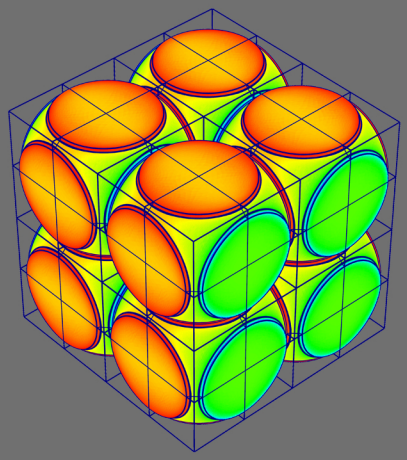
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Dimitrienko Y., Koryakov M., Zakharov A. Application of RKDG method for computational solution of three-dimensional gas-dynamic equations with non-structured grids. Mathematical Modeling and Cотputational Methods, 2015, №4 (8), pp. 75-91

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/64/

Параметры загрузки:
IP: 3.41.188.32
17.11.2026 07:00:51

УДК 519.6, 533.6

Применение метода RKDG для численного решения трехмерных уравнений газовой динамики на неструктурированных сетках

© Ю.И. Димитриенко, М.Н. Коряков, А.А. Захаров

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Рассмотрено применение конечно-элементного метода RKDG (Runge — Kutta discontinuous Galerkin) для численного интегрирования трехмерной системы уравнений идеального газа на неструктурированных сетках. Проведено решение двух тестовых задач с помощью представленного алгоритма. Для каждой задачи приведено сравнение с известными аналитическими решениями или же с табличными данными. Дана оценка погрешности решения.

Ключевые слова: *газовая динамика, идеальный газ, численные методы, RKDG, TVD.*

Введение. Численное моделирование в задачах газовой динамики играет важную роль при проектировании сложных технических систем: конструкций планера самолетов, изделий ракетной техники, двигательных систем и других объектов [1−7]. Несмотря на то что в настоящее время существует значительное число программных продуктов, в том числе коммерческих, которые предназначены для решения задач газовой динамики, универсальных программных средств и методов численного решения уравнений газовой динамики, применимых для широкого спектра прикладных задач, пока не существует.

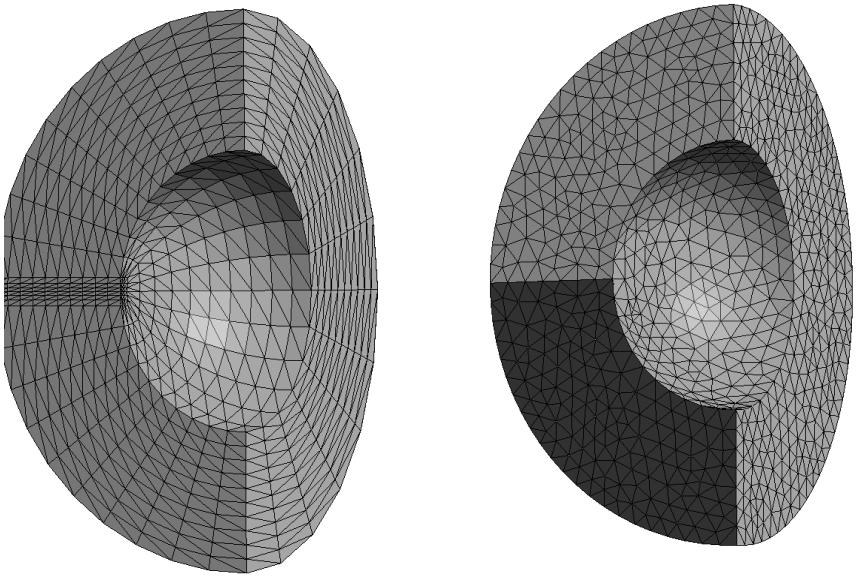
Среди численных методов решения задач газовой динамики в последнее время широкое распространение приобрели конечно-разностные методы типа TVD, которые обладают такими необходимыми свойствами, как монотонность решения и второй порядок аппроксимации. Однако при решении реальных задач со сложной геометрией обтекаемого тела построить гладкую конечно-разностную сетку, которая необходима для разностных схем повышенного порядка точности, весьма трудно. Поэтому в таких случаях предпочтительнее использовать неструктурированные сетки и конечно-объемные или конечно-элементные методы. Одним из перспективных методов решения трехмерных задач нестационарной газовой динамики является метод RKDG второго порядка, который относится к классу TVD-схем благодаря отдельной процедуре монотонизации. Известны положительные результаты применения этого метода для двумерных плоских и осесимметричных задач газовой динамики [8, 9]. Работ, в которых бы излагался практический опыт разработки программного обеспече-

ния для решения 3D-задач газовой динамики на основе метода RKDG, в настоящее время крайне мало.

Статья посвящена разработке численного алгоритма и программного обеспечения, реализующего этот алгоритм для 3D-конечно-элементного метода RKDG второго порядка для решения нестационарной задачи движения идеального газа (системы уравнений Эйлера).

Метод RKDG применяют на тетраэдральной расчетной сетке. Для построения тетраэдральной сетки используют разработанный авторами в НОЦ «СИМПЛЕКС» МГТУ им. Н.Э. Баумана генератор конечно-разностных адаптивных сеток, входящий в программный комплекс Sigma. В сгенерированной конечно-разностной сетке выделяются гексаэдральные элементы, каждый из которых разбивается на пять или шесть тетраэдров. На оси симметрии генератор создает вырожденный элемент: о-грид. Полученная таким образом тетраэдральная сетка сохраняет адаптацию сеточных линий под границу области изучаемого тела и позволяет получать более качественную картину течения, чем на сетке, в которой ребра тетраэдров ориентированы произвольным образом. Кроме того, сеточный генератор поддерживает функцию сгущения сеточных линий в направлении обтекаемого тела, что позволяет повысить точность расчета вблизи рассматриваемого объекта.

На рис. 1, *а* представлена сетка, построенная генератором Sigma. На рис. 1, *б* — сетка, построенная с помощью триангуляции Делоне в программном продукте gmsh (http://geuz.org/gmsh).



