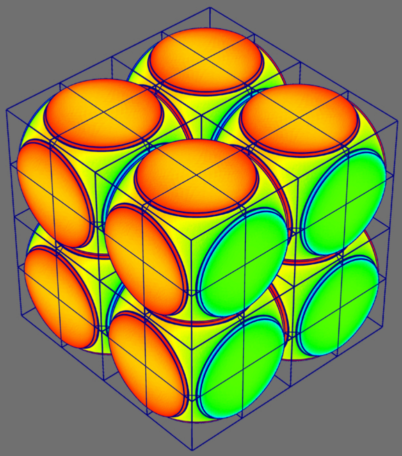
ISSN 2309-3684



Математическое
моделирование
и численные методы

УДК 517.9; 532; 536

Нелинейные реакционно-диффузионные уравнения с запаздыванием и переменными коэффициентами переноса: решения с обобщенным и функциональным разделением переменных

© А.Д. Полянин[1,2,3], А.И. Журов[1,4]

[1]Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, 119526, Россия
[2]Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия
[3]Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва, 115409, Россия
[4]Cardiff University, Heath Park, Cardiff CF14 4XY, UK

Описан ряд новых точных решений с простым, обобщенным и функциональным разделениями переменных одномерных нелинейных реакционно-диффузионных уравнений с запаздывающим аргументом и переменными коэффициентами переноса. Все представленные уравнения содержат одну, две или три произвольные функции одного аргумента. Решения с обобщенным разделением переменных находят в виде $u=\sum_{n=1}^{N}\varphi_n(x)\psi_n(t)$, *где функции* $\varphi_n(x)$, $\psi_n(t)$ *определяют в ходе анализа с использованием новой модификации метода функциональных связей. Некоторые из результатов обобщены на случай нелинейных реакционно-диффузионных уравнений с переменным запаздыванием* $\tau=\tau(t)$. *Также представлены точные решения более сложных трехмерных реакционно-диффузионных уравнений с запаздыванием. Большинство полученных решений содержат свободные параметры и могут быть использованы для решения некоторых задач, а также для тестирования приближенных аналитических и численных методов решения нелинейных уравнений в частных производных с запаздыванием.*

Ключевые слова: *реакционно-диффузионные уравнения с запаздыванием, переменные коэффициенты переноса, точные решения, решения с обобщенным разделением переменных, решения с функциональным разделением переменных, переменное запаздывание, нелинейные уравнения в частных производных с запаздыванием.*

Введение. Классы рассматриваемых уравнений. Нелинейные реакционно-диффузионные уравнения и системы уравнений с запаздыванием встречаются в биологии, биофизике, биохимии, химии, медицине, теории управления, теории климатических моделей, экологии, экономике и многих других научных областях работы [1–12]. Следует отметить, что подобные уравнения возникают также в математической теории искусственных нейронных сетей [13–22].

Сначала рассмотрим нелинейные реакционно-диффузионные уравнения с запаздыванием вида

$$u_t = ku_{xx} + F(u, w), \qquad w = u(x, t-\tau). \tag{1}$$

В биохимических, биологических, физико-химических, экологических и других системах скорость изменения искомой величины обычно зависит не только от текущего состояния системы в фиксированный момент времени, но и от всей предыстории или конкретного момента в прошлом. Последний случай моделируется уравнениями вида (1), где кинетическая функция F (скорость химической реакции) зависит как от $u = u(x,t)$, так и от той же величины с запаздыванием $w = u(x, t-\tau)$. При $F(u,w) = f(w)$ запаздывание с физической точки зрения означает, что процессы массо- и теплопереноса в локально неравновесных средах обладают свойством инерции: система реагирует на воздействие не мгновенно, в момент его приложения t, что соответствует классическому случаю локально-равновесных сред, а на время запаздывания τ позже.

В реакционно-диффузионных уравнениях, а также других нелинейных уравнениях в частных производных (УрЧП) запаздывание τ может быть связано с множеством различных факторов в зависимости от области приложения. Например, в биологии и биомеханике запаздывание может быть следствием конечности скорости распространения нейронного импульса в живых тканях. В задачах о развитии заболеваний в медицине время запаздывания определяется инкубационным периодом, после которого болезнь начинает проявляться (в некоторых случаях необходимо учитывать время, через которое инфицированный организм становится заразным). В популяционной динамике запаздывание связано с периодом беременности или созревания. В теории управления запаздывание обычно является результатом конечности скорости обработки сигнала и скорости технологических процессов.

