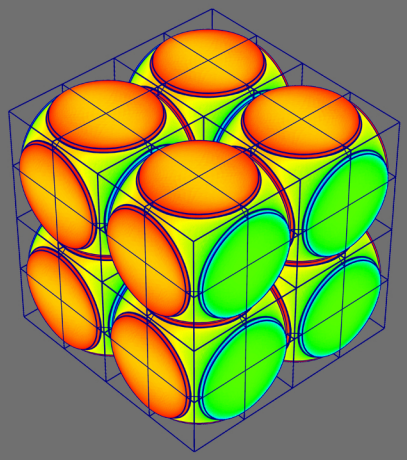
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Каплунов Ю. Д., Облакова Т. В., Приказчиков Д. А. Околорезонансные режимы подвижной нагрузки в плоской задаче теории упругости для полупространства с тонким покрытием. Математическое моделирование и численные методы, 2014, №1 (1), с. 57-67

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/8/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.216.210
01.02.2026 06:34:40

УДК 539.3

# Околорезонансные режимы подвижной нагрузки в плоской задаче теории упругости для полупространства с тонким покрытием

© Ю.Д. Каплунов[1], Т.В. Облакова[2], Д.А. Приказчиков[2]

[1] Кильский университет, Киль, ST5 5BG, Великобритания
[2] МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

*Рассмотрена плоская стационарная задача теории упругости о движении вертикальной сосредоточенной нагрузки вдоль поверхности упругого полупространства с тонким покрытием. В рамках длинноволновой асимптотической модели для волны Рэлея в случае упругого полупространства с покрытием исследуются режимы в приповерхностном слое при скоростях движения нагрузки, близких к резонансной скорости поверхностной волны. Получена классификация режимов в зависимости от соотношения скорости движения нагрузки и резонансной скорости, а также от знака линейного коэффициента дисперсии покрытия. Установлены режимы, в которых имеет место излучение от источника. Полученные результаты могут быть обобщены на случай более сложных физических свойств материала покрытия, включая эффекты анизотропии, вязкости и предварительной деформации.*

***Ключевые слова:*** *подвижная нагрузка, асимптотическая модель, волна Рэлея, тонкое покрытие.*

**Введение.** Исследование динамики волновых процессов в задачах о подвижной нагрузке в упругих телах с покрытиями является актуальной проблемой науки и техники. Результаты этих исследований имеют многочисленные приложения, в том числе в методах неразрушающего контроля, а также для развития высокоскоростного железнодорожного транспорта.

Среди классических работ, исследующих дисперсию волн в покрытии можно выделить [1, 2], а также [3], решение в которой опирается на физические гипотезы. Следует заметить, что, как показано в работе [4], решение, полученное в [3], является асимптотически точным в рамках теории первого порядка, таким образом, включение дополнительных слагаемых [5] соответствует теориям более высокого порядка и нуждается в более систематическом изложении. Из недавних работ в этой области отметим [6, 7], а также [8], в которой исследовался знак линейного коэффициента дисперсии в зависимости от соотношения упругих параметров покрытия и полупространства. Одним из подходов к решению задачи является также метод предельного поглощения [9–12]. Заметим, что большое число параметров в задачах для упругих сред с покрытиями существенно усложняет анализ, что стимулирует развитие приближенных подходов [2–4].

В настоящей работе исследуется динамика приповерхностного слоя в случае плоской задачи теории упругости о движении вертикальной

импульсной нагрузки для упругого полупространства с тонким покрытием. Предлагаемый подход опирается на длинноволновую приближенную формулировку [4], являющуюся развитием асимптотической модели для волны Рэлея [13], успешно применяемой к задачам о подвижной нагрузке [14, 15], а также к смешанным задачам теории упругости [16]. Описываемая эллиптико-гиперболическая формулировка [4] ориентирована на выделение вклада волны Рэлея в общую динамическую картину. Модель включает в себя эллиптические уравнения, описывающие затухание вглубь среды, а также сингулярно возмущенное гиперболическое уравнение, описывающее поверхностную динамику, в котором влияние покрытия отражено с помощью соответствующего псевдодифференциального оператора.

