УДК 62.192

Расчет и оценка показателей ресурса изделий с использованием модели аддитивного накопления повреждений

© Г.С. Садыхов, В.Г. Крапоткин, О.И. Казакова

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Доказаны формулы расчета и оценок показателей ресурса изделий в заданном (штатном) режиме эксплуатации через характеристики и показатели надежности другого автомодельного режима, в котором расходование ресурса моделируется согласно закону аддитивного накопления повреждений.

Ключевые слова: *вероятность безотказной работы, интенсивность отказов, ресурс, остаточный ресурс, гамма-процентный ресурс, средний ресурс, гамма-процентный остаточный ресурс, средний остаточный ресурс.*

Введение. Многие ускоренные (форсированные) процессы старения изделий удовлетворяют модели аддитивного накопления повреждений, согласно которой израсходованный ресурс на интервале времени $(\tau, \tau + t)$ определяется по формуле

$$\Delta_t(A(\tau)) = A(\tau + t) - A(\tau), \tag{1}$$

где

$$A(t) = \int_0^t \nu(x)\,dx.$$

Здесь $\nu(x)$ — скорость расходования ресурса [1–10].

Возникает естественный вопрос о расчете показателей ресурса в штатном режиме эксплуатации (базовый режим), который, как правило, облегчен через показатели и характеристики ресурса в режиме ускорения (форсирования) процесса старения в условиях автомодельности этих процессов.

Определим основные показатели ресурса изделий, для которых этот перерасчет будет установлен.

Пусть ξ — наработка изделия от начала эксплуатации до перехода его в предельное состояние. Тогда

$$\xi_\tau = \xi - \tau \tag{2}$$

при условии, что $\xi > \tau$, выражает величину остаточного ресурса.

Поскольку величина (2) случайная, то определим показатель «*средний остаточный ресурс изделия сверх времени* τ» по формуле

$$R(\tau) = \langle \xi_\tau | \xi > \tau \rangle, \tag{3}$$

где $\langle \cdot \rangle$ — обозначение математического ожидания величины, содержащейся внутри угловых скобок.

В частности, при $\tau = 0$ из определения (3) имеем

$$R(0) = r, \tag{4}$$

где r — *средний* (*безостаточный*) *ресурс*.

Определим следующий показатель $T_\gamma(\tau)$ — *гамма-процентный остаточный ресурс изделия сверх времени* τ, введенный в работе [11], как решение следующего уравнения относительно t:

$$\frac{P(\tau + t)}{P(\tau)} = \gamma,$$

где $P(\bullet)$ — вероятность безотказной работы изделия в течение времени, указанного внутри скобок; γ — заданный уровень ($0 < \gamma < 1$).

В частности, при $\tau = 0$ имеем следующее соотношение:

$$T_\gamma(0) = t_\gamma, \tag{5}$$

где t_γ — *гамма-процентный* (*безостаточный*) *ресурс*.

Легко заметить, что

$$T_\gamma(\tau) = \max\{t | P_\tau(t) \geq \gamma\},$$

где

$$P_\tau(t) = \frac{P(\tau + t)}{P(\tau)}.$$

Расчет среднего остаточного ресурса изделия. Пусть заданы два режима эксплуатации (испытаний) изделий: φ и φ_0, где φ_0 — базовый (штатный) режим. В частности, базовым может быть такой режим, при котором $v(x) \equiv 1$. Тогда режим, для которого $v(x) > 1$, является более жестким, чем режим φ_0, а режим, в котором $v(x) < 1$, — облегченным относительно режима φ_0.

Теорема 1. *Если процессы старения изделия в режимах* φ *и* φ_0 *автомодельны, то справедлива следующая формула:*

$$R^{(\varphi)}(\tau) = \frac{1}{P^{(0)}(A(\tau))} \int\limits_{A(\tau)}^{\infty} P^{(0)}(z) x'(z) dz, \tag{6}$$

где $P^{(0)}(\cdot)$ *— вероятность безотказной работы изделия в режиме* φ_0;

$$A(\tau)=\int_0^{\tau} \nu(x)dx; \tag{7}$$

$x = x(z)$ *— решение уравнения*

$$A(x) = z \quad (A(x) > \tau); \tag{8}$$

$R^{(\varphi)}(\tau)$ *— средний остаточный ресурс изделия сверх времени* τ *в режиме* φ.

Доказательство. Для доказательства воспользуемся следующей формулой [2]:

$$R^{(\varphi)}(\tau)=\frac{1}{P^{(\varphi)}(\tau)}\int_{\tau}^{\infty} P^{(\varphi)}(x)dx, \tag{9}$$

где $P^{(\varphi)}(\cdot)$ — вероятность безотказной работы изделия в течение времени, указанного внутри скобок, в режиме эксплуатации φ.