Значительное количество точных решений уравнения теплопроводности с нелинейным источником, которое является частным случаем уравнения (1) без запаздывания при $F(u,w) = f(u)$, приведено, например, в работах [23–29]. В справочнике [30] дан широкий обзор точных решений рассматриваемого класса нелинейных уравнений; там же описано большое число точных решений с обобщенным и функциональным разделением переменных для нелинейных реакционно-диффузионных систем двух связанных уравнений без запаздывания.

Наличие запаздывания в уравнениях вида (1) существенно усложняет их исследование по сравнению с нелинейными УрЧП без запаздывания.

В общем случае уравнение (1) допускает решения типа бегущей волны $u = u(\alpha x + \beta t)$. Такие решения рассмотрены во многих работах, например, [2–7]. В [11] проведен полный групповой анализ нелинейного уравнения с запаздыванием, где были найдены четыре уравнения вида (1), которые допускают инвариантные решения (два из них имеют вырожденные решения, линейные по x). В работах [12, 31–36] описан ряд точных решений с простым и обобщенным разделением переменных уравнения (1), а также других точных решений этого уравнения и решений более сложных нелинейных реакционно-диффузионных уравнений с зависящим от времени запаздыванием $\tau = \tau(t)$ и систем двух связанных уравнений с запаздыванием.

В данной статье рассмотрены более сложные, чем (1), нелинейные реакционно-диффузионные уравнения с запаздыванием

$$u_t = [G(u)u_x]_x + F(u, w), \qquad w = u(x, t - \tau), \tag{2}$$

где коэффициент переноса (диффузии) G зависит от искомой функции u.

Для частного случая уравнения (2) без запаздывания при $F(u, w) = f(u)$, что соответствует нелинейному уравнению теплопроводности, получено довольно много точных решений [23, 24, 26–30].

В работе [37] предложен точный метод, основанный на использовании инвариантных подпространств нелинейных обыкновенных дифференциальных операторов, которые определяют вид рассматриваемых уравнений [29]. Этот метод позволил получить несколько точных решений нелинейных реакционно-диффузионных уравнений с запаздыванием вида (2). Область применения метода в основном ограничена нелинейными УрЧП с запаздыванием, содержащими произвольные параметры (но не произвольные функции).

В статье предложен модифицированный метод функциональных связей, который обобщает метод, изложенный в работе [32], и является более эффективным, чем в [37]. Предложенный метод позволяет строить точные решения нелинейных УрЧП с запаздыванием, содержащих произвольные функции. Далее описан ряд новых точных решений с простым, обобщенным и функциональным разделениями переменных одномерных уравнений вида (2), полученных с помощью предлагаемого метода, а также более сложных трехмерных реакционно-диффузионных уравнений с запаздывающим аргументом. Некоторые из результатов обобщены на случай нелинейных реакционно-диффузионных уравнений с переменным запаздыванием $\tau = \tau(t)$. Все рассмотренные уравнения содержат одну, две или три произвольных функции одного аргумента.

Решения с обобщенным и функциональным разделением переменных. Далее термин «точное решение» в отношении нелинейных уравнений в частных производных с запаздыванием будем использовать в следующих случаях [31–33]:

(i) решение выражается в элементарных функциях или представляется в замкнутом виде с использованием определенных и неопределенных интегралов;

(ii) решение выражается через решения обыкновенных дифференциальных уравнений или обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздыванием (или систем таких уравнений);

(iii) решение выражается через решения линейных уравнений с частными производными;

(iv) допускаются комбинации случаев (i)–(iii).

Это определение обобщает понятие точного решения, используемого в [30] в отношении нелинейных уравнений с частными производными без запаздывания.

Замечание 1. О методах решения и различных приложениях линейных и нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, которые гораздо проще нелинейных уравнений в частных производных с запаздыванием, см., например, работы [38–43].