а *б*

Рис. 1. Примеры нестуктурированных тетраэдральных сеток, построенных генераторами Sigma (*а*) и gmsh (*б*)

Математическая постановка задачи. Во всей области необходимо решить систему уравнений идеального нетеплопроводного газа (система уравнений Эйлера), состоящую из законов сохранения массы, импульса и энергии [10]. Система уравнений Эйлера в бескоординатной форме выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} = 0; \\ \dfrac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} + p\mathbf{E}) = \mathbf{0}; \\ \dfrac{\partial \rho \varepsilon}{\partial t} + \nabla \cdot \left[(\rho \varepsilon + p)\mathbf{v} \right] = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где ρ — плотность газа, кг/м^3; $\mathbf{v}$ — вектор скорости, м/с; p — давление, Па; $\mathbf{E}$ — метрический тензор; $\varepsilon = \dfrac{p}{(\gamma - 1)\rho} + \dfrac{\mathbf{v}^2}{2}$ — массовая плотность полной энергии; $\gamma = 1,4$ — показатель адиабаты.

Система (1) замыкается следующими граничными и начальными условиями:

1) на поверхности, представляющей собой твердую непроницаемую стенку, ставится условие непротекания

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0,$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности;

2) на поверхности, где выполняются условия $\mathbf{vn} < 0$ и $|\mathbf{vn}| > a$ (сверхзвуковая граница входа), задаются параметры набегающего потока: $\rho = \rho_\infty$; $\mathbf{v} = \mathbf{v}_\infty$; $p = p_\infty$, a — местная скорость звука;

3) на поверхности, где выполняются условия $\mathbf{vn} > 0$ и $|\mathbf{vn}| > a$ (сверхзвуковая граница выхода), граничные условия не задаются;

4) на поверхности, которая является плоскостью симметрии, задаются следующие условия:

$$\frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{n}} = 0; \quad \mathbf{vn} = 0; \quad \frac{\partial v_{\tau_I}}{\partial \mathbf{n}} = 0; \quad \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}},$$

где τ_I — касательные к поверхности векторы ($\mathbf{n}\tau_I = 0$), $I = 1,2$;

5) начальные условия к системе (1) имеют вид

$$\rho(0, \mathbf{x}) = \rho_0(\mathbf{x}); \quad \mathbf{v}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}); \quad p(0, \mathbf{x}) = p_0(\mathbf{x}).$$

Численный метод. Запишем систему (1) в декартовой системе координат:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}+\frac{\partial \mathbf{F}^1(\mathbf{U})}{\partial x}+\frac{\partial \mathbf{F}^2(\mathbf{U})}{\partial y}+\frac{\partial \mathbf{F}^3(\mathbf{U})}{\partial z}=0, \tag{2}$$

где введены следующие вектор-столбцы:

$$\mathbf{U}=\begin{pmatrix}\rho\\ \rho w^1\\ \rho w^2\\ \rho w^3\\ \rho\varepsilon\end{pmatrix};\quad \mathbf{F}^1(\mathbf{U})=\begin{pmatrix}\rho w^1\\ \rho w^1 w^1+p\\ \rho w^1 w^2\\ \rho w^1 w^3\\ (\rho\varepsilon+p)w^1\end{pmatrix};$$

$$\mathbf{F}^2(\mathbf{U})=\begin{pmatrix}\rho w^2\\ \rho w^2 w^1\\ \rho w^2 w^2+p\\ \rho w^2 w^3\\ (\rho\varepsilon+p)w^2\end{pmatrix};\quad \mathbf{F}^3(\mathbf{U})=\begin{pmatrix}\rho w^3\\ \rho w^3 w^1\\ \rho w^3 w^2\\ \rho w^3 w^3+p\\ (\rho\varepsilon+p)w^3\end{pmatrix}, \tag{3}$$

w^1, w^2, w^3 — компоненты вектора скорости в декартовом базисе.

Каждое из уравнений системы (2) представляет собой скалярное уравнение вида

$$\frac{\partial u^i}{\partial t}+\nabla f^i(\mathbf{U})=0,\qquad i=1,\ ...,\ 5, \tag{4}$$

где u^i — соответствующий компонент вектора $\mathbf{U}$; $f^i(\mathbf{U})=$ $=\left(F^{1i}(\mathbf{U}),F^{2i}(\mathbf{U}),F^{3i}(\mathbf{U})\right)$.

Применим для решения системы (4) конечно-элементный метод RKDG [11]. Введем в рассматриваемой расчетной области конечно-элементную тетраэдральную сетку (рис. 2). Внутри каждого тетраэдра построим линейные функции формы $\varphi_j(x,y,z)$, $j=1,\ ...,4$, обладающие свойством $\varphi_j(a_k)=\delta_{jk}$, где δ_{jk} — символ Кронекера; a_k, $k=1,\ ...,\ 4$ — точки Гаусса [12].

Умножим (4) на функцию формы φ_j, $j=1,\ ...,\ 4$ и проинтегрируем по объему тетраэдра:

$$\int\limits_V \frac{\partial}{\partial t}\left(\varphi_j u^i\right)dV=\int\limits_V \varphi_j \nabla f^i(\mathbf{U})dV,\qquad i=1,\ ...,\ 5. \tag{5}$$

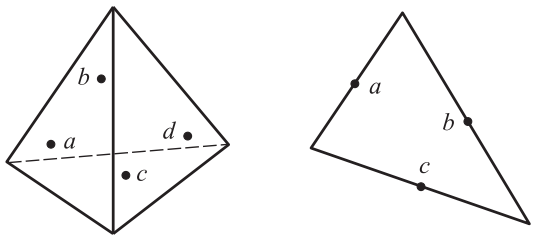


Рис. 2. Тетраэдр и треугольник с точками Гаусса

Применив к правой части в (5) формулу интегрирования по частям, получим

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t}\left(\varphi_j u^i\right) dV = \int_S \varphi_j f^i(\mathbf{U})\cdot\mathbf{n} dS - \int_V f^i(\mathbf{U})\nabla\varphi_j dV, \quad i = 1, ..., 5, \quad (6)$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали к грани тетраэдра; S — площадь соответствующей грани. Так как функция $f^i(\mathbf{U})\cdot\mathbf{n}$ в общем случае при переходе через грань тетраэдра является разрывной, то ее следует заменить функцией численного потока $\tilde{f}^i(\mathbf{U}^{\text{int}}, \mathbf{U}^{\text{ext}})$, которая зависит от состояния газа по разные стороны от рассматриваемой грани.

Интегралы в (6) вычисляются с помощью квадратур Гаусса:

$$\int_V g(\mathbf{x})dV = \frac{V}{4}\sum_{i=1}^{4} g(a_i); \quad \int_S g(\mathbf{x})dS = \frac{S}{3}\sum_{i=1}^{3} g(a_i).$$

Применяя метод разделения переменных, переменную u^i в (6) аппроксимируем линейной функцией

$$\begin{aligned} u^i(\mathbf{x},t) &= u^{i1}(t)\varphi_1(\mathbf{x}) + u^{i2}(t)\varphi_2(\mathbf{x}) + \\ &+ u^{i3}(t)\varphi_3(\mathbf{x}) + u^{i4}(t)\varphi_4(\mathbf{x}) = u^{ik}(t)\varphi_k(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (7)$$

Поскольку

$$\int_V \varphi_j\varphi_k dV = \frac{V}{4}\delta_{jk},$$

то, подставив (7) в (6), получим

$$\frac{V}{4}\frac{\partial u_j^i}{\partial t} = \int_S \varphi_j \tilde{f}^i(\mathbf{U}^{\text{int}}, \mathbf{U}^{\text{ext}})dS - \int_V f^i(\mathbf{U})\nabla\varphi_j dV, \quad i = 1, ..., 5. \quad (8)$$

Производная по времени аппроксимируется явным методом Эйлера первого порядка точности [13], также можно использовать многошаговые схемы Рунге — Кутта [11, 13] для повышения точности аппроксимации.

Рассмотрим процедуру определения функции численного потока $\tilde{f}^i(\mathbf{U}^{\text{int}}, \mathbf{U}^{\text{ext}})$. Представим систему уравнений (2) в следующем виде [14]:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \left[\mathbf{T}^{-1} \mathbf{F}^1(\mathbf{TU}) \right]}{\partial \xi} = 0, \tag{9}$$

где ξ — координатная линия, направленная вдоль вектора нормали $\mathbf{n}$; $\mathbf{T}$ — матрица поворота, а $\mathbf{T}^{-1}$ — обратная к ней. Тогда

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_x & n_y & n_z & 0 \\ 0 & -\dfrac{n_y}{\sqrt{1-n_z^2}} & \dfrac{n_x}{\sqrt{1-n_z^2}} & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{n_x n_z}{\sqrt{1-n_z^2}} & -\dfrac{n_y n_z}{\sqrt{1-n_z^2}} & \sqrt{1-n_z^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ если } n_z^2 \neq 1;$$

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ если } n_z = 1; \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ если } n_z = -1.$$

Обратная матрица к $\mathbf{T}$ совпадает с транспонированной, т. е. $\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^{\text{T}}$.

Поставим для системы (9) задачу Римана относительно вектора неизвестных $\mathbf{TU}$ с начальными данными справа и слева от грани тетраэдра:

$$\begin{cases} \mathbf{TU}^{\text{int}}, & \text{если} \quad \xi < 0; \\ \mathbf{TU}^{\text{ext}}, & \text{если} \quad \xi > 0. \end{cases}$$

Полученную задачу Римана можно решить точно [14, 15] или приближенно, используя такие методы, как HLL, HLLC, Лакса — Фридрихса и др. [14, 16]. Далее с помощью обратной матрицы $\mathbf{T}^{-1}$ необходимо вернуться к исходному вектору неизвестных $\mathbf{U}$.

Линейная аппроксимация вектора неизвестных $\mathbf{U}$ внутри тетраэдра обеспечивает второй порядок точности решения. Схема (8) также является линейной. Согласно теореме Годунова [15], линейная схема второго порядка аппроксимации порождает нефизические осцилляции вблизи высоких градиентов решения, таких как ударные волны и контактные разрывы. Для устранения этих дефектов решения необходимо провести процедуру монотонизации решения. Опишем один из возможных вариантов такого ограничителя [16].

Направим ось ξ в системе (9) вдоль вектора, соединяющего центр тетраэдра с одной из его вершин. Перейдем от вектора консервативных переменных $\mathbf{U}$ к вектору характеристических переменных $\mathbf{V} = \mathbf{L}\mathbf{U}$. $\mathbf{R}$ и $\mathbf{L}$ — матрицы правых и левых собственных векторов матрицы Якоби $\mathbf{A}(\mathbf{U}) = \dfrac{\partial\left[\mathbf{T}^{-1}\mathbf{F}^1(\mathbf{T}\mathbf{U})\right]}{\partial\mathbf{U}}$ системы (9):

$$\mathbf{R}\Lambda\mathbf{L} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}(\mathbf{T}\mathbf{U})\mathbf{T},$$

где Λ — диагональная матрица собственных значений матрицы Якоби, $\Lambda = diag\left(v_l - a, v_l, v_l, v_l, v_l + a\right)$, $v_l = \mathbf{v}\mathbf{l}$ — проекция скорости на единичный вектор $\mathbf{l} = \left(l_x, l_y, l_z\right)$, направленный вдоль оси ξ. Матрицы $\mathbf{R}$ и $\mathbf{L}$ имеют следующий вид [17]:

- если $l_x \neq 0$, то

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ w^1 - al_x & w^1 & l_y & -l_z & w^1 + al_x \\ w^2 - al_y & w^2 & -l_x & 0 & w^2 + al_y \\ w^3 - al_z & w^3 & 0 & l_x & w^3 + al_z \\ H - av_l & e_k & w^1 l_y - w^2 l_x & w^3 l_x - w^1 l_z & H + av_l \end{pmatrix},$$

где $H = \dfrac{a^2}{\gamma - 1} + e_k$ — массовая плотность энтальпии; $e_k = \dfrac{\mathbf{v}^2}{2}$ — массовая плотность кинетической энергии;

$$\mathbf{L}=\begin{pmatrix} \dfrac{(\gamma-1)e_k+av_l}{2a^2} & \dfrac{(1-\gamma)w^1-al_x}{2a^2} & \dfrac{(1-\gamma)w^2-al_y}{2a^2} & \dfrac{(1-\gamma)w^3-al_z}{2a^2} & \dfrac{\gamma-1}{2a^2} \\ \dfrac{a^2-(\gamma-1)e_k}{2a^2} & \dfrac{(\gamma-1)w^1}{a^2} & \dfrac{(\gamma-1)w^2}{a^2} & \dfrac{(\gamma-1)w^3}{a^2} & \dfrac{1-\gamma}{a^2} \\ \dfrac{w^2-v_l l_y}{l_x} & l_y & \dfrac{l_y^2-1}{l_x} & \dfrac{l_y l_z}{l_x} & 0 \\ \dfrac{v_l l_z-w^3}{l_x} & -l_z & -\dfrac{l_y l_z}{l_x} & \dfrac{1-l_z^2}{l_x} & 0 \\ \dfrac{(\gamma-1)e_k-av_l}{2a^2} & \dfrac{(1-\gamma)w^1+al_x}{2a^2} & \dfrac{(1-\gamma)w^2+al_y}{2a^2} & \dfrac{(1-\gamma)w^3-al_z}{2a^2} & \dfrac{\gamma-1}{2a^2} \end{pmatrix};$$

- если $l_y \neq 0$, то

$$\mathbf{R}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ w^1-al_x & w^1 & l_y & 0 & w^1+al_x \\ w^2-al_y & w^2 & -l_x & l_z & w^2+al_y \\ w^3-al_z & w^3 & 0 & -l_y & w^3+al_z \\ H-av_l & e_k & w^1l_y-w^2l_x & w^2l_z-w^3l_y & H+av_l \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{L}=\begin{pmatrix} \dfrac{(\gamma-1)e_k+av_l}{2a^2} & \dfrac{(1-\gamma)w^1-al_x}{2a^2} & \dfrac{(1-\gamma)w^2-al_y}{2a^2} & \dfrac{(1-\gamma)w^3-al_z}{2a^2} & \dfrac{\gamma-1}{2a^2} \\ \dfrac{a^2-(\gamma-1)e_k}{2a^2} & \dfrac{(\gamma-1)w^1}{a^2} & \dfrac{(\gamma-1)w^2}{a^2} & \dfrac{(\gamma-1)w^3}{a^2} & \dfrac{1-\gamma}{a^2} \\ \dfrac{v_l l_x-w^1}{l_y} & \dfrac{1-l_x^2}{l_y} & -l_x & -\dfrac{l_x l_z}{l_y} & 0 \\ \dfrac{w^3-v_l l_z}{l_y} & \dfrac{l_x l_z}{l_y} & l_z & \dfrac{l_z^2-1}{l_y} & 0 \\ \dfrac{(\gamma-1)e_k-av_l}{2a^2} & \dfrac{(1-\gamma)w^1+al_x}{2a^2} & \dfrac{(1-\gamma)w^2+al_y}{2a^2} & \dfrac{(1-\gamma)w^3-al_z}{2a^2} & \dfrac{\gamma-1}{2a^2} \end{pmatrix};$$

- если $l_z \neq 0$, то

$$\mathbf{R}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ w^1-al_x & w^1 & -l_z & 0 & w^1+al_x \\ w^2-al_y & w^2 & 0 & l_z & w^2+al_y \\ w^3-al_z & w^3 & l_x & -l_y & w^3+al_z \\ H-av_l & e_k & w^3l_x-w^1l_z & w^2l_z-w^3l_y & H+av_l \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{L}=\begin{pmatrix} \dfrac{(\gamma-1)e_k+av_l}{2a^2} & \dfrac{(1-\gamma)w^1-al_x}{2a^2} & \dfrac{(1-\gamma)w^2-al_y}{2a^2} & \dfrac{(1-\gamma)w^3-al_z}{2a^2} & \dfrac{\gamma-1}{2a^2} \\ \dfrac{a^2-(\gamma-1)e_k}{2a^2} & \dfrac{(\gamma-1)w^1}{a^2} & \dfrac{(\gamma-1)w^2}{a^2} & \dfrac{(\gamma-1)w^3}{a^2} & \dfrac{1-\gamma}{a^2} \\ \dfrac{w^1-v_l l_x}{l_z} & \dfrac{l_x^2-1}{l_z} & \dfrac{l_x l_y}{l_z} & l_x & 0 \\ \dfrac{v_l l_y-w^2}{l_z} & -\dfrac{l_x l_y}{l_z} & \dfrac{1-l_y^2}{l_z} & -l_y & 0 \\ \dfrac{(\gamma-1)e_k-av_l}{2a^2} & \dfrac{(1-\gamma)w^1+al_x}{2a^2} & \dfrac{(1-\gamma)w^2+al_y}{2a^2} & \dfrac{(1-\gamma)w^3-al_z}{2a^2} & \dfrac{\gamma-1}{2a^2} \end{pmatrix}.$$

В характеристических переменных система уравнений распадается на пять независимых гиперболических уравнений, к каждому из которых можно применить многомерную реконструкцию решения, удовлетворяющую свойству TVD. Для каждой компоненты v^i вектора $\mathbf{V}$ находим $v^i_{\min}=\min\left(v^i_m,\min\limits_n v^i_n\right)$; $v^i_{\max}=\max\left(v^i_m,\max\limits_n v^i_n\right)$, $i=1,...,5$, $n=1,...,4$; индекс m означает центр рассматриваемого тетраэдра; n — центр соседнего тетраэдра. Далее определим

$$\psi^i_j=\begin{cases} \min\left(1,\dfrac{v^i_{\max}-v^i_m}{v^i_j-v^i_m}\right), & \text{если} \quad v^i_j-v^i_m>0; \\ \min\left(1,\dfrac{v^i_{\min}-v^i_m}{v^i_j-v^i_m}\right), & \text{если} \quad v^i_j-v^i_m<0; \\ 1, & \text{если} \quad v^i_j-v^i_m=0, \end{cases}$$

где v^i_j — значения в вершинах рассматриваемого тетраэдра, $j=1,...,4$. Пусть $\psi^i=\min\left(\psi^i_1,\psi^i_2,\psi^i_3,\psi^i_4\right)$. Тогда ограниченные наклоны $\psi^i\alpha^i_m$, $\psi^i\beta^i_m$ и $\psi^i\gamma^i_m$ будут удовлетворять свойству TVD. Здесь через α^i_m, β^i_m и γ^i_m обозначены наклоны гиперплоскости решения в характеристических переменных $\mathbf{V}$ для тетраэдра m. После монотонной реконструкции решения необходимо вернуться к исходным консервативным переменным $\mathbf{U}$ с помощью матрицы правых собственных векторов: $\mathbf{U}=\mathbf{RV}$. Другие алгоритмы многомерных ограничителей решения можно найти в [16, 17].

Задача о распаде произвольного разрыва. Физически эту задачу можно представить как трубу, разделенную диафрагмой с координатой $x=0{,}5$ (все параметры в этой задаче безразмерные). Справа и

слева от диафрагмы находится один и тот же газ, но при различных условиях. В момент времени $t = 0$ диафрагма рвется. Необходимо найти состояние газа в момент времени $t = 0,25$. Начальные данные к этой задаче следующие:

$$\begin{cases} \rho_L = 1,0; \\ v_L = 0,0; \\ p_L = 1,0; \end{cases} \quad \begin{cases} \rho_R = 0,125; \\ v_R = 0,0; \\ p_R = 0,1. \end{cases}$$

Задача имеет аналитическое решение [10]. На рис. 3 представлены графики плотности, скорости и давления в зависимости от продольной координаты x. На графиках показан момент времени $t = 0,25$. Размер сетки вдоль оси составляет 100 узлов.

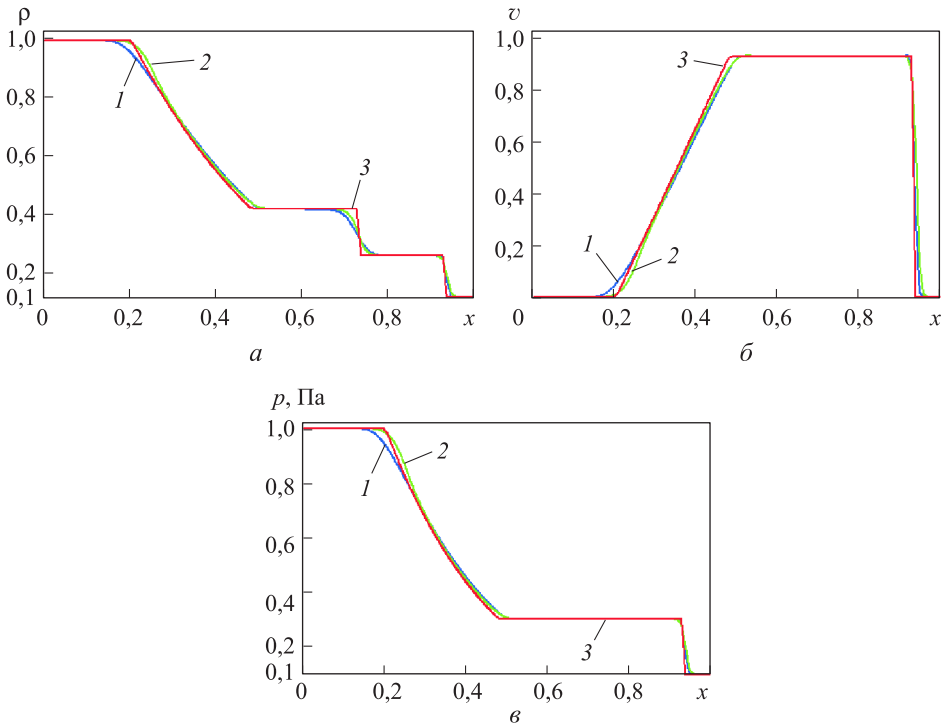


Рис. 3. Распределение значений плотности (*а*), скорости (*б*) и давления (*в*) по осевой координате в задаче о распаде произвольного разрыва:

1 — численное решение методом RKDG; *2* — численное решение методом TVD-типа Хартена [18, 19]; *3* — аналитическое решение

Из графиков видно хорошее совпадение численного (для обоих методов) и аналитического решений, отсутствие нефизических осцилляций вблизи разрывов решения, разрывы в численном решении «размазываются» на 2–3 расчетные ячейки.

На рис. 4 представлены графики относительной погрешности для плотности и давления.

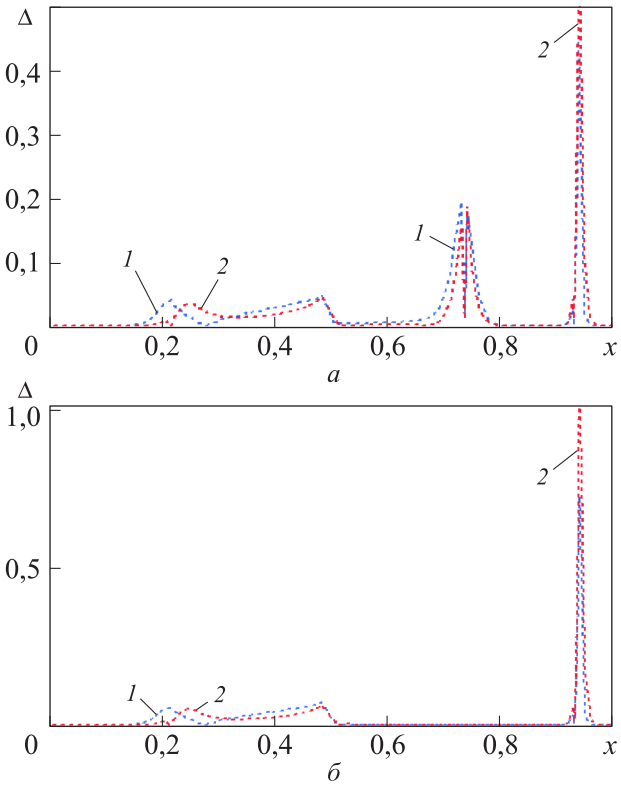


Рис. 4. Распределение относительной погрешности по плотности (*а*) и давлению (*б*) по осевой координате в задаче о распаде произвольного разрыва:
1 — метод RKDG; *2* — метод TVD-типа Хартена

Из графиков видно, что метод RKDG имеет меньшую погрешность и по плотности, и по давлению вблизи ударной волны. В целом в областях гладкости решения относительная погрешность обоих численных методов не превышает 5 %.

Обтекание сферы гиперзвуковым потоком. На рис. 5 представлены графики давления и плотности вдоль образующей сферы для числа Маха набегающего потока $\mathrm{M} = 10$. Давление и плотность на графиках отнесены к значениям в набегающем потоке. Размер сетки по r, φ, θ составляет $25 \times 25 \times 24$. В радиальном направлении сделано сгущение сетки по следующему закону:

$$X_1(\xi, \varepsilon) = \begin{cases} -\dfrac{\varepsilon}{b} \ln(1 - c\xi), & 0 \le \xi \le \xi_1, \quad \xi_1 = (1 - \varepsilon^k)/c; \\ x_1 + c(\xi - \xi_1)/b, & \xi_1 \le \xi \le 1, \quad x_1 = \dfrac{1}{b} \varepsilon^k \ln \varepsilon^{-k}, \end{cases}$$

где k, b, c, $\varepsilon = \mathrm{const} > 0$.

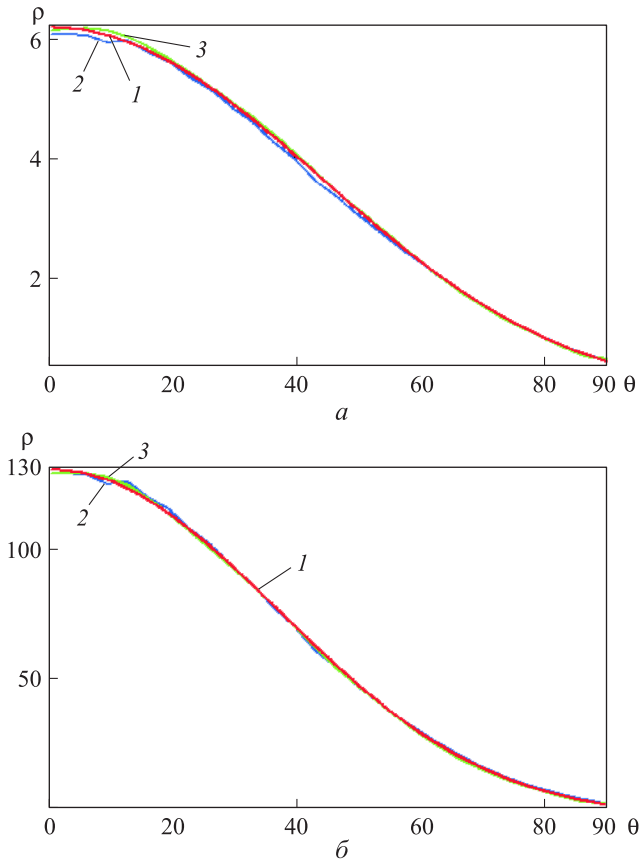


Рис. 5. Распределение безразмерных плотности (*а*) и давления (*б*) вдоль угловой координаты по образующей сферы:

1 — табличные данные [20]; *2* — расчет методом RKDG; *3* — расчет конечно-объемным неявным методом [21]

На рис. 6 представлены графики относительной погрешности плотности и давления. Из графиков видно, что погрешность плотности для обоих методов не превышает 4 %. Погрешность давления до угла 75° не превышает 4 %, а далее растет и достигает 10 % при $\varphi = 90^\circ$. Существенное повышение погрешности при $\varphi > 75^\circ$ связано с тем, что в этой области образующая сферы стремится к прямой линии, и для более точного воспроизведения решения необходимо увеличивать количество сеточных линий.

Заключение. Предложен алгоритм численного моделирования трехмерных нестационарных газодинамических процессов на основе метода RKDG на неструктурированных сетках. Проведено сравнение результатов решения данным методом с известными аналитическими методами и табличными данными. Сравнения показали, что за исключением некоторых особенных областей (ударных волн, контактных

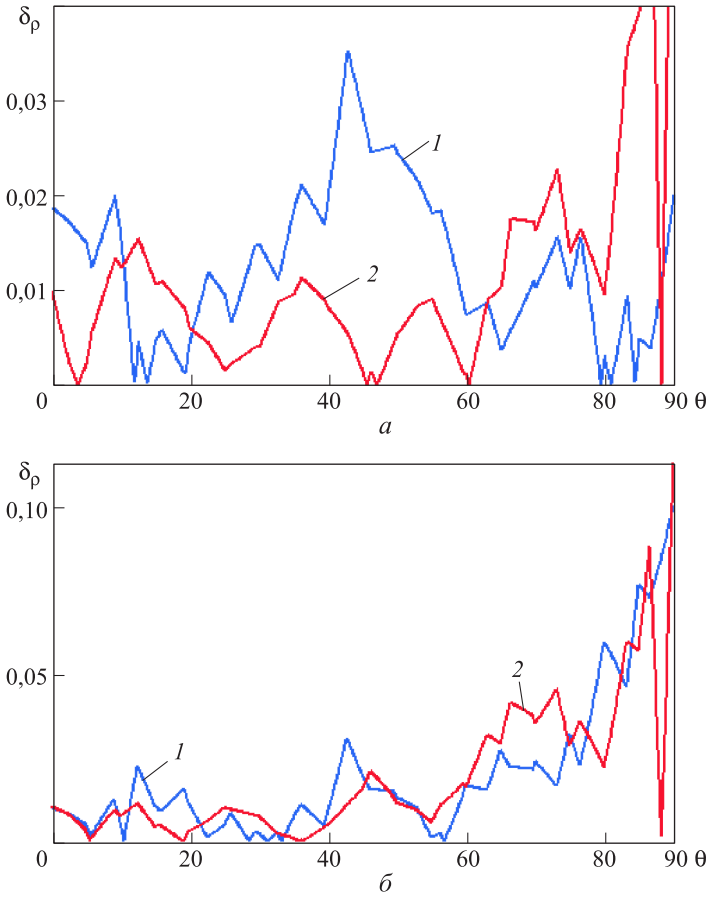


Рис. 6. Относительная погрешность плотности (*а*) и давления (*б*) вдоль образующей сферы:

1 — расчет методом RKDG; *2* — расчет неявным методом

разрывов) ошибка решения не превышает 4…5 %, что является хорошей точностью. Кроме того, ошибку решения можно уменьшить, дополнительно измельчая расчетную сетку. Сравнение с другими известными численными методами, в частности на основе схем TVD, показало, что точность рассмотренного метода RKDG не ниже точности данных разностных схем, но этот метод обладает определенной универсальностью, позволяя проводить вычисления на сетках более низкого качества, в том числе на неструктурированных. Таким образом, предложенный алгоритм метода RKDG на тестовых задачах показал себя с положительной стороны и может быть эффективно применен для решения трехмерных задач газовой динамики со сложной геометрией изучаемого тела.

Исследование выполнено при поддержке гранта Президента РФ МК-3007.2015.8.

Работа выполнена с использованием ресурсов суперкомпьютерного комплекса МГУ им. М.В. Ломоносова.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Anderson J.D. *Hypersonic and High-Temperature Gas Dynamics*. 2nd edition. American Institute of Aeronautics and Astronautics, Reston, Virginia, 2006, 232 p.

[2] McNamara J.J., Friedmann P.P. Aeroelastic and Aerothermoelastic Analysis of Hypersonic Vehicles: Current Status and Future Trends. *48th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*, 23–26 April, 2007, Honolulu, Hawaii. URL: http:// www.mecheng.osu.edu/ lab/cael/ sites/ default/ files/AIAA-2007-2013

[3] Братчев А.В., Забарко Д.А., Ватолина Е.Г., Коробков А.А., Сахаров В.И. Вопросы теплотехнического проектирования перспективных гиперзвуковых летательных аппаратов аэробаллистического типа. *Известия института инженерной физики*, 2009, т. 2, 2012, с. 42−49.

[4] Димитриенко Ю.И., Захаров А.А., Коряков М.Н., Сыздыков Е.К. Моделирование сопряженных процессов аэрогазодинамики и теплообмена на поверхности теплозащиты перспективных гиперзвуковых летательных аппаратов. *Известия вузов. Сер. Машиностроение*, 2014, № 3, с. 23−34.

[5] Димитриенко Ю.И., Коряков М.Н., Захаров А.А., Строганов А.С. Численное моделирование сопряженных аэрогазодинамических и термомеханических процессов в композитных конструкциях высокоскоростных летательных аппаратов. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 3, с. 3−24.

[6] Димитриенко Ю.И., Захаров А.А., Коряков М.Н., Сыздыков Е.К., Минин В.В. Численное решение сопряженной задачи гиперзвуковой аэродинамики и термомеханики термодеструктирующих конструкций. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 9. URL: http://engjournal.ru/ catalog/mathmodel/ aero/1114.html

[7] Димитриенко Ю.И., Захаров А.А., Абакумов А.С., Коряков М.Н., Сыздыков Е.К. Численное моделирование газовых потоков в каналах воздухозаборников на основе уравнений Навье — Стокса. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные нау*ки, 2011, № 4, с. 44−54.

[8] Галанин М.П., Грищенко Е.В., Савенков Е.Б., Токарева С.А. *Применение RKDG-метода для численного решения задач газовой динамики*. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, № 52. Москва, 2006, 30 с.

[9] Токарева С.А. *Математическое моделирование течений жидкости и газа на основе разрывного метода Галеркина*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010, 141 с.

[10] Димитриенко Ю.И., Котенев В.П., Захаров А.А. Метод ленточных адаптивных сеток для численного моделирования в газовой динамике. Москва, Физматлит, 2011, 280 с.

[11] Cockburn B., Shu C.-W. Runge — Kutta Discontinuous Galerkin Methods for Convection-Dominated Problems. *Journal of Scientific Computing*, 2001, vol. 16, no. 3.

[12] Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. The finite element method. *The basis*, 2000, vol. 1, 708 p.

[13] Петров И.Б., Лобанов А.И. *Лекции по вычислительной математике*. Москва, Интернет-университет информационных технологий; БИНОМ; Лаборатория знаний, 2006, 523 с.

[14] Eleuterio F. *Toro Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*. Berlin, Springer, 2009, 749 p.

[15] Годунов С.К., ред. *Численное решение многомерных задач газовой динамики*. Москва, Наука, 1976, 401 с.

[16] Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. *Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений*. Москва, Физматлит, 2012, 656 с.

[17] Rohde A.A. *Computational Study Of Flow Around A Rotating Disc In Flight.* Florida, 2000, 169 p.

[18] Harten A. High Resolution Schemes for Hyperbolic Conservation Laws. *J. Comp. Phys*., 1983, vol. 49, pp. 357−393.

[19] Димитриенко Ю.И., Коряков М.Н., Захаров А.А., Сыздыков Е.К. Развитие метода ленточно-адаптивных сеток на основе схем TVD для решения задач газовой динамики. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2011, № 2, с. 87−97.

[20] Любимов А.Н., Русанов В.В. *Течения газа около тупых тел*. Москва, Наука, 1970, т. 2. 380 с.

[21] Сальников В.Д. Разработка неявной схемы для моделирования течений сжимаемого газа [Электронный ресурс]. Огарев-online. Раздел "*Физико-математические науки*", 2014, № 19. URL: http://journal.mrsu.ru/arts/razrabotka-neyavnojj-skhemy-dlya-modelirovaniya-techenijj-szhimaemogo-gaza

Статья поступила в редакцию 19.09.2015

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Димитриенко Ю.И., Коряков М.Н., Захаров А.А. Применение метода RKDG для численного решения уравнений газовой динамики на неструктурированных сетках. *Математическое моделирование и численные методы,* 2015, № 4 (8), с. 75–91.

Димитриенко Юрий Иванович родился в 1962 г., окончил МГУ им. М.В. Ломоносова. Д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, директор Научно-образовательного центра «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: dimit.bmstu@gmail.com

Коряков Михаил Николаевич родился в 1987 г. Младший научный сотрудник Научно-образовательного центра «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов» МГТУ им. Н.Э. Баумана, ассистент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: mkoryakov@bmstu.ru

Захаров Андрей Алексеевич родился в 1982 г., окончил МГТУ им. Н.Э. Баумана. Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, старший научный сотрудник Научно-образовательного центра «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов» МГТУ им. Н.Э. Баумана.
e-mail: azaharov@bmstu.ru

Application of RKDG method for computational solution of three-dimensional gas-dynamic equations with non-structured grids

© Yu.I. Dimitrienko, M.N. Koryakov, A.A. Zakharov

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

This article deals with the finite-element RKDG method (Runge-Kutta Discontinuous Galerkin) and its application for numerical integration of three-dimensional system of equations of ideal gas on unstructured grids. By means of the described algorithm we solved two test tasks. For each task we conducted the analysis and compared the task solution with well-known analytical solutions or with tabular data. We also give error assessment in the solution.