Установим следующее соотношение:

$$P^{(\varphi)}(t) = P^{(0)}(A(t)). \tag{10}$$

В самом деле, так как

$$P^{(\varphi)}(t)=\Pr\left(\xi^{(\varphi)}>t\right),$$

где $\Pr(\cdot)$ — вероятность события внутри скобок, то

$$\Pr\left(\xi^{(\varphi)}>t\right)=\Pr\left(A(\xi^{(\varphi)})>A(t)\right).$$

Здесь $\xi^{(\varphi)}$ — наработка до отказа изделия в режиме φ. Откуда имеем

$$\Pr\left(\xi^{(\varphi)}>t\right)=\Pr\left(\eta^{(0)}>A(t)\right),$$

где $\eta^{(0)}=A\left(\xi^{(\varphi)}\right)$ — наработка до отказа изделия в режиме φ_0.

Следовательно,

$$\Pr\left(\xi^{(\varphi)}>t\right)=P^{(0)}\left(A(t)\right),$$

что и доказывает соотношение (10).

Используя в (9) соотношение (10), получим

$$R^{(\varphi)}(\tau)=\frac{1}{P^{(0)}(A(\tau))}\int_{\tau}^{\infty}P^{(0)}(A(x))dx,$$

откуда, сделав замену переменных под интегралом согласно (8), получим искомую формулу (6).

Формула (6) позволяет пересчитать показатели ресурса изделия из одного режима эксплуатации в другой при определении скорости $v(x)$.

Например, при $v(x)\equiv a$, где $a>0$ — постоянная (в этом случае $A(\tau)$, согласно (7), равна $a\tau$), имеем

$$R^{(\varphi)}(\tau)=\frac{1}{a}R^{(0)}(a\tau), \tag{11}$$

где $R^{(0)}(a\tau)$ — средний остаточный ресурс изделия после времени $a\tau$ в режиме эксплуатации φ_0.

В частности, для экспоненциального закона распределения ресурса $\left(P^{(0)}(t)=\exp(-\lambda t)\right)$ согласно (11) находим

$$R^{(\varphi)}(\tau)\equiv\frac{1}{a\lambda}, \tag{12}$$

где $\lambda>0$ — интенсивность отказов изделия в режиме эксплуатации φ_0.

Если выбрать в качестве режимов эксплуатации изделия следующие скорости: $a\equiv1$ для режима φ_0; $a<1$ для облегченного режима φ, то согласно (12) средний остаточный ресурс в режиме φ будет в $1/a$ раза больше, чем средний ресурс $r=1/\lambda$ в режиме φ_0. И наоборот, если $a>1$ — скорость, определяющая форсированный режим по отношению к $a\equiv1$, то согласно (12) средний остаточный ресурс в режиме эксплуатации φ в $1/a$ раза меньше, чем средний ресурс изделия в режиме φ_0.

Следствие. В условиях теоремы 1 справедлива следующая формула для среднего (безостаточного) ресурса изделия в режиме эксплуатации φ:

$$r^{(\varphi)}=\int_{0}^{\infty}P^{(0)}(z)x'(z)dz. \tag{13}$$

В самом деле, учитывая (4) в (6), получаем (13).

В процессе штатной эксплуатации режим применения изделия, как правило, переменный. Например, если это изделие радиоэлектронной техники, происходит чередование режима под токовым накалом и режима ожидания. Предельный ресурс в этом случае расходуется, как минимум, с двумя скоростями: α_1 до момента времени d и α_2 после времени d, т. е.

$$v(x)=\begin{cases}\alpha_1, \text{ если } 0<x\le d;\\ \alpha_2, \text{ если } x>d.\end{cases} \tag{14}$$

В общем случае ресурс изделия может расходоваться в n + 1 различных режимах со скоростями α_1, α_2, …, α_n, α_{n+1}:

$$v(x)=\begin{cases}\alpha_1, & \text{если } 0<x\le d_1;\\ \alpha_2, & \text{если } d_1<x\le d_1+d_2;\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ \alpha_n, & \text{если } d_1+d_2+\ldots+d_{n-1}<x\le d_1+d_2+\ldots+d_{n-1}+d_n;\\ \alpha_{n+1}, & \text{если } x>d_1+d_2+\ldots+d_{n-1}+d_n.\end{cases} \tag{15}$$

Тогда справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Если процессы старения изделия в режимах эксплуатации* φ *и* φ_0 *автомодельны и скорости расходования ресурса определены соотношениями* (15)*, то справедлива следующая формула:*

$$R^{(\varphi)}(\tau)=\frac{1}{\alpha_{n+1}}R^{(0)}\left(A(\tau)\right), \tag{16}$$

где

$$A(\tau)=\alpha_1 d_1+\alpha_2 d_2+\ldots+\alpha_n d_n+\alpha_{n+1}\left(\tau-\sum_{i=1}^{n}d_i\right);\quad \tau>\sum_{i=1}^{n}d_i.$$

Доказательство. Поскольку

$$A(x)=\alpha_1 d_1+\alpha_2 d_2+\ldots+\alpha_n d_n+\alpha_{n+1}(x-d),$$

где $d=\sum_{i=1}^{n}d_i$; $x>d$, то из уравнения $A(x)=z$ находим $x'(z)=\dfrac{1}{\alpha_{n+1}}$.