Замечание 2. Ряд точных решений некоторых нелинейных УрЧП с запаздыванием (а также систем таких уравнений), отличных от (1) и (2), приведен, например, в [12, 44–46].

Замечание 3. Численные методы решения нелинейных реакционно-диффузионных уравнений с запаздыванием и других нелинейных УрЧП (систем УрЧП), а также связанные с запаздыванием дополнительные трудности, обсуждаются в работах [49–52]. Приведенные в настоящей статье точные решения могут быть использованы в качестве тестовых задач для независимой проверки корректности и оценки точности численных методов решения нелинейных УрЧП с запаздыванием, а также систем таких уравнений.

В данной работе рассмотрим *решения с обобщенным разделением переменных* вида

$$u = \sum_{n=1}^{N} \varphi_n(x)\,\psi_n(t). \qquad (3)$$

Функции $\varphi_n(x)$ и $\psi_n(t)$ определяются в ходе анализа выражения, полученного в результате подстановки решения (3) в уравнение (2).

В решении (3) чаще всего встречаются следующие функции $\varphi_n(x)$:

$$\begin{aligned} &\varphi_n(x) = x^m\,(m = 0,1,2); \quad \varphi_n(x) = \exp(\lambda_n x);\\ &\varphi_n(x) = \cos(\beta_n x); \quad \varphi_n(x) = \sin(\beta_n x), \end{aligned} \qquad (4)$$

где λ_n и β_n — искомые параметры. Функции $\psi_n(t)$ часто выбирают аналогичным образом.

Замечание 4. Для нелинейных уравнений в частных производных без запаздывания, например в работах [28–30], подробно изложены различные модификации метода обобщенного разделения переменных, основанные на поиске решений вида (3). В этих исследованиях также приведено много нелинейных УрЧП и систем УрЧП, допускающих обобщенное разделение переменных.

Помимо решений с обобщенным разделением переменных, в статье рассмотрены также *решения с функциональным разделением переменных* вида

$$u = U(z), \quad z = \sum_{n=1}^{N} \varphi_n(x)\,\psi_n(t). \tag{5}$$

В частном случае $U(z) = z$ решение (5) совпадает с (3).

Замечание 5. Решения вида (5) для различных нелинейных уравнений в частных производных без запаздывания можно, найти в [28–30, 53–58].

Уравнения, содержащие произвольные функции. Метод функциональных связей. Для нелинейных уравнений в частных производных с запаздыванием, содержащих произвольные функции, прямое применение метода обобщенного разделения переменных оказывается неэффективным. Целесообразнее исследовать такие уравнения с помощью модификации метода функциональных связей [32].

Для определенности будем рассматривать нелинейные реакционно-диффузионные уравнения с запаздыванием достаточно общего вида:

$$u_t = [G(u)u_x]_x + H_1(u) + H_2(u)f(z), \quad z = z(u, w), \tag{6}$$

где $f(z)$ — произвольная функция одного аргумента; функции $G(u)$, $H_1(u)$, $H_2(u)$ определяют в ходе анализа. Функция $z = z(u, w)$ должна удовлетворять некоторым условиям (см. далее).

Будем искать решения с обобщенным разделением переменных вида (3) (обычно при $N = 1$ или $N = 2$); простейшие случаи соответствуют решениям в виде произведения $u = \varphi(x)\psi(t)$ или суммы $u = \varphi(x) + \psi(t)$.

Для определения вида аргумента $z = z(u, w)$ произвольной функции $f(z)$ используем метод функциональных связей, предполагающий поиск точных решений вида (3), удовлетворяющих одной из двух *функциональных связей* [32]:

$$z(u, w) = p(x), \quad w = u(x, t - \tau); \tag{7}$$

$$z(u, w) = q(t), \quad w = u(x, t - \tau). \tag{8}$$

Эти связи представляют собой разностные уравнения по t, в которых x играет роль свободного параметра. Функции $p(x)$ и $q(t)$ неявно зависят от x и t (выражаются через $\varphi_n(x)$ и $\psi_n(t)$ соответственно) и определяются в ходе анализа уравнения (7) или (8) с учетом (3). Следует подчеркнуть, что получать общие решения уравнения (7) или (8) не обязательно, обычно достаточно знать частