученных решений, показана их стабильность в стационарном и движущемся состояниях в течение достаточно долгого времени, хотя и при наличии слабого излучения.*

Ключевые слова: *двумерный бризер, нелинейная сигма-модель, уравнение синус-Гордона, усредненный лагранжиан, изотопическое пространство, численное моделирование.*

Введение. Самолокализованные в пространстве и периодические во времени решения бризерного типа нелинейных теоретико-полевых моделей, состоящих из двух противофазных солитонов, привлекают внимание многих исследователей [1–9]. Процессы формирования пространственно-однородных колебательных мод, которые можно интерпретировать как классические модели составных частиц (например, поле мезонов), представляют особый интерес в солитонной теории. Определение условий, приводящих к формированию устойчивых частицеподобных возбуждений, — один из ключевых вопросов нелинейных теоретико-полевых моделей, допускающих локализованные (солитонные) решения. Особый класс практических задач в солитонной теории представляет поиск осциллирующих решений, когерентных структур, обладающих собственной динамикой внутренней степени свободы, — бионов, бризеров, дублетов, пульсонов и т. д.

Рассмотрим метод решения этой задачи, предложенный в работе [1], где исследованы процессы формирования и эволюции бризерных решений двумерного уравнения синус-Гордона (С–Г):

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} + \sin u = 0, \qquad (1)$$

в лагранжевом и гамильтоновом подходах. В частности, на основе пробной функции вида

$$u(x,y,t) = -4\,\mathrm{arctg}\left[\frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}}\sin(\nu)\,\mathrm{sech}(\lambda x)\,\mathrm{sech}(\lambda y)\right], \qquad (2)$$

$$\lambda = \lambda(t),\ \ \nu = \nu(t)$$

авторами работы [1] в гамильтоновом подходе были получены численные и асимптотические решения уравнения (1) в виде устойчивых стационарных и движущихся бризерных солитонов.

В настоящей работе продолжены исследования, проведенные авторами работы [1] в лагранжевом подходе. В частности, усреднением лагранжиана

$$L = \frac{1}{2}\left(u_t^2 - u_x^2 - u_y^2\right) - 1 + \cos u \qquad (3)$$

уравнения (1) относительно быстрой фазы $\nu(t)$ и решением интегрального уравнения вида

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} L\,d\nu \qquad (4)$$

получены выражения для фазовых переменных $\lambda(t)$ и $\nu(t)$ пробного решения (2), которые приведены во второй части работы. На основе найденных решений уравнения С–Г (1) добавлением специально подобранных возмущений вектору А3-поля изотопического пространства S^2 [9–12] получены решения двумерной О(3) нелинейной сигма-модели (НСМ). Заметим, что в работе [1] интегральное уравнение (4) решено асимптотическими методами, а результаты, полученные таким образом в лагранжевом подходе, не приведены.

В третьей и четвертой частях настоящей статьи представлены результаты численного моделирования [13, 14] найденных бризеров уравнения (1) (в качестве тестовых задач) и двумерной О(3) НСМ в стационарном и движущемся состояниях. Полученные в рамках О(3) НСМ устойчивые периодические решения, названные в этой статье бризерами, при эволюции освобождаются от лишней энергии в виде радиально-симметричных линейных волн возмущений, поглощаемых на краях области моделирования специально разработанными граничными условиями [9–12, 15, 16]. В последней части работы приведены свойства полученных результатов и возможные способы их применения для исследования других задач.

Теоретические расчеты. В настоящей работе усредненная плотность лагранжиана (3) получена в следующем виде:

$$\mathcal{L} = \Xi(\lambda)\lambda_t^2 + \Omega(\lambda)\nu_t^2 - \Theta(\lambda), \qquad (5)$$

где $\Xi(\lambda)=\dfrac{2}{\left(1-\lambda^2\right)^{3/2}}$; $\lambda=\lambda(t)$; $\Omega(\lambda)=\dfrac{4\lambda^2}{\sqrt{1-\lambda^2}}$; $\nu=\nu(t)$; $\Theta(\lambda)=$

$=\dfrac{48}{\lambda}\operatorname{arth}(\lambda)-32.$

Заметим, что динамику пробной функции (2) можно описать исследованием свойств фазовых параметров [1] $\lambda(t)$ и $\nu(t)$, которые в рассматриваемом случае определены [17] из уравнений:

$$\lambda_{tt}+f(\lambda)\lambda_t^2+g(\lambda)=0, \tag{6}$$

$$\nu_{tt}+\frac{2-\lambda^2}{\lambda\left(1-\lambda^2\right)}\lambda_t\nu_t=0, \tag{7}$$

где

$$f(\lambda)=\frac{3\lambda}{2\left(1-\lambda^2\right)};$$

$$g(\lambda)=-\lambda\left(2-\lambda^2\right)\nu_t^2-\frac{12\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda^2}\left(\left(1-\lambda^2\right)\operatorname{arcth}(\lambda)-\lambda\right).$$

Напомним, что уравнения Эйлера — Лагранжа двумерной O(3) НСМ для анизотропного случая [10–12, 15, 16] есть

$$2\partial_\mu\theta\partial^\mu\theta+\sin 2\theta\left(1-\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi\right)=0, \tag{8}$$

$$2\cos\theta\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi+\sin\theta\partial_\mu\partial^\mu\varphi=0,$$

где $\mu=0,1,2$; $\theta(x,y,t)$, $\varphi(x,y,t)$ — эйлеровы углы, связанные с изоспиновыми параметрами модели (8) следующим образом:

$$s_1=\sin\theta\cos\varphi,\ s_2=\sin\theta\sin\varphi,\ s_3=\cos\theta,\ s_is_i=1,\ i=1,2,3.$$

Отметим, что уравнения (8) в специальной параметризации 2θ меридианного сечения $\varphi_0(x,y,t)=\text{const}$ изотопического пространства сферы S^2 (рис. 1, *а*) сводятся [9–12] к уравнению (1) вида:

$$2\Box\theta=-\sin 2\theta. \tag{9}$$

Таким образом, в качестве начального приближения можно использовать выражение для пробной функции (2) уравнения С–Г (1) и, соответственно, вводя в него некоторое специальным образом подобранное возмущение (рис. 1, *б*):

$$\varphi(x,y,t)=\varphi_c(x,y,t_0)+\omega\tau,\ \ \omega\neq 0,0,$$

путем решения задачи Коши получить новые численные решения O(3) НСМ (8) [9–12].

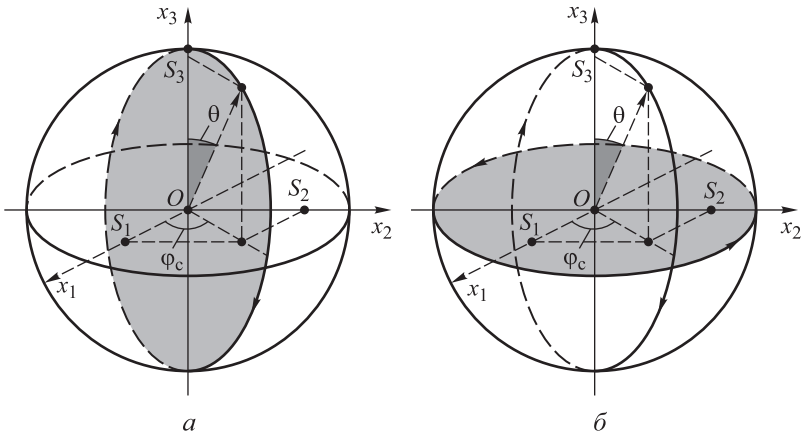


Рис. 1. Динамика изотопического спина $S\left(s_1, s_2, s_3\right)$ в пространстве сферы S^2:

а — в меридианном сечении $\varphi_c = \text{const}$ (поле уравнения С–Г в рамках НСМ);

б — с наличием вращения $0 \le \varphi_v \le 2\pi$ (поле НСМ)

Для полевых функций s_i $\left(i = 1, 2, 3\right)$ имеем

$$s_1 = -\frac{2\xi}{1+\xi^2}\cos\varphi,\ \ s_2 = -\frac{2\xi}{1+\xi^2}\sin\varphi,\ \ s_3 = \frac{1-\xi^2}{1+\xi^2}, \tag{10}$$

$$\xi\left(x, y, t\right) = \frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}}\frac{\sin\left(\nu\right)}{\cosh\left(\lambda x\right)\cosh\left(\lambda y\right)}.$$

Для численной схемы применен алгоритм, разработанный в трудах [9, 15, 16], где использованы свойства стереографической проекции (рис. 2): точки верхней полусферы ($s_3 > 0$) проецируются на касательную комплексную плоскость, проходящую через «северный полюс», точки нижней полусферы $\left(s_3 < 0\right)$ — на касательную плоскость, проходящую через «южный полюс» блоховской сферы S^2. В точках «экватора» $\left(s_3 = 0\right)$ специальным образом производится «прошивка» решения, и, таким образом, выполняется взаимно однозначная проекция (компактификация $S^2 - R^2_{\text{comp}}$) всех точек комплексной плоскости z (включая $\left(x, y\right) = \infty$)

$$z = x + iy = \frac{s_1 + is_2}{1 \pm s_3} = \text{tg}\,\frac{\theta}{2}\,\text{e}^{i\varphi} \tag{11}$$