Подставляя последнее выражение в (6), получаем

$$R^{(\varphi)}(\tau)=\frac{1}{\alpha_{n+1}P^{(0)}\left(A(\tau)\right)}\int\limits_{A(\tau)}^{\infty}P^{(0)}(z)dz,$$

что доказывает (16), так как [12]

$$\frac{1}{P^{(0)}(A(\tau))}\int\limits_{A(\tau)}^{\infty}P^{(0)}(z)dz=R^{(0)}(A(\tau)).$$

В качестве примера рассмотрим изделие, ресурс которого распределен равномерно на отрезке (0, l) в режиме эксплуатации φ_0. Требуется найти средний остаточный ресурс сверх времени τ в автомодельном режиме φ, скорости расходования которого заданы соотношениями (14).

Так как [2]

$$R^{(0)}(\tau) = \frac{l-\tau}{2}, \quad \tau \in (0,\, l),$$

то согласно формуле (16) получим

$$R^{(\varphi)}(\tau) = \frac{l - A(\tau)}{2\alpha_2},$$

где $A(\tau) = \alpha_1 d + \alpha_2(\tau - d),\ \tau > d.$

Расчет средней доли безотказной наработки. Пусть τ — время отказа изделия. Введем следующую цензурированную случайную величину $\eta(t)$ согласно формуле

$$\eta(t) = \begin{cases} \tau, & \text{если } \tau < t; \\ t, & \text{если } \tau \ge t. \end{cases} \qquad (17)$$

Рассмотрим математическое ожидание этой величины, которую назовем *средней безотказной наработкой*.

Средней долей безотказной наработки (СДБН) изделия называют величину [13, 14]

$$J(t) = \left\langle \frac{\eta(t)}{t} \right\rangle, \qquad (18)$$

где $\langle \cdot \rangle$ — обозначение математического ожидания выражения, содержащегося внутри угловых скобок.

Докажем следующее утверждение.

Теорема 3. *В условиях автомодельности процессов старения изделия в режимах эксплуатации* φ *и* φ_0 *справедлива следующая формула:*

$$J^{(0)}(A(\tau)) = \frac{1}{A(\tau)} \int_0^{\tau} P^{(\varphi)}(y) v(y)\, dy, \qquad (19)$$

где $J^{(0)}(\cdot)$ *— СДБН изделия в режиме эксплуатации* φ_0; *величина* $A(\tau)$ *определена формулой* (7).

Доказательство. Для доказательства установим следующую формулу:

$$J(t) = \frac{1}{t} \int_0^t P(x) dx. \qquad (20)$$

Пусть $x \in (0,\, t)$, тогда согласно (17) имеем

$$\Pr(\eta(t) < x) = \Pr(\tau < x) = F(x), \qquad (21)$$

где $F(x)$ — функция распределения случайной величины τ.

Так как

$$\Pr(\eta(t)=t)=\Pr(\xi \ge t)=P(t), \tag{22}$$

то функция распределения величины (17) согласно (21) и (22) будет иметь следующий вид:

$$F_\eta(x)=\begin{cases} F(x), \text{ если } x\in(0,\,t); \\ P(t), \text{ если } x=t. \end{cases}$$

Откуда для плотности распределения величины (17) имеем формулу

$$f_\eta(x)=\begin{cases} f(x), \text{ если } x\in(0,\,t); \\ P(t), \text{ если } x=t. \end{cases} \tag{23}$$

Очевидно, что найденная плотность удовлетворяет нормировочному свойству, так как

$$\int_0^t f_\eta(x)dx=1.$$

Найдем среднюю безотказную наработку, равную

$$\langle\eta(t)\rangle=\int_0^t x\, f_\eta(x)\,dx. \tag{24}$$

Используя (23) для правой части выражения (24), имеем

$$\int_0^t x\, f_\eta(x)\,dx=\int_0^t x\, f(x)\,dx+tP(t). \tag{25}$$

Так как

$$\int_0^t x\, f(x)\,dx=-tP(t)+\int_0^t P(x)\,dx,$$

то, подставляя это выражение в (25), получаем

$$\int_0^t x\, f_\eta(x)\,dx=\int_0^t P(x)\,dx.$$

Учитывая это в (24), имеем

$$\langle \eta(t) \rangle = \int_0^t P(x)\,dx.$$

Тогда согласно (18) найдем

$$J(t) = \frac{1}{t}\int_0^t P(x)dx,$$

что доказывает формулу (20).