Keywords: *gas dynamics, ideal gas, numerical methods, RKDG, TVD.*

REFERENCES

[1] Anderson J.D. *Hypersonic and High-Temperature Gas Dynamics*. American Institute of Aeronautics and Astronautics, Reston, Virginia, 2nd ed., 2006, 232 p.

[2] McNamara J.J., Friedmann P.P. Aeroelastic and Aerothermoelastic Analysis of Hypersonic Vehicles: Current Status and Future Trends. *48th AIAA/ ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*, 23–26 April 2007, Honolulu, Hawaii. Available at: http://www.mecheng.osu.edu/lab/cael/sites/default/files/AIAA-2007-2013

[3] Bratchev A.V., Zabarko D.A., Vatolina E.G., Korobkov A.A., Sakharov V.I. *Izvestiya Instituta inzhenernoy fiziki — Proceedings of the Engineering Physics Institute*, 2009, vol. 2, no. 12, pp. 42−49.

[4] Dimitrienko Yu.I., Zakharov A.A., Koryakov M.N., Syzdykov E.K. *Izvestiya vuzov. Seriya Mashinostroenie — Proceedings of Higher Educational Institutions. Series Machine Building,* 2014, no. 3, pp. 23–34.

[5] Dimitrienko Yu.I., Koryakov M.N., Zakharov A.A., Stroganov A.S. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody — Mathematical Modeling and Computational Methods,* no. 3, 2014, pp. 3–24.

[6] Dimitrienko Yu.I., Zakharov A.A., Koryakov M.N., Syzdykov E.K., Minin V.V. *Inzhenernyi zhurnal: nauka i innivatsii — Engineering Journal: Science and Innovation*, 2013., issue 9. Available at: http://engjournal.ru/catalog/ mathmodel/ aero/1114.html

[7] Dimitrienko Yu.I., Zakharov A.A., Abbakumov A.S., Koryakov M.N., Syzdykov E.K. *Vestnic MGTU im. N.E. Baumana. Seriya Estestvennye nauki — Herald of Bauman Moscow State Technical University. Series: Natural Sciences,* 2011, no. 4, pp. 44–54.

[8] Galanin M.P., Grishchenko E.V., Savenkov E.B., Tokareva S.A. *Preprint IPM im. M.V. Keldisha RAN — Keldish's Preprint RAS*, 2006, no. 52, 30 p.

[9] Tokareva S.A. *Matematicheskoe modelirovanie techeniy zhidkosti i gaza na osnove razryvnogo metoda Galerkina* [Mathematical modeling of fluid and gas on the basis of Galerkin's discontinuous method]. Moscow, BMSTU Publ., 2010, 141 p.

[10] Dimitrienko Yu.I., Kotenev V.P., Zakharov A.A. *Metod lentochnykh adaptivnykh setok dlya chislennogo modelirovaniya v gazovoy dinamike* [The adaptive banded grid method for numerical simulation in gas dynamics]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2011, 280 p.

[11] Cockburn B., Shu C.-W. *Journal of Scientific Computing*, 2001, vol. 16, no. 3.
[12] Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. *The basis*, 2000, vol. 1, 708 p.
[13] Petrov I.B., Lobanov A.I. *Lektsii po vychislitelnoy matematike* [Lectures on numerical mathematics]. Moscow, Internet-universitet informatsionnych technologiy; BINOM; Laboratoriya znaniy; 2006, 523 p.
[14] Eleuterio F. *Toro Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*. Berlin, Springer, 2009, 749 p.
[15] Godunov S.K., ed. *Chislennoe reshenie mnogomernyh zadach gazovoy dinamiki* [Numerical solution of gas dynamics multidimensional problem]. Moscow, Nauka Publ., 1976, 401 p.
[16] Kulikovskiy A.G., Pogorelov N.V., Semenov A.Yu. *Matematicheskie voprosy chislennogo resheniya giperbolicheskikh sistem uravneniy* [Mathematical problems on numerical solution of hyperbolic equation systems]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2012, 656 p.
[17] Rohde A.A. *Computational Study of Flow around a Rotating Disc in Flight.* Florida, 2000, 169 p.
[18] Harten A. High Resolution Schemes for Hyperbolic Conservation Laws. *J. Comp. Phys*., 1983, vol. 49, pp. 357−393.
[19] Dimitrienko Yu.I., Koryakov M.N., Zakharov A.A., Syzdykov E.K. *Vestnic MGTU im. N.E. Baumana. Seria Estestvennye nauki — Herald of Bauman Moscow State Technical University. Series: Natural Sciences,* 2011, no. 2, pp. 87–97.
[20] Lubimov A.N., Rusanov V.V. *Techeniya gaza okolo tupykh tel* [Gas flows about blunt body]. Moscow, Nauka Publ., 1970, vol. 2, 380 p.
[21] Salnikov V.D. Ogarev-online. Razdel "*Fiziko-matematicheskie nauki*" — *Ogarev-online. Section Physical and Mathematical Sciences*, 2014, no. 19. Available at: http://journal.mrsu.ru/arts/razrabotka-neyavnojj-skhemy-dlya-modelirovaniya-techenijj-szhimaemogo-gaza

Dimitrienko Yu.I. (b. 1962) graduated from Lomonosov Moscow State University in 1984. Dr. Sci. (Phys. & Math.), Professor, head of the Computational Mathematics and Mathematical Physics Department, director of the Scientific-educational Center of Supercomputer Engineering Modeling and Program Software Development at Bauman Moscow State Technical University. Member of the Russian Academy of Engineering Science. Author of over 300 publications in the field of computational mechanics, gasdynamics, thermomechanics of composite materials, mathematical simulations in material science. e-mail: dimit.bmstu@gmail.com

Koryakov M.N. (b. 1987), junior member of the teaching staff of the Computational Mathematics and Mathematical Physics Department, associate scientist of Scientific-educational Center of Supercomputer Engineering Modeling and Program Software Development at Bauman Moscow State Technical University. e-mail: mkoryakov@bmstu.ru

Zakharov A.A. (b. 1982) graduated from Bauman Moscow State Technical University. Cand. Sci. (Phys. & Math.), Associated Professor of the Computational Mathematics and Mathematical Physics Department, senior scientist of Scientific-educational Center of Supercomputer Engineering Modeling and Program Software Development at Bauman Moscow State Technical University. e-mail: azaharov@bmstu.ru