и сферы S^2:

$$s_i s_i = 1,\ \ i = 1, 2, 3.$$

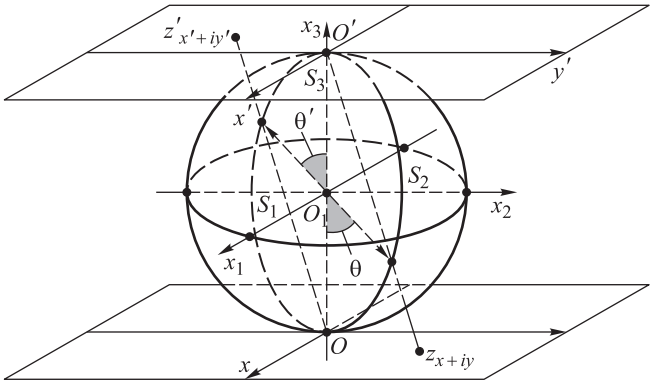


Рис. 2. Алгоритм применения свойств стереографической проекции

Составлены трехслойные явные разностные схемы [9–16] с погрешностью аппроксимации второго порядка точности по времени и координате $O\left(h^2+\tau^2\right)$ [13, 14]. С учетом воздействия граничных поглощающих условий интеграл энергии полученных моделей сохранялся с хорошей точностью $\mathrm{En}_{\mathrm{loss}}<5{,}15\,\%$ в пределах 45 000 итерационных циклов $\left(t\in\left[0{,}0,\ 270{,}0\right]\right)$. Получены хорошие согласования между численными и аналитическими расчетами.

Стационарные бризеры. На первом этапе в качестве тестовых моделей получены устойчивые стационарные численные бризеры (10) уравнения С–Г (9) (в рамках модели (8) при $\omega=0{,}0)$, которые, изначально не являясь радиально-симметричными, эволюционировали к радиально-симметричному виду. Данное свойство подробно исследовано в работе [1]. Однако в отличие от результатов работы [1] в этой статье процесс перехода бризерного решения к радиально-симметричной форме происходит периодически (рис. 3).

На рис. 3, *а* приведен процесс эволюции бризерного решения (10) модели (9), в котором изначально квадратичная контурная структура бризера плавно принимает радиально-симметричную форму. В данном случае приведена эволюция плотности энергии DH бризерного поля при $t\in\left[0{,}0,\ 13{,}2\right]$. Плотность энергии DH определена на основе гамильтониана двумерной O(3) НСМ (в изоспиновой параметризации, Ip) [10–12, 15, 16]:

$$\mathcal{H}_{Ip}=\frac{1}{2}\left[\left(\partial_0 s_a\right)^2+\left(\partial_1 s_a\right)^2+\left(\partial_2 s_a\right)^2+\left(1-s_3^2\right)\right],$$

$$s_a s_a=1,\ \ a=1,2,3.$$

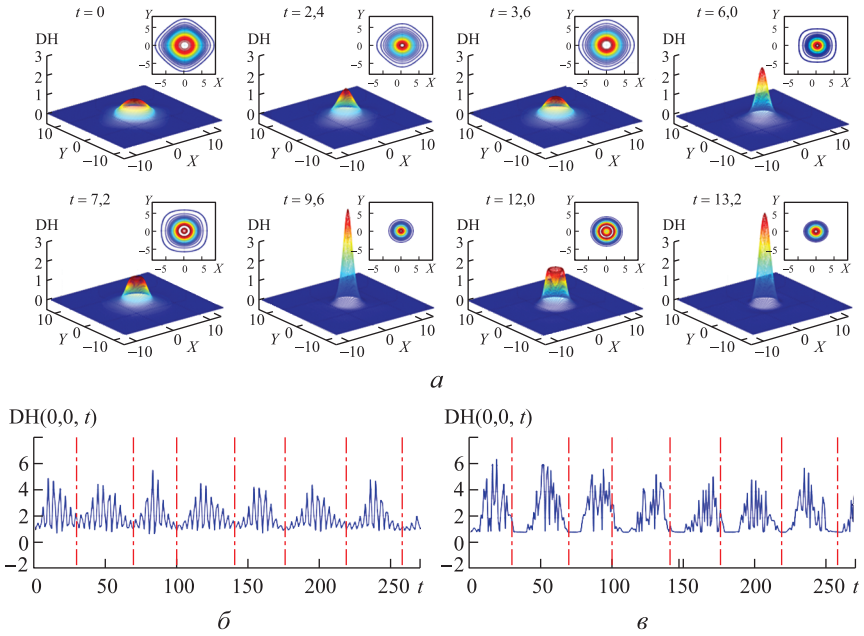


Рис. 3. Эволюция плотности энергии DH бризерных решений (10) модели (8) (уравнения (9) при $\omega = 0{,}0$), $t \in [0{,}0,\ 13{,}2]$ (*а*). Значения $\mathrm{DH}(0{,}0, t)$ получены численным моделированием (*б*) и аналитически (*в*). Общее время моделирования $t \in [0{,}0,\ 270{,}0]$

Как было отмечено выше, в рассматриваемом случае процесс перехода бризерного решения (10) к радиально-симметричной форме имеет периодический характер. Обратим внимание на изменения значений плотности энергии DH центральной части бризера (точка x_0, y_0), полученные в результате численного моделирования (рис. 3, *б*) и аналитических методов (рис. 3, *в*). В случае, приведенном на рис. 3, динамику центральной точки плотности энергии бризерного поля $\mathrm{DH}(x_0, y_0, t)$ в течение всего времени моделирования $(t \in [0{,}0,\ 270{,}0])$ можно условно подразделить на периодически повторяющиеся волновые пакеты (в данном случае наблюдаются семь условных пакетов волн разной продолжительности $t \in (30{,}0,\ 45{,}0)$). В каждом волновом пакете бризерное решение (10), изначально не являясь радиально-симметричным (рис. 3, *а*), эволюционирует к радиально-симметричному виду, но в конце каждого пакета снова теряет данное свойство [17].

Для тестовых моделей (см. рис. 3) добавлением вращения вектору A3-поля (в нашем случае $\omega = 0{,}5$) в изотопическом пространстве S^2

получены устойчивые бризеры двумерной O(3) НСМ (8). На рис. 4 даны иллюстрации эволюции плотности энергии DH численных бризеров (10) O(3) НСМ (8) при $\omega = 0,5$.

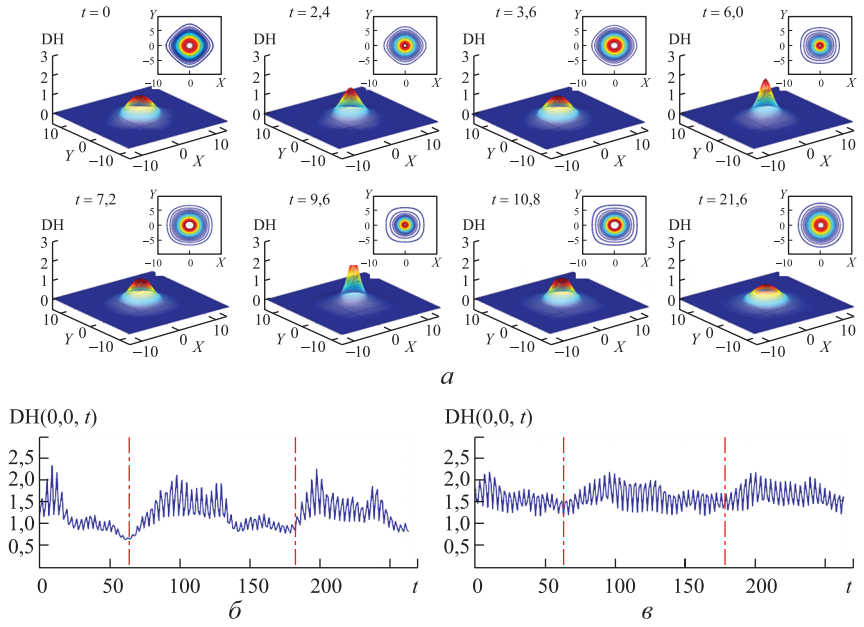


Рис. 4. Эволюция плотности энергии DH бризерных решений (10) модели (8) при $\omega = 0,5$, $t \in [0,0,\ 21,6]$ (*а*). Значения $\mathrm{DH}(0,0,\ t)$, полученные численным моделированием (*б*) и аналитически (*в*). Общее время моделирования — $t \in [0,0,\ 270,0]$

Графики на рис. 4, *б*, *в* показывают, что в течение всего времени моделирования $(t \in [0,0,\ 270,0])$ значения амплитуды центральной точки бризерного поля можно условно подразделить на периодически повторяющиеся волновые пакеты (в данном случае наблюдаются три условных пакета волн разной продолжительности $t \in (60,0,\ 120,0))$. В каждом волновом пакете бризерное решение (10), изначально не являясь радиально-симметричным, эволюционирует к радиально-симметричному виду (рис. 4, *а*), но в конце каждого пакета снова теряет данное свойство [17].

Заметим, что плотности энергии DH центральной части бризеров (10) O(3) НСМ (8) при наличии вращения вектора A3-поля $\omega \neq 0,0$ ($\mathrm{DH}_{\max} \approx 2,3291$ в случае $\omega = 0,5$) значительно меньше относительно случая $\omega = 0,0$ $(\mathrm{DH}_{\max} \approx 5,5539)$. При этом бризеры (10) O(3) НСМ (8) $(\omega \neq 0,0)$ обладают большей энергией En относитель-

но бризеров уравнения С–Г (9) (в рамках O(3) ВНСМ при $\omega = 0{,}0$). Бризерное поле (10) уравнения С–Г (9) по отношению к O(3) НСМ (8) при $t > 0{,}0$ обладает более сильным градиентом в центральной части, а также большими значениями амплитуды осциллирующей динамики центральной точки (см. рис. 3, *а*). Тем не менее численные и аналитические расчеты показывают, что бризерное поле (10) в случае $\omega > 0{,}0$ (бризеры O(3) НСМ) действует в более широком градиентном поле и обладает относительно большими значениями интеграла энергии En [17]. Более того, наличие вращения изотопического спина $S(s_1, s_2, s_3)$ в пространстве сферы S^2 (в данном случае $\omega = 0{,}5$) привело к определенному увеличению устойчивости бризеров (10) O(3) НСМ. При численном моделировании в течение 45 000 итерационных циклов $\left(t \in [0{,}0,\ 270{,}0]\right)$ общая потеря энергии $\mathrm{En}_{\mathrm{loss}}$ бризеров (10) O(3) НСМ составила:

$$\mathrm{En}_{\mathrm{loss}}\left(\omega = 0{,}5\right) \approx 4{,}823\ \%,$$

что примерно на 6 % меньше аналогичных потерь бризеров уравнения С–Г (рис. 5):

$$\mathrm{En}_{\mathrm{loss}}\left(\omega = 0{,}0\right) \approx 5{,}109\ \%.$$

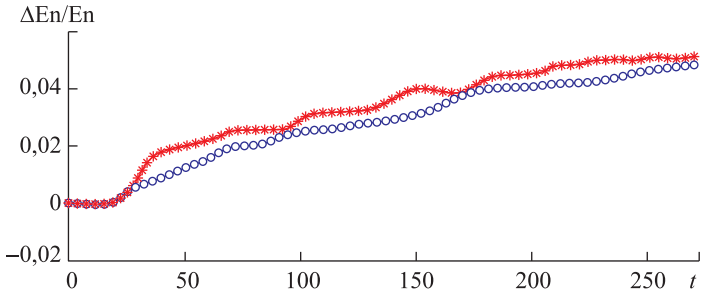


Рис. 5. Потеря энергии $\mathrm{En}_{\mathrm{loss}}$ бризеров (10) модели (8) для случаев:
— $\mathrm{En}_{\mathrm{loss}}(\omega = 0{,}0) \approx 5{,}1\ \%$; — $\mathrm{En}_{\mathrm{loss}}(\omega = 0{,}5) \approx 4{,}82\ \%$.
Время моделирования $t \in [0{,}0,\ 270{,}0]$

Движущиеся бризеры. Свойства Лоренц-инвариантности O(3) НСМ позволяют получить также модели движущихся решений. На рис. 6 приведены состояние плотности энергии DH бризера (10) двумерной O(3) НСМ (8) для случаев $\omega = 0{,}0$ (*а*) и $\omega = 0{,}5$ (*б*) при заданной преобразованием Лоренца начальной (при $t_0 = 0{,}0$) скорости

$v_{t_0} \approx 0,7071$. Как видно на рис. 6, *а*, движущийся бризер сохраняет устойчивость, потеря энергии на излучение при $t = 45,0$ составляет $\mathrm{En}_{\mathrm{loss}} \approx 3,3731\,\%$ и $\mathrm{En}_{\mathrm{loss}} \approx 3,5401\,\%$ для случаев $\omega = 0,0$ и $\omega = 0,5$ соответственно.

Отметим еще раз, что в наших моделях на краях области моделирования (в данном случае $L_m\left[3001 \times 3001\right]$) вставлены специальные граничные условия, которые поглощают излучаемую осциллирующим солитоном лишнюю энергию в виде линейных волн возмущений. Как и в стационарном случае, контурные проекции плотности энергии DH моделей эволюции движущихся решений (10) показывают, что в случае $\omega = 0,5$ бризеры обладают более широким ненулевым градиентным полем (рис. 6).

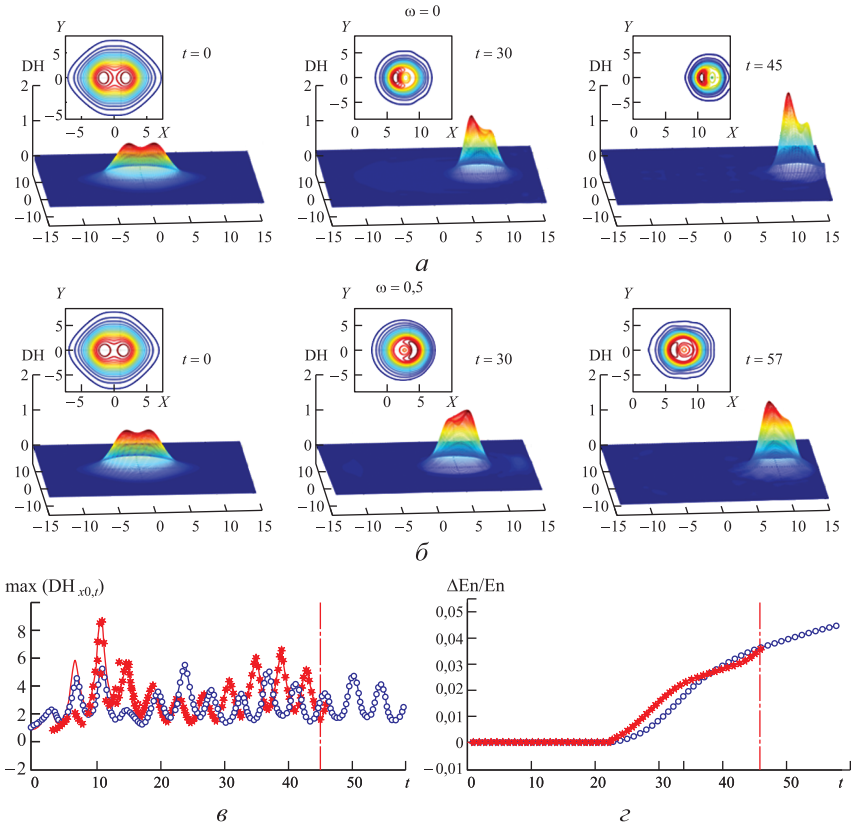


Рис. 6. Эволюция плотности энергии DH, движущегося бризера (10) O(3) НСМ (8): *а* — при $t \in \left[0,0,\, 45,0\right]$; *б* — при $t \in \left[0,0,\, 57,0\right]$; *в* — максимальные значения DH в сечении $(x,\, y_0)$; *г* — точность сохранения интеграла энергии бризерного поля $\left(\dfrac{\Delta \mathrm{En}}{\mathrm{En}}\right)$; —*—* — для $\omega = 0,0$ (SG); —o— — для $\omega = 0,5$ (NSM). Общее время моделирования $t \in \left[0,0,\, 60,\, 0\right]$

В случае движущихся бризеров необходимо отметить некоторые особенности изменения скорости их движения. Например, в работе [12] при исследовании взаимодействия одномерных бризеров O(3) НСМ было найдено, что скорость v_t $(t > 0{,}0)$ движения бризеров всегда меньше их начальной скорости $v_{t_0} > v_t$, тогда как при исследовании движущихся ТС типа кинк/антикинк всегда сохранялось равенство $v_{t_0} \equiv v_t$. Очевидно, что в случае бризеров определенная часть их энергии в начале эволюции $\mathrm{En}\left(v_{t_0}\right)$ поглощается характерной осциллирующей динамикой. На рис. 6, *а* двумерный бризер (10) при $t = 30{,}0$ проходит расстояние, равное $s \approx 8$ единицам (средняя скорость — $v_{t=30} \approx 0{,}2666$), и общая потеря скорости $v_{\mathrm{loss}} \approx 0{,}623\,\%$. При $t = 45{,}0$ бризер проходит расстояние $s \approx 12$, таким образом, скорость движения бризера (10) при $v_{t_0} \approx 0{,}7071$ является постоянной: $v_t \approx 0{,}2666$ (при $t > 0{,}0$ и $\omega = 0{,}0$).

На рис. 6, *б* (в случае $\omega = 0{,}5$ и $v_{t_0} \approx 0{,}7071$) при $t = 30{,}0$ бризер проходит расстояние $s \approx 5$ единиц (средняя скорость — $v_{t=30} \approx 0{,}1666$, общая потеря скорости $v_{\mathrm{loss}} \approx 0{,}7644\,\%$). При $t = 57{,}0$ бризер проходит расстояние $s \approx 10$, таким образом, в интервале $t \in [30{,}0,\ 57{,}0]$ можно наблюдать увеличение средней скорости движения бризера (10) до $v_{t=57} \approx 0{,}1754$ ($\approx 5{,}3\,\%$). Разность скоростей в случаях $\omega = 0{,}0$ (рис. 6, *а*) и $\omega = 0{,}5$ (рис. 6, *б*), а также неравномерность значений скорости бризеров (10) O(3) НСМ (8) можно объяснить воздействием дополнительной динамики вращения изотопического спина $S\left(s_1, s_2, s_3\right)$ в пространстве сферы S^2.

Анализ максимальных значений плотности энергии DH бризеров (10) модели (8) в плоскостном сечении (x, y_0) приведен на рис. 6, *в*: $\max\left(\mathrm{DH}\left(x, 0, t\right)\right)$. В случае $\omega = 0{,}0$ аналогично стационарному случаю, приведенному на рис. 3, можно условно выделить образование двух волновых пакетов $t_1 \approx \left(0{,}0,\ 25{,}0\right)$, $t_2 \approx \left(25{,}0,\ 50{,}0\right)$. В случае $\omega = 0{,}5$ точка $\max\left(\mathrm{DH}\left(x, 0, t\right)\right)$ осциллирует с относительно меньшими средними значениями частоты и амплитуды. В частности, при исследовании скорости движения бризера (10) модели (8) (при $\omega = 0{,}5$) выявлено существенное уменьшение ее значений в интервале $t_{v_t} \approx \left(13{,}0,\ 17{,}0\right)$: $v_t \to 0{,}0$. Эти факторы объясняют обнаруженные выше разности скоростей бризеров (10) до и после момента $t = 30{,}0$ для случая $\omega = 0{,}5$.

Заключение. В настоящей работе получены уравнения (6), (7) для фазовых параметров пробного решения (2) и определено точное аналитическое выражение для бризерного решения двумерного уравнения С–Г (9). Добавлением определенных возмущений найденным решениям получены бризерные решения (10) двумерной O(3) НСМ (8).

Отметим, что движущиеся осциллирующие решения в виде световых пуль двумерного уравнения С–Г, рассмотренные в работе [2], и стационарные периодические по времени решения, указанные в работе [3] (метастабильные бризеры), были получены приближенными методами. Движущиеся бризеры уравнения С–Г, полученные в работе [1] при численном моделировании в интервале времени $t \in [0{,}0,\ 50{,}0]$, излучают существенную часть своей энергии, точная величина которой в указанной работе не приводится.

Модели стационарных и движущихся бризеров двумерной O(3) НСМ, полученные в настоящей работе аналитическими и численными методами, показывают их устойчивость при различных значениях скорости их движения v_{t_0} и частоты вращения ω_{t_0} вектора изотопического спина $\vec{S}(s_1, s_2, s_3)$ в пространстве сферы $\vec{S}^2$. Наличие дополнительного вращения S $(\varphi = \varphi_0 + \omega\tau,\ \omega \neq 0{,}0)$ приводит к определенной диссипации динамики внутренней степени свободы и плотности энергии DH бризеров (10), а также к увеличению интеграла их энергии En (см. рис. 5).

Необходимо отметить также отличительное свойство полученных бризерных солитонов вида (10), которое заключается в их особой динамике (см. рис. 3, *б*, *в*, рис. 4, *б*, *в*), напоминающей динамику систем с разрывными колебаниями. Такие колебания происходят во многих нелинейных системах, и их исследование представляет определенный практический интерес. Наконец, заметим, что результаты настоящей работы позволяют провести исследования динамики взаимодействия бризеров двумерной O(3) НСМ, где в полной мере могут быть проявлены их особые частицеподобные свойства [18].

ЛИТЕРАТУРА

[1] Minzoni A.A., Smyth N.F., Worthy A.L. Evolution of two-dimensional standing and travelling breather solutions for the Sine-Gordon equation. *Physica D. Nonlinear Phenomena*, 2004, vol. 189, issue 3–4, pp. 167–187.

[2] Xin J.X. Modeling light bullets with the two-dimensional Sine-Gordon equation. *Physica D. Nonlinear Phenomena*, 2000, vol. 135, issue 3–4, pp. 345–368.

[3] Piette B., Zakrjewsky W.J. Metastable stationary solutions of the radial D-dimensional sine-Gordon model. *Nonlinearity*, 1998, no. 11, pp. 1103–1110.

[4] Smyth N.F., Worthy A.L. Soliton evolution and radiation loss for the sine-Gordon equation. *Physical Review E*, 1999, no. 60, pp. 2330–2336.

[5] Minzoni A.A., Smyth N.F., Worthy A.L. Pulse evolution for a two-dimensional Sine-Gordon equation. *Physica D. Nonlinear Phenomena*, 2001, no. 159, pp. 101–123.

[6] Malomed B.A. Decay of shrinking solitons in multidimensional sine-Gordon equation. *Physica D. Nonlinear Phenomena*, 1987, vol. 24, issue 1–3, pp. 155–171.

[7] Christiansen P.L., Gronbech-Jensen N., Lomdahl P.S., Malomed B.A. Oscillations of eccentric pulsons. *Physica Scripta*, 1997, vol. 55, pp. 131–134.

[8] Geicke J. Cylindrical puisons in nonlinear relativistic wave equations. *Physica Scripta A*, 1984, vol. 29, no. 5, pp. 431–434.

[9] Муминов Х.Х., Чистяков Д.Ю. Новый тип бионных возбуждений в модели классического антиферромагнетика Гейзенберга. *Доклады АН РТ*, 2004, т. 47, № 9–10, с. 45–50.

[10] Муминов Х.Х., Шокиров Ф.Ш. Новые двумерные бризерные решения O(3) векторной нелинейной сигма-модели. *Доклады АН РТ*, 2011, т. 54, № 10, с. 825–830.

[11] Muminov Kh.Kh., Shokirov F.Sh. Dynamics of two-dimensional breathers in O(3) vectorial nonlinear sigma-model. *The Book of abstracts of the Int. Conf. Mathematic. modeling and computational physics*. Russia, Dubna, 2013, p. 134.

[12] Муминов Х.Х., Шокиров Ф.Ш. Численное моделирование бризеров 1D и 2D O(3) векторной нелинейной сигма-модели. *LI Всерос. конф. по проблемам динамики, физики частиц, физики плазмы и оптоэлектроники. Тезисы докладов.* Москва, РУДН, 2015, с. 94–98.

[13] Самарский А.А. *Теория разностных схем*. Москва, Наука, 1977, 656 с.

[14] Samarsky A.A., Vabishevich P.N., Gulin A.V. Stability of operator-difference schemes. *Differential Equations*, vol. 35, no. 2, 1999, pp. 151–186.

[15] Муминов Х.Х. О существовании и устойчивости двумерных топологических солитонов в модели изотропного классического антиферромагнетика Гейзенберга. *Доклады АН РТ*, 2002, т. 45, № 10, с. 21–27.

[16] Муминов Х.Х. Многомерные динамические топологические солитоны в нелинейной анизотропной сигма-модели. *Доклады АН РТ*, 2002, т. 45, № 10, с. 28–36.

[17] Shokirov F.Sh. Stationary and moving breathers in (2+1)-dimensional O(3) nonlinear σ-model. *MathPubs*, 2016. URL: http://www.mathpubs.com/detail/1605.01000v1/Stationary-and-moving-breathers-in-21-dimensional-O3-nonlinear-model (data access 29.08.2016)

[18] Маханьков В.Г. Солитоны и численный эксперимент. *ФЭЧАЯ*, 1983, т. 14, № 1, с. 123–180.