Так как согласно (20)

$$J^{(0)}(A(\tau)) = \frac{1}{A(\tau)} \int_0^{A(\tau)} P^{(0)}(x)\,dx,$$

то, сделав замену переменной под интегралом $x = A(y)$, найдем

$$J^{(0)}(A(\tau)) = \frac{1}{A(\tau)}\int_0^{\tau} P^{(0)}(A(y))\,v(y)dy.$$

Учитывая соотношение (10), получим искомую формулу (19), что доказывает теорему 3.

В частности, если $v(y) \equiv v_0$, где $v_0 > 0$ — постоянная, то найдем из (19)

$$J^{(0)}(v_0\tau) = J^{(\varphi)}(\tau),$$

где $J^{(\varphi)}(\tau) = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} P^{(\varphi)}(y)dy$ — СДБН изделия в режиме эксплуатации φ.

В связи с утверждением теоремы 3 возникает вопрос: можно ли выразить аналогичным образом и другие показатели ресурса изделия в режиме эксплуатации φ_0 через характеристики надежности в режиме эксплуатации φ?

Ответ на этот вопрос дает следующее утверждение.

Теорема 4. *Если процессы старения изделия в режимах* φ *и* φ_0 *автомодельны, то справедлива следующая формула для среднего остаточного ресурса изделия сверх времени* $A(\tau)$ *в режиме* φ_0:

$$R^{(0)}(A(\tau)) = \frac{1}{P^{(\varphi)}(\tau)}\int_{\tau}^{\infty} P^{(\varphi)}(y)v(y)dy. \tag{26}$$

Доказательство. Имеем согласно [12]

$$R^{(0)}(A(\tau)) = \frac{1}{P^{(0)}(A(\tau))} \int\limits_{A(\tau)}^{\infty} P^{(0)}(x)dx.$$

Сделав замену переменных под интегралом $x = A(y)$, получим

$$R^{(0)}(A(\tau)) = \frac{1}{P^{(0)}(A(\tau))} \int\limits_{\tau}^{\infty} P^{(0)}(A(y))dA(y).$$

Учитывая, что

$$dA(y) = v(y)dy,$$

найдем

$$R^{(0)}(A(\tau)) = \frac{1}{P^{(0)}(A(\tau))} \int\limits_{\tau}^{\infty} P^{(0)}(A(y))\,v(y)dy.$$

Откуда с учетом формулы (10) получим искомую формулу (26).

Так, если $v(y) \equiv a > 0$ — постоянная, то согласно (26) имеем

$$R^{(0)}(a\tau) = aR^{(\varphi)}(\tau),$$

что совпадает с формулой (11).

В частности, при $\tau = 0$ из формулы (26) вытекает соотношение

$$r^{(0)} = \int\limits_{0}^{\infty} P^{(\varphi)}(y)\,v(y)dy,$$

из которого при $v(y) \equiv a > 0$ следует формула

$$r^{(0)} = a\,r^{(\varphi)}, \qquad (27)$$

где $r^{(0)}$ — средний (безостаточный) ресурс в режиме φ_0; $r^{(\varphi)} = \int\limits_{0}^{\infty} P^{(\varphi)}(y)dy$ — средний ресурс в режиме φ.

Формула (27) следует из (26) с учетом (4), а также из формулы (13), так как $A(x) = ax = z$ и $x'(z) = \frac{1}{a}$, следовательно,

$$r^{(\varphi)} = \frac{r^{(0)}}{a},$$

где $r^{(0)} = \int\limits_{0}^{\infty} P^{(0)}(z)dz.$

Расчет гамма-процентных показателей ресурса. Пусть $T_\gamma^{(\varphi)}(\tau)$ — гамма-процентный остаточный ресурс изделия сверх времени τ в режиме эксплуатации φ. Тогда справедливо следующее утверждение.

Теорема 5. *Если процесс старения изделия в режиме эксплуатации* φ *автомоделен процессу старения в режиме* φ_0, *то гамма-процентный остаточный ресурс в режиме* φ_0 *выражается через аналогичный показатель в режиме* φ *следующей формулой:*

$$T_\gamma^{(0)}(A(\tau)) = \Delta_t(A(\tau)), \qquad (28)$$

где правая часть определена соотношением (1) *при* $t = T_\gamma^{(\varphi)}(\tau)$.

Доказательство. Согласно определению показателя гамма-процентного остаточного ресурса изделия сверх времени τ имеем

$$\frac{P^{(\varphi)}\left(\tau + T_\gamma^{(\varphi)}(\tau)\right)}{P^{(\varphi)}(\tau)} = \gamma,$$

где γ — заданный уровень $(0 < \gamma < 1)$.

Используя формулу (10), получим

$$\frac{P^{(0)}\left(A\left(\tau + T_\gamma^{(\varphi)}(\tau)\right)\right)}{P^{(0)}(A(\tau))} = \gamma. \qquad (29)$$

Согласно (1) имеем

$$A\left(\tau + T_\gamma^{(\varphi)}(\tau)\right) = A(\tau) + \Delta_t(A(\tau)),$$

где $t = T_\gamma^{(\varphi)}(\tau)$. Подставляя это соотношение в (29), получим

$$\frac{P^{(0)}\left(A(\tau) + \Delta_t(A(\tau))\right)}{P^{(0)}(A(\tau))} = \gamma.$$

Откуда согласно определению гамма-процентного ресурса изделия сверх времени $A(\tau)$ в режиме φ_0 имеем

$$\Delta_t(A(\tau)) = T_\gamma^{(0)}(A(\tau)),$$

что и доказывает формулу (28) и тем самым теорему 5.

Следствие. В условиях автомодельности процессов старения изделия в режимах эксплуатации φ и φ_0 справедлива следующая формула для гамма-процентных (безостаточных) ресурсов:

$$t_\gamma^{(0)} = \int\limits_0^{t_\gamma^{(\varphi)}} v(x)dx. \tag{30}$$

Формула (30) следует из (28) с учетом того, что согласно (5)

$$T_\gamma^{(0)}(0) = t_\gamma^{(0)}; \quad T_\gamma^{(\varphi)}(0) = t_\gamma^{(\varphi)},$$

а также того, что по формуле (1) при $t = t_\gamma^{(\varphi)}$ имеем

$$\Delta_t(A(0)) = \int\limits_0^{t_\gamma^{(\varphi)}} v(x)dx.$$

Если скорость расходования ресурса изделия в режиме эксплуатации φ подчиняется закону (14), то согласно формуле (28) получим

$$T_\gamma^{(0)}\left(\alpha_1 d + \alpha_2(\tau - d)\right) = \int\limits_\tau^{\tau + T_\gamma^{(\varphi)}(\tau)} v(x)dx. \tag{31}$$

Так как при $\tau > d$

$$\int\limits_\tau^{\tau + T_\gamma^{(\varphi)}(\tau)} v(x)dx = \alpha_2 T_\gamma^{(\varphi)}(\tau),$$

то формула (31) примет следующий вид:

$$T_\gamma^{(0)}\left(\alpha_1 d + \alpha_2(\tau - d)\right) = \alpha_2 T_\gamma^{(\varphi)}(\tau).$$

В частности, при $\alpha_1 = \alpha_2 = a$ найдем

$$T_\gamma^{(0)}(a\tau) = a T_\gamma^{(\varphi)}(\tau).$$

Оценки показателей ресурса изделия по результатам форсированных испытаний. При планировании форсированных испытаний скорость расходования ресурса, как правило, выбирают согласно формуле

$$v(t) = \frac{\lambda^{(\varphi)}(t)}{\lambda^{(0)}}, \tag{32}$$

где $\lambda^{(\varphi)}(t)$ — интенсивность отказов изделия в режиме форсирования φ; $\lambda^{(0)}$ — постоянная интенсивность отказов при базовом (штатном) режиме эксплуатации φ_0.

В этом случае расчет показателей остаточного ресурса при базовом режиме через характеристики надежности в форсированном режиме практически затруднен из-за отсутствия полной информации о поведении интенсивности отказов в форсированном режиме $\lambda^{(\varphi)}(t)$ как непрерывной функции времени t на интервале $\left(\tau,\, \tau + T_\gamma^{(\varphi)}(\tau)\right)$. В связи с этим докажем следующее утверждение.