Использование приближенной формулировки существенно упрощает анализ. Исследование сингулярно возмущенного гиперболического уравнения на границе дает возможность классифицировать режимы движения импульсной нагрузки. Методом фиктивного поглощения в рамках постановки задачи были установлены сочетания дорезонансного (сверхрезонансного) режима с упругими параметрами покрытия и полупространства, соответствующими локальному максимуму (минимуму) фазовой скорости. В этих случаях имеет место излучение от движущегося источника, что соответствует вкладу полюсов на действительной оси для преобразованного по Фурье тангенциального напряжения.

**Постановка задачи.** Рассмотрим упругую полуплоскость $-\infty < x < \infty,\ 0 \le y < \infty,$ с упругим покрытием $-\infty < x < \infty,\ -h \le y \le 0$. Зададим нагрузку на поверхности покрытия в виде вертикальной импульсной силы $P$, движущейся с постоянной скоростью $v$ (рис. 1):

$$\sigma_{xy} = 0, \quad \sigma_{yy} = P_0\,\delta(x - vt) \quad \text{при} \quad y = -h. \tag{1}$$

Перемещения и напряжения на границе между покрытием и полуплоскостью предполагаются непрерывными. В рамках данной работы изучаются длинные волны, т. е. предполагается, что толщина покрытия мала по сравнению с характерной длиной волны.

Приведем краткое описание асимптотической модели для волны Рэлея в случае упругой полуплоскости с покрытием [4]. В этом случае затухание вглубь среды описывается псевдостатическими эллиптическими уравнениями

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + k_1^2\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + k_2^2\,\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = 0, \tag{3}$$

где φ и ψ — упругие потенциалы; $k_m = \left(1 - \frac{c_R^2}{c_m^2}\right)^{1/2}$, $m = 1, 2$ — постоянные ($c_1, c_2$ и $c_R$ — скорости распространения продольной, поперечной волн и волны Рэлея соответственно).

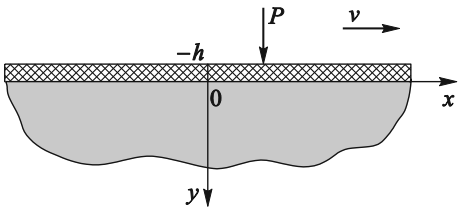



**Рис. 1.** Движение импульсной силы *P* вдоль поверхности покрытия

Поверхностная динамика для граничных условий (1) описывается сингулярно возмущенным гиперболическим уравнением при $y = 0$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \frac{1}{c_R^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - bh\sqrt{-\frac{\partial^2}{\partial x^2}}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right) = \frac{1+k_2^2}{2\mu B}P_0\delta\left(x - vt\right), \qquad (4)$$

где $\sqrt{-\frac{\partial^2}{\partial x^2}}$ − псевдодифференциальный оператор [4]; μ — сдвиговый модуль Ламэ.

Постоянная *B* определяется упругими свойствами полуплоскости:

$$B = \frac{k_1}{k_2}\left(1 - k_2^2\right) + \frac{k_2}{k_1}\left(1 - k_1^2\right) - 1 + k_2^4,$$

а линейный коэффициент дисперсии [4, 8]

$$b = \frac{\mu_0\left(1 - k_2^2\right)}{2\mu B}\left[\left(1 - k_{20}^2\right)\left(k_1 + k_2\right) - 4k_2\left(1 - \kappa_0^{-2}\right)\right]. \qquad (5)$$

Здесь $\mu_0$ — сдвиговый модуль покрытия, а постоянные $k_{20} = \left(1 - \frac{c_R^2}{c_{20}^2}\right)^{1/2}$, $\kappa_0 = \frac{c_{10}}{c_{20}}$ определяются упругими свойствами покрытия.

Уравнение (4) может быть представлено также в интегральной форме через преобразование Гильберта

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \frac{1}{c_R^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \frac{bh}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^3\varphi}{\partial\zeta^3}\frac{d\zeta}{x - \zeta} = \frac{1+k_2^2}{2\mu B}P_0\delta\left(x - vt\right),$$

где интеграл понимается в смысле главного значения.

На границе $y=0$ также справедливо соотношение между потенциалами

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=\frac{2}{1+k_2^2}\frac{\partial\varphi}{\partial y}. \tag{6}$$

Таким образом, для последовательного восстановления поля внутри области требуется сначала определить потенциал $\varphi$ из решения краевой задачи для эллиптического уравнения (2) с граничным условием (4), а затем найти второй потенциал $\psi$ из краевой задачи (3), (6).