Статья поступила в редакцию 23.01.2017

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Шокиров Ф.Ш. Математическое моделирование бризеров двумерной O(3) нелинейной сигма-модели. *Математическое моделирование и численные методы*, 2016, № 4 (12), с. 3–16.

Шокиров Фарход Шамсидинович окончил Худжандский государственный университет имени академика Б. Гафурова. Канд. физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник отдела «Наноматериалов и нанотехнологий» Физико-технического института им. С.У. Умарова Академии наук Республики Таджикистан. Область научных интересов: физика магнитных и нелинейных явлений. e-mail: shokirov@phti.tj

Mathematical modeling of breathers of two-dimensional O(3) nonlinear sigma model

© F.Sh. Shokirov

S.U. Umarov Physical-Technical Institute
of Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan, Dushanbe, 734063, Tajikistan

The study examined the formation and evolution of stationary and moving breathers of a two-dimensional O(3) nonlinear sigma model. We detected analytical form of trial functions of two-dimensional sine-Gordon equations, which over time evolve into periodic (breather) solutions. According to the solutions found, by adding the rotation to an A3-field vector in isotopic space S^2 we obtained the solutions for the O(3) nonlinear sigma model. Furthermore, we conducted the numerical study of the solutions dynamics and showed their stability in a stationary and a moving state for quite a long time, although in the presence of a weak radiation.

Keywords: *two-dimensional breather, nonlinear sigma model, sine-Gordon equation, averaged Lagrangian, isotopic space, numerical simulation.*

REFERENCES

[1] Minzoni A.A., Smyth N.F., Worthy A.L. *Physica D. Nonlinear Phenomena*, 2004, vol. 189, issue 3–4, pp. 167–187.
[2] Xin J.X. *Physica D. Nonlinear Phenomena*, 2000, vol.135, issue 3–4, pp. 345–368.
[3] Piette B., Zakrjewsky W.J. *Nonlinearity*, 1998, no. 11, pp. 1103–1110.
[4] Smyth N.F., Worthy A.L. Soliton evolution and radiation loss for the sine-Gordon equation. *Physical Review E*, 1999, no. 60, pp. 2330–2336.
[5] Minzoni A.A., Smyth N.F., Worthy A.L. *Physica D. Nonlinear Phenomena*, 2001, no. 159, pp. 101–123.
[6] Malomed B.A. *Physica D. Nonlinear Phenomena*, 1987, pp. 155–171.
[7] Christiansen P.L., Gronbech-Jensen N., Lomdahl P.S., Malomed B.A. *Physica Scripta*, 1997, vol. 55, pp. 131–134.
[8] Geicke J. *Physica Scripta A*, 1984, vol. 29, pp. 431–434.
[9] Muminov Kh.Kh., Chistyakov D.Yu. *Doklady Akademii nauk Respubliki Tadzhikistan — Reports of Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan*, 2004, vol. 47, no. 9–10, pp. 45–50.
[10] Muminov Kh.Kh., Shokirov F.Sh. *Doklady Akademii nauk Respubliki Tadzhikistan — Reports of Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan*, 2011, vol. 54, no. 10, pp. 825–830.
[11] Muminov Kh.Kh., Shokirov F.Sh. *The Book of abstracts of the International Conference Mathematical modeling and computational physics*. Russia, Dubna, 2013, p. 134.
[12] Muminov Kh.Kh., Shokirov F.Sh. *LI Vserossiskaya konferentsiya po problemam dinamiki, fiziki chastits, fiziki plazmy i optoelektroniki — Proceedings of LI-Russian conference on the problems of dynamics, particle physics, plasma physics and optoelectronics*. Moscow, RUDN University Publ., 2015, pp. 94–98.
[13] Samarsky A.A. *Teoriya raznostnykh skhem* [The theory of difference schemes]. Moscow, Nauka Publ., 1977, 656 p.

[14] Samarsky A.A., Vabishevich P.N., Gulin A.V. Stability of operator-difference schemes. *Differential Equations*, vol. 35, no. 2, 1999, pp. 151–186.
[15] Muminov Kh.Kh. *Doklady Akademii nauk Respubliki Tadzhikistan — Reports of Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan*, 2002, vol. 45, no. 10, pp. 21–27.
[16] Muminov Kh.Kh. *Doklady Akademii nauk Respubliki Tadzhikistan — Reports of Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan*, 2002, vol. 45, no. 10, pp. 28–36.
[17] Shokirov F.Sh. *MathPubs*, 2016. Available at: http://www.mathpubs.com/detail/1605.01000v1/Stationary-and-moving-breathers-in-21-dimensional-O3-nonlinear-model (data access 29.08.2016). 11 p.
[18] Mahankov V.G. *Fizika elementarnykh chastits i atomnogo yadra — Physics of Particles & Nuclei*, 1983, vol. 14, no. 1, pp. 123–180.

Shokirov F.Sh. graduated from Gafurov Khujand State University. Cand. Sc. (Phys. & Math.), Leading Researcher of Nanomaterials and Nanotechnologies Department at S.U. Umarov Physical-Technical Institute of Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan. Research interests: physics of magnetic and non-linear phenomena.
e-mail: shokirov@phti.tj