Теорема 6. *Если процесс старения изделия в форсированном режиме автомоделен процессу старения при базовом режиме и скорость расходования ресурса в форсированном режиме определена соотношением* (32), *где* $\lambda^{(\varphi)}(t)$ *— неубывающая функция времени, то гамма-процентный остаточный ресурс изделия сверх времени* $A(\tau)$ *при базовом режиме эксплуатации* φ_0 *допускает следующую оценку:*

$$T_\gamma^{(0)}(A(\tau)) \ge \frac{\lambda^{(\varphi)}(\tau)}{\lambda^{(0)}} T_\gamma^{(\varphi)}(\tau), \tag{33}$$

где $T_\gamma^{(\varphi)}(\tau)$ *— гамма-процентный остаточный ресурс изделия сверх времени* τ *в форсированном режиме* φ; *значение* $A(\tau)$ *определено соотношением* (7). *При этом оценка* (33) *достижима.*

Доказательство. Воспользуемся формулой (28), откуда с учетом (32) и теоремы о среднем для интеграла имеем

$$T_\gamma^{(0)}(A(\tau)) = \frac{\lambda^{(\varphi)}(\tau_0)}{\lambda^{(0)}} T_\gamma^{(\varphi)}(\tau), \tag{34}$$

где $\tau_0 \in \left(\tau,\, \tau + T_\gamma^{(\varphi)}(\tau)\right)$.

Так как $\lambda^{(\varphi)}(t)$ — неубывающая функция времени, то из (34) получим

$$T_\gamma^{(0)}(A(\tau)) \ge \frac{\lambda^{(\varphi)}(\tau)}{\lambda^{(0)}} T_\gamma^{(\varphi)}(\tau),$$

что доказывает оценку (33).

Покажем, что оценка (33) достижима.

В самом деле, рассмотрев экспоненциальный закон распределения, имеем [15]:

$$T_\gamma^{(0)}(A(0)) = \frac{-\ln\gamma}{\lambda^{(0)}},$$

$$T_\gamma^{(\varphi)}(A(0)) = \frac{-\ln\gamma}{\lambda^{(\varphi)}},$$

$$\lambda^{(\varphi)}(t) \equiv \lambda^{(\varphi)} > 0 \text{ — постоянная.}$$

Видно, что правая и левая части оценки (33) равны $-\ln\gamma/\lambda^{(0)}$, что доказывает достижимость оценки.

Следствие. В условиях теоремы 6 справедлива следующая оценка для показателей гамма-процентных (безостаточных) ресурсов изделия:

$$t_\gamma^{(0)} \geq \frac{\lambda^{(\varphi)}(0)}{\lambda^{(0)}} t_\gamma^{(\varphi)}. \tag{35}$$

При этом оценка (35) достижима.

Оценка (35) следует из (33) с учетом того, что согласно (5)

$$T_\gamma^{(0)}(0) = t_\gamma^{(0)}; \quad T_\gamma^{(\varphi)}(0) = t_\gamma^{(\varphi)}.$$

Для средних показателей ресурса изделия справедливо следующее утверждение.

Теорема 7. *Если процесс старения изделия в форсированном режиме автомоделен процессу старения при базовом режиме и скорость расходования ресурса в форсированном режиме определена соотношением* (32), *где* $\lambda^{(\varphi)}(t)$ *— неубывающая функция времени, то средний остаточный ресурс изделия сверх времени* $A(\tau)$ *при базовом режиме* φ_0 *допускает следующую оценку:*

$$R^{(0)}(A(\tau)) \geq \frac{\lambda^{(\varphi)}(\tau)}{\lambda^{(0)}} R^{(\varphi)}(\tau), \tag{36}$$

где $R^{(\varphi)}(\tau)$ *— средний остаточный ресурс изделия сверх времени τ в форсированном режиме* φ; *значение* $A(\tau)$ *определено соотношением* (7). *При этом оценка* (36) *достижима.*

Доказательство. Так как интенсивность отказов изделия в форсированном режиме согласно условию теоремы — неубывающая функция, то из (32) имеем

$$v(y) \geq \frac{\lambda^{(\varphi)}(\tau)}{\lambda^{(0)}}, \tag{37}$$

где $y \in (\tau, \infty)$.

Учитывая оценку (37) в формуле (26), получим

$$R^{(0)}(A(\tau)) \geq \frac{\lambda^{(\varphi)}(\tau)}{\lambda^{(0)}} \frac{1}{P^{(\varphi)}(\tau)} \int_\tau^\infty P^{(\varphi)}(y)dy,$$

что доказывает оценку (36), так как [12]

$$R^{(\varphi)}(\tau)=\frac{1}{P^{(\varphi)}(\tau)}\int_{\tau}^{\infty}P^{(\varphi)}(y)dy.$$

Убедимся в том, что оценка (36) достижима.

Пусть ресурс изделия в обоих режимах φ и φ_0 подчиняется экспоненциальному закону с постоянными интенсивностями отказов, равными соответственно $\lambda^{(\varphi)}>0$ и $\lambda^{(0)}>0.$ Тогда левая часть оценки (36) равна $1/\lambda^{(0)}$, а правая часть — этому же значению, так как $R^{(\varphi)}(0)=1/\lambda^{(\varphi)}$, что и доказывает достижимость оценки (36).