**Одномерная динамическая задача на поверхности полуплоскости.** Сосредоточимся в данной работе на изучении уравнения (4). Переходя в подвижную систему координат $(\xi, y)=(x-vt, y)$, в рамках автомодельного (стационарного) режима получим

$$\eta\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}-bh\sqrt{-\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}\right)=\frac{1+k_2^2}{2\mu B}P_0\delta(\xi), \tag{7}$$

где $\eta=1-\dfrac{v^2}{c_R^2}$.

Подстановка $h=0$ в (7), что соответствует отсутствию покрытия, приводит к результатам для упругой полуплоскости [17], представляющим собой главный член асимптотического разложения точного решения задачи [18].

Вводя обозначения

$$\lambda=\left|\frac{\eta}{b}\right|\frac{\xi}{h},\quad \sigma=\frac{2\mu Bbh}{\left(1+k_2^2\right)P_0}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2},$$

перепишем уравнение (7) как

$$\operatorname{sgn}(b\eta)\sigma-\sqrt{-\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}}(\sigma)=\delta(\lambda),$$

решение которого представимо в виде интеграла Фурье

$$\sigma=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\omega\lambda}d\omega}{\operatorname{sgn}(b\eta)-|\omega|}. \tag{8}$$

Из (8) видно, что в зависимости от знака произведения $b\eta$ имеют место два случая, соответствующие наличию $(b\eta>0)$ или отсутствию $(b\eta<0)$ полюсов на действительной оси.

Рассмотрим сначала случай отсутствия полюсов $(b\eta < 0)$. Возможны следующие варианты зависимости фазовой скорости $v_ф$ от волнового числа $k$ в длинноволновой области $(k \ll 1)$:

а) дорезонансный режим $(\eta > 0)$ в сочетании с локальным минимумом фазовой скорости $v_ф = c_R$ $(b < 0)$ (рис. 2, *а*);

б) сверхрезонансный режим $(\eta < 0)$ в сочетании с локальным максимумом фазовой скорости $(b > 0)$ (рис. 2, *б*).

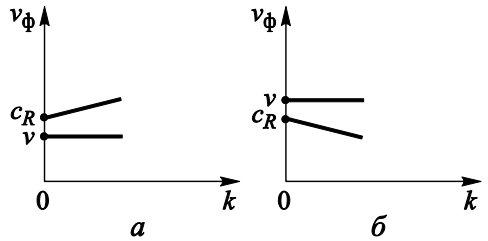



**Рис. 2.** Дисперсионные кривые в длинноволновой области $k \ll 1$ при дорезонансном (*а*) и сверхрезонансном (*б*) режиме для случая отсутствия полюсов

Тогда интеграл (8) вычисляется как

$$\sigma = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\omega\lambda}d\omega}{-1-|\omega|} = -\frac{1}{\pi}\operatorname{Re}\int_{0}^{\infty}\frac{e^{i\omega|\lambda|}}{1+\omega}d\omega = D(|\lambda|), \tag{9}$$

где выражение для $D(t)$ имеет вид

$$D(t) = \frac{1}{\pi}\left[\left(\operatorname{Si}(t) - \frac{\pi}{2}\right)\sin t + \operatorname{Ci}(t)\cos t\right],$$

в котором

$$\operatorname{Si}(t) = \int_0^t \frac{\sin x}{x}\,dx, \quad \operatorname{Ci}(t) = \gamma + \ln t + \int_0^t \frac{\cos x - 1}{x}\,dx$$

есть интегральные тригонометрические функции [19], а $\gamma \approx 0{,}577$ — постоянная Эйлера.

Рассмотрим теперь второй случай $(b\eta > 0)$, когда подынтегральное выражение в (8) имеет полюсы на действительной оси. Здесь также возможны два варианта:

а) дорезонансный режим в сочетании с локальным максимумом фазовой скорости при $v_ф = c_R$ (рис. 3, *а*);

б) сверхрезонансный режим в сочетании с локальным минимумом фазовой скорости (рис. 3, *б*).

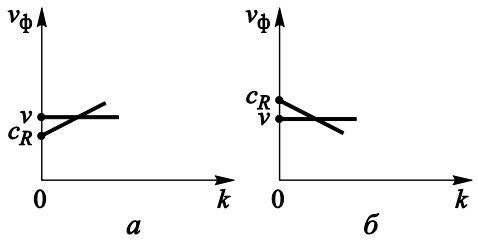



**Рис. 3.** Дисперсионные кривые в длинноволновой области $k \square 1$ при дорезонансном (*а*) и сверхрезонансном (*б*) режиме для случая наличия полюсов

Регуляризуем интеграл (8). Сначала преобразуем

$$\sigma = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\omega\lambda}d\omega}{1-|\omega|} = \frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\int_{0}^{\infty}\frac{e^{i\omega\lambda}}{1-\omega}d\omega = -\frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\int_{0}^{\infty}\frac{e^{i\omega\xi}}{\omega-\dfrac{\eta}{bh}}d\omega.$$

Используя метод предельного поглощения [9–12, 20], получим

$$\mu_0 \to \mu_0\left(\mathrm{I}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\right) \equiv \mu_0\left(\mathrm{I}-\frac{\varepsilon}{v}\frac{\partial}{\partial\xi}\right) \;\Rightarrow\; \mu_0 \to \mu_0\left(\mathrm{I}-\frac{\varepsilon i\omega}{v}\right).$$

Следовательно, для линейного коэффициента дисперсии (5) имеем

$$\mathrm{Im}\,b = \frac{2\mu_0\varepsilon\omega}{\mu B v}\left[\left(1-k_2^2\right)k_2\left(1-\kappa_0^{-2}\right)\right] > 0,$$

т. е. полюс $\omega = \dfrac{\eta}{bh}$ будет смещаться в верхнюю или нижнюю полуплоскость при $\eta < 0$ и $\eta > 0$ соответственно. Теперь интеграл (8) может быть вычислен с помощью контуров, приведенных на рис. 4.

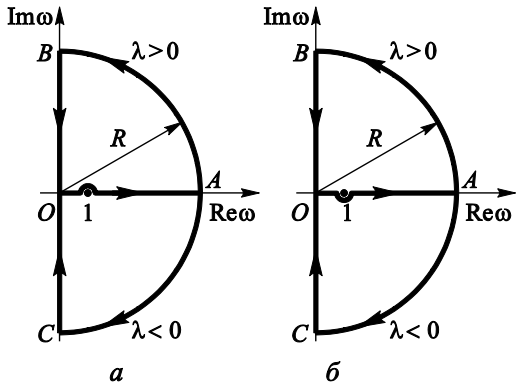



**Рис. 4.** Контуры интегрирования для (8) в случае дорезонансного (*а*) и сверхрезонансного (*б*) режима

Рассмотрим сначала дорезонансный режим, т. е. $\eta > 0$ (см. рис. 4, *а*). Тогда впереди нагрузки $(\lambda > 0)$ соответствующий контур расположен в первом квадранте и вклад полюса не учитывается, откуда

$$\sigma = \frac{1}{\pi}\operatorname{Re}\int\limits_{OA}\frac{e^{i\omega\lambda}d\omega}{1-\omega} = \frac{1}{\pi}\left(\int\limits_{OABO}\frac{e^{i\omega\lambda}d\omega}{1-\omega} - \int\limits_{BO}\frac{e^{i\omega\lambda}d\omega}{1-\omega}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\operatorname{Re}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{ie^{-\lambda\zeta}}{1-i\zeta}d\zeta = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\zeta e^{-\lambda\zeta}}{1+\zeta^2}d\zeta \;=\; D(\lambda). \qquad (10)$$

Сзади нагрузки $(\lambda < 0)$ с учетом вклада полюса получим, соответственно,

$$\sigma = \frac{1}{\pi}\operatorname{Re}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{e^{i\omega\lambda}}{1-\omega}d\omega = 2\operatorname{Im}\operatorname{Res}_{\omega=1}\frac{e^{i\omega\lambda}}{\omega-1} - \frac{1}{\pi}\operatorname{Re}\int\limits_{OC}\frac{e^{i\omega\lambda}}{\omega-1}d\omega =$$

$$= -2\sin\lambda + D(-\lambda). \qquad (11)$$

Таким образом, для дорезонансного случая из (10) и (11) имеем

$$\sigma = -2H(-\lambda)\sin\lambda + D(|\lambda|). \qquad (12)$$

В сверхрезонансном режиме $(\eta < 0)$ (см. рис. 4, *б*) по аналогии получим

$$\sigma = 2H(\lambda)\sin\lambda + D(|\lambda|). \qquad (13)$$

**Численные результаты.** Примеры числовых расчетов представлены на рис. 5–7. На рис. 5 показано решение (9), соответствующее *отсутствию полюсов на действительной оси*. В этом случае решение быстро затухает по $\lambda$.

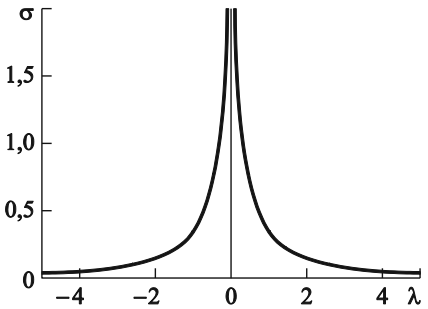



**Рис. 5.** Решение (9) для случая отсутствия полюсов $(b\eta < 0)$

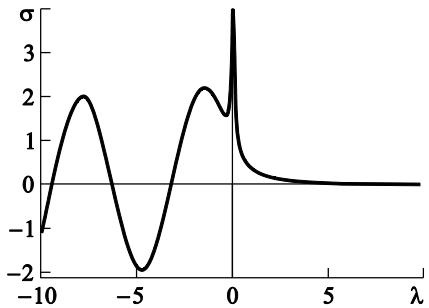



**Рис. 6.** Решение (12) в дорезонансном режиме $(b > 0,\ \eta > 0)$

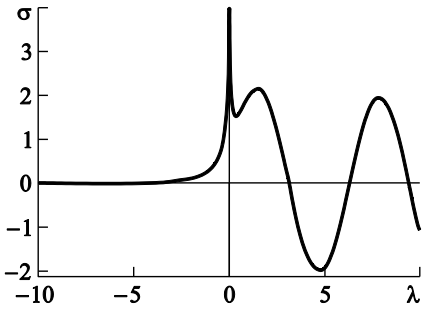



**Рис. 7.** Решение (13) в сверхрезонансном режиме $(b < 0, \eta < 0)$

Как видно из рис. 6, 7, иллюстрирующих решения (12), (13), вклад полюсов соответствует *излучению от движущегося источника*.

**Заключение.** Данная работа содержит результаты анализа поверхностной динамики для задачи о подвижной нагрузке в случае упругой полуплоскости с покрытием. Приведена классификация режимов автомодельных решений в зависимости от скорости движения нагрузки и знака линейного коэффициента дисперсии. Выделены случаи, в которых имеет место излучение от движущегося источника.

Результаты могут быть обобщены на случай покрытия с более сложными механическими свойствами, учитывающими эффекты анизотропии, вязкости и предварительной деформации. С помощью метода ВКБ (Вентцеля – Крамерса – Бриллюэна) может быть рассмотрен также случай зависимости упругих параметров среды от вертикальной координаты [21].

*Авторы посвящают статью д-ру техн. наук, профессору Г.Б. Муравскому в связи с его 80-летием.*

## ЛИТЕРАТУРА

[1] Achenbach J.D., Keshava S.P. Free waves in a plate supported by a semi-infinite continuum. *ASME J. Appl. Mech*., 1967, vol. 34 (2), pp. 397–404.

[2] Achenbach J.D., Keshava S.P., Herrmann G. Moving load on a plate resting on an elastic half-space. *ASME J. Appl. Mech*., 1967, vol. 34 (6), pp. 910–914.

[3] Tiersten H.F. Elastic surface waves guided by thin films. *J. Appl. Phys*., 1969, vol. 40, pp. 770–789.

[4] Dai H.-H., Kaplunov J., Prikazchikov D.A. A long wave model for the surface elastic wave in a coated half space. *Proc. R. Soc. A*., 2010, vol. 466, pp. 3097–3116.

[5] Bovik P. A comparison between the Tiersten model and $O(h)$ boundary conditions for elastic surface waves guided by thin layers. *ASME J. Appl. Mech*., 1996, vol. 63, pp. 162–167.

[6] Захаров Д.Д. Эффективные аппроксимации высокого порядка для слоистых покрытий и прослоек из анизотропных упругих, вязкоупругих и нематических материалов. ПММ, 2010, т. 74 (3), с. 403–418.

[7] Steigmann D.J., Ogden R.W. Surface waves supported by thin film/substrate interactions. *IMA J. Appl. Math*., 2007, vol. 72, pp. 730–747.

[8] Shuvalov A.L., Every A.G. On the long-wave onset of dispersion of the surface-wave velocity in coated solids. *Wave Motion*, 2008, vol. 45, pp. 857–863.