Следствие. В условиях теоремы 7 справедлива следующая оценка для среднего (безостаточного) ресурса изделия при базовом режиме эксплуатации φ_0:

$$r^{(0)}\geq\frac{\lambda^{(\varphi)}(0)}{\lambda^{(0)}}r^{(\varphi)}, \tag{38}$$

где $r^{(\varphi)}$ — средний ресурс изделия в режиме форсирования φ.

При этом оценка (38) достижима.

Оценка (38) следует из оценки (36) с учетом того, что согласно (4) имеем

$$R^{(0)}(0)=r^{(0)};\quad R^{(\varphi)}(0)=r^{(\varphi)}.$$

Заключение. Доказаны формулы расчета и оценок показателей ресурса изделий в заданном (штатном) режиме эксплуатации через характеристики и показатели надежности другого автомодельного режима, в котором расходование ресурса моделируется согласно закону аддитивного накопления повреждений.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 07-08-00574-а и № 10-08-00607-а).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Райншке К. *Модели надежности и чувствительности систем*. Москва, Мир, 1979, 452 с.

[2] Садыхов Г.С., Кузнецов В.И. *Методы и модели оценок безопасности сверхназначенных сроков эксплуатации технических объектов*. Москва, ЛКИ, 2007, 144 с.

[3] Sadykhov G.S., Savchenko V.P., Gulyaev Ju.V. Estimation of the Residual Life for Items of Equipment, Based on a Physical Model of Additive Accumulation of Damages. *The Smithsonian / NASA Astrophysics Data System, Physics,* 1995, vol. 40, no. 8, pp. 397–400.

[4] Sadykhov G.S., Savchenko V.P. Dependence of the Operating-Life Index on the Characteristics of Life-Reserve Spending. *The Smithsonian / NASA Astrophysics Data System, Physics,* 1998, vol. 43, no. 7, pp. 412– 414.

[5] Rasch G. *Probabilistic Models for Some Intelligence and Attainment Tests*. Chicago, The University of Chicago Press, 1980, 250 p.

[6] Sadykhov G.S. Average Number of Failure-Free Operations up to Critical Failure of a Technologically Dangerous Facility: Calculation, Limit and Non-Parametric Estimates. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 2013, vol. 42, no. 1, pp. 81–88.

[7] Baykal-Gursoy M., Xiao W., Ozbay K. Modeling traffic flow interrupted by incidents. *European journal of Operational Research*, 2009, vol. 195, pp. 127–138.

[8] Chao X. A queueing network model with catastrophes and product form solation. *Operations Research Letters*, 1995, vol. 18, no. 2, pp. 75–79.

[9] Cranston M., Koralov L., Molchanov S., Vainberg B. Continuos model for homopolymers. *J. Funct. Anal*., 2009, vol. 256, no. 8, pp. 2656–2696.

[10] Садыхов Г.С., Савченко В.П. Оценка остаточного ресурса изделий с использованием физической модели аддитивного накопления повреждений. *Доклады РАН*, 1995, т. 343, № 4, с. 469–472.

[11] Садыхов Г.С. Показатель остаточного ресурса и его свойства. *Изв. АН СССР. Сер. Техническая кибернетика*, 1985, № 4, с. 98–102.

[12] Садыхов Г.С. Критерии оценок безопасной эксплуатации технических объектов. *Проблемы машиностроения и надежности машин*, 2005, № 1, с. 119–122.

[13] *ГОСТ 27.505–86. Надежность в технике. Система сбора, обработки и анализа информации о надежности бытовой радиоэлектронной аппаратуры и комплектующих ее изделий*. Москва, Изд-во стандартов, 1986, 35 с.

[14] Садыхов Г.С., Савченко В.П. Средняя доля остаточного ресурса и ее непараметрические оценки. *Вопросы теории безопасности и устойчивости систем*. ВЦ РАН, 1999, вып. 1, с. 65–72.

[15] Садыхов Г.С. Гамма-процентные показатели эксплуатационной надежности и их свойства. *Изв. АН СССР. Сер. Техническая кибернетика*, 1983, № 6, с. 185–187.

Статья поступила в редакцию 06.03.2014

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Садыхов Г.С., Крапоткин В.Г., Казакова О.И. Расчет и оценка показателей ресурса изделий с использованием модели аддитивного накопления повреждений. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 1, с. 82–98.

Садыхов Гулам Садыхович — д-р техн. наук, профессор кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, действительный член Академии проблем качества РФ. Автор более 200 печатных работ. Область научных интересов: системный анализ и обработка информации для принятия управляющих решений по обеспечению надежной и безопасной эксплуатации техногенно-опасных объектов. e-mail: gsadykhov@gmail.com

Крапоткин Валентин Георгиевич — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Высшая математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор 30 печатных работ. Область научных интересов: непараметрические методы расчета показателей надежности.

Казакова Ольга Игоревна — аспирантка кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор 4 печатных работ. Область научных интересов: расчет и оценка показателей надежности на основе моделирования скорости расходования ресурса.

Additive damage accumulation approach to calculation and estimation of objects' life feartures

© G.S. Sadykhov, V.G. Krapotkin, O.I. Kazakova

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

In this paper we prove constitutive equations for calculation and estimation of life's features of the objects working in normal mode through life's features of objects working in another self-similar mode where life consumption is modeled according to the law of the additive damage accumulation.

Keywords: *reliability function, failure rate, life, residual life, gamma-percentile life, mean life, gamma-percentile residual life, mean residual life.*

REFERENCES

[1] Rainshke K. *Modeli nadezhnosti i chuvstvitel'nosti system* [Models of system reliability and sensitivity]. Moscow, Mir Publ., 1979, 452 p.

[2] Sadykhov G.S., Kuznetsov V.I. *Metody i modeli otsenok bezopasnosti sverkhnaznachennykh srokov ekspluatatsii tekhnicheskikh ob"ektov* [Methods and models of safety estimation of technical objects above the exploitation period]. Moscow, LKI Publ., 2007, 144 p.

[3] Sadykhov G.S., Savchenko V.P., Gulyaev Ju. V. *The Smithsonian. NASA Astrophysics Data System, Physics*, 1995, vol. 40, issue 8, pp. 397–400.

[4] Sadykhov G.S., Savchenko V.P. *The Smithsonian. NASA Astrophysics Data System, Physics,* 1998, vol. 43, issue 7, pp. 412– 414.

[5] Rasch G. *Probabilistic Models for Some Intelligence and Attainment Tests*. Chicago, The University of Chicago Press, 1980, 250 p.

[6] Sadykhov G.S. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 2013, vol. 42, no. 1, pp. 81– 88.

[7] Baykal-Gursoy M., Xiao W., Ozbay K. *European journal of Operational Research*, 2009, vol. 195, pp. 127–138.

[8] Chao X. *Operations Research Letters*, 1995, vol. 18, no. 2, pp. 75–79.

[9] Cranston M., Koralov L., Molchanov S., Vainberg B. *J. Funct. Anal*., 2009, vol. 256, no. 8, pp. 2656–2696.

[10] Sadykhov G.S., Savchenko V.P. *Doklady RAN – Proceedings of the Russian Academy of Sciences*, 1995, vol. 343, no.4, pp. 469–472.

[11] Sadykhov G.S. *Izv. AN SSSR. Seriya tekhnicheskaya kibernetika — Proc. Acad. Sci. USSR. Technical Cybernetics Series*, 1985, no. 4, pp. 98–102.

[12] Sadykhov G.S. *Problemy mashinostroeniya i nadezhnosti mashin — Problems of engineering and machine reliability*, 2005, no. 1, pp. 119–122.

[13] *GOST 27.505—86. Nadezhnost' v tekhnike. Sistema sbora, obrabotki i analiza informatsii o nadezhnosti bytovoi radioelektronnoi apparatury i komplektuyushchikh ee izdeliy* [State Standart 27.505—86. Reliability of machines. Gathering, processing and analyzing data on reliability of consumer radioelectronic equipment and its component parts]. Moscow, Izd-vo Standartov (Standarts Publ.), 1986, 35 p.

[14] Sadykhov G.S., Savchenko V.P. *Voprosy teorii bezopasnosti i ustoichivosti system — Problems of safety theory and system stability,* CC RAS, 1999, iss. 1, pp. 65–72.

[15] Sadykhov G.S. *Izv. AN SSSR. Seriya tekhnicheskaya kibernetika — Proc. Acad. Sci. USSR. Technical Cybernetics Series*, 1983, no. 6, pp. 185–187.

Sadykhov G.S., Dr. Sci., Professor of the Computational Mathematics and Mathematical Physics Department at Bauman Moscow State Technical University; member of the Academy of Quality Problems of the Russian Federation. Author of more than 200 publications. Research interests include system analysis and processing of information for decision-making control to ensure safe and reliable operation of technologically dangerous objects. e-mail: gsadykhov@gmail.com

Krapotkin V.G., Ph. D., Assoc. Professor of the Higher Mathematics Department at Bauman Moscow State Technical University. Author of 30 publications. Research interests include nonparametric methods for calculating reliability indices.

Kazakova O.I., graduate student of the Computational Mathematics and Mathematical Physics Department at Bauman Moscow State Technical University. Author of four publications. Research interests include calculating and estimating reliability indices by simulating resource consumption rate.