[9] Schulenberger J.R., Wilcox C.H. The limiting absorption principle and spectral theory for steady-state wave propagation in inhomogeneous anisotropic media. *Arch. Ration. Mech. Anal*., 1971, vol. 41, pp. 46–65.

[10] Ворович И.И., Бабешко В.А. *Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей*. Москва, Наука, 1979, 320 с.

[11] Бабешко В.А., Глушков Е.В., Зинченко Ж.Ф. *Динамика неоднородных линейно-упругих сред*. Москва, Наука, 1989, 343 с.

[12] Калинчук В.В., Белянков Т.И. *Динамика поверхности неоднородных сред*. Москва, Физматлит, 2009, 312 с.

[13] Kaplunov J., Zakharov A., Prikazchikov D.A. Explicit models for elastic and piezoelastic surface waves. *IMA J. Appl. Math.*, 2006, vol. 71, pp. 768–782.

[14] Kaplunov J., Nolde E., Prikazchikov D.A. A revisit to the moving load problem using an asymptotic model for the Rayleigh wave. *Wave Motion*, 2010, vol. 47, pp. 440–451.

[15] Kaplunov J., Prikazchikov D.A., Erbas B., Sahin O. On a 3D moving load problem for an elastic half-space. *Wave Motion*, 2013, vol. 50, pp. 1229–1238.

[16] Erbas B., Kaplunov J., Prikazchikov D.A. The Rayleigh wave field in mixed problems for a half-plane. *IMA J. Appl. Math*., 2013, vol. 78(5), pp. 1078–1086.

[17] Kaplunov J., Prikazchikov D.A. Explicit models for surface, interfacial and edge waves in elastic solids. Craster R., Kaplunov J. (eds.). Dynamic localization phenomena in elasticity, acoustics and electromagnetis. *CISM Lecture Notes*, Springer, 2013, vol. 547, pp. 73–114.

[18] Cole J., Huth J. Stresses produced in a half plane by moving loads. *ASME J. Appl. Mech*., 1958, vol. 25, pp. 433–436.

[19] Abramowitz M., Stegun I.A. *Handbook of mathematical functions*. New York, Dover, 1982, 1046 p.

[20] Муравский Г.Б. Колебания балки типа Тимошенко, лежащей на упруго-наследственном основании. *Изв. АН СССР. Механика твердого тела*, 1981, т. 5, с. 167–179.

[21] Аленицын А.Г. Волны Рэлея в неоднородном упругом полупространстве. *ПММ*, 1963. т. 27, с. 547–550.

Статья поступила в редакцию 06.03.2014

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Каплунов Ю.Д., Облакова Т.В., Приказчиков Д.А. Околорезонансные режимы подвижной нагрузки в плоской задаче теории упругости для полупространства с тонким покрытием. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 1, с. 57–67.

**Каплунов Юлий Давидович** — д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры математики Кильского университета (Великобритания), лауреат Государственной премии РФ. Автор более 120 научных публикаций в области механики сплошных сред. Область научных интересов: механика сплошных сред, распространение волн, асимптотические методы.

**Облакова Татьяна Васильевна** — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор 10 научных статей и 7 учебно-методических пособий. Область научных интересов: теория вероятностей и математическая статистика, математическое моделирование.

**Приказчиков Данила Александрович** — канд. физ.-мат. наук, ведущий инженер НОЦ «Симплекс» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор 40 научных работ и 6 учебно-методических пособий. Область научных интересов: теория упругости, распространение волн, асимптотические методы. e-mail: prikazchikovda@yandex.ru

# Near-resonant modes of the moving load in the plane problem of elasticity theory for a half-space with a thin coating

© J.D. Kaplunov[1], T.V. Oblakova[2], D.A. Prikazchikov[2]

[1] Keele University, Keele, United Kingdom, ST5 5BG
[2] Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

*The study deals with the plane stationary problem of elasticity theory on the motion of a vertical concentrated load along the surface of an elastic half-space with a thin coating. The authors investigated modes in the surface layer at speeds close to the resonant speed of the surface wave. The research was done within the long-wave asymptotic model for the Rayleigh wave in the case of an elastic coated half-space. The modes are classified according to the ratio between the velocity of the load and the resonance speed and to the dispersion coefficient of linear coverage. The study discovers the modes having radiation from the source. The results obtained can be generalized to more complex physical properties of the coating material, including the effects of anisotropy, viscosity and pre-straining.*

***Keywords:*** *moving load, asymptotic model, Rayleigh wave, thin coating.*

## REFERENCES

[1] Achenbach J.D., Keshava S.P. *ASME J. Appl. Mech*., 1967, vol. 34 (2), pp. 397–404.
[2] Achenbach J.D., Keshava S.P., Herrmann G. *ASME J. Appl. Mech*., 1967, vol. 34 (6), pp. 910–914.
[3] Tiersten H.F. *J. Appl. Phys*., 1969, vol. 40, pp. 770–789.
[4] Dai H.-H., Kaplunov J., Prikazchikov D.A. *Proc. R. Soc. A*., 2010, vol. 466, pp. 3097–3116.
[5] Bovik, P. *ASME J. Appl. Mech*., 1996, vol. 63, pp. 162–167.
[6] Zakharov D.D. *PMM — J. Appl. Math. Mech.*, 2010, vol. 74 (3), pp. 403–418.
[7] Steigmann D.J., Ogden R.W. *IMA J. Appl. Math*., 2007, vol. 72, pp. 730–747.
[8] Shuvalov A.L., Every, A.G. *Wave Motion*, 2008, vol. 45, pp. 857–863.
[9] Schulenberger J. R., Wilcox C.H. *Arch. Ration. Mech. Anal*., 1971, vol. 41, pp. 46–65.
[10] Vorovich I.I., Babeshko V.A. *Dinamicheskie smeshannye zadachi teorii uprugosti dlya neklassicheskikh oblastei* [Dynamic mixed problems of elasticity theory for non-classical areas]. Moscow, Nauka Publ., 1979, 320 p.
[11] Babeshko V.A., Glushkov E.V., Zinchenko Zh.F. *Dinamika neodnorodnykh lineino-uprugikh sred* [Dynamics of heterogeneous linearly elastic media]. Moscow, Nauka Publ., 1989, 343 p.
[12] Kalinchuk V.V., Belyankov T.I. *Dinamika poverkhnosti neodnorodnykh sred* [Surface dynamics of inhomogeneous media]. Moscow, FIZMATLIT Publ., 2009, 312 p.
[13] Kaplunov J., Zakharov A., Prikazchikov D.A. *IMA J. Appl. Math.*, 2006, vol. 71, pp. 768–782.
[14] Kaplunov J., Nolde E., Prikazchikov D.A. *Wave Motion*, 2010, vol. 47, pp. 440–451.

[15] Kaplunov J., Prikazchikov D.A., Erbas B., Sahin O. *Wave Motion*, 2013, vol. 50, pp. 1229–1238.
[16] Erbas B., Kaplunov J., Prikazchikov D.A. *IMA J. Appl. Math*., 2013, vol. 78(5), pp. 1078–1086.
[17] Kaplunov J., Prikazchikov D.A. *CISM Lecture Notes*, Springer, 2013, vol. 547, pp. 73–114.
[18] Cole J., Huth J. *ASME J. Appl. Mech*., 1958, vol. 25, pp. 433–436.
[19] Abramowitz M., Stegun I.A. *Handbook of mathematical functions*. New York, Dover, 1982.
[20] Muravskiy G.B.. *Izv. AN SSSR. Mekhanika tverdogo tela — Proc. Acad. Sci. USSR. Mechanics of rigid body*, 1981, vol. 5, pp. 167–179.
[21] Alenitsyn A.G. *PMM — J. Appl. Math. Mech.*, 1963, vol. 27, pp. 547–550.

**Kaplunov J.**, Dr. Sci., Professor of the Applied Mathematics at School of Computing and Mathematics, Keele University (United Kingdom), winner of the State Prise of the Russian Federation. Author of more than 120 research publications in continuum mechanics. Research interests include continuum mechanics, wave propagation, asymptotic methods.

**Oblakova T.V.**, Ph. D., assoc. professor of the Department Computational Mathematics and Mathematical Physics at Bauman Moscow State Technical University. Author of 10 research papers and 7 learners' guides. Research interests include probability theory and mathematical statistics, mathematical modelling.

**Prikazchikov D.A.**, Ph. D., leading engineer in Centre «Symplex» of Bauman Moscow State Technical University. Author of 40 research publications and 6 learners' guides. Research interests include theory of elasticity, wave propagation, asymptotic methods. e-mail: prikazchikovda@yandex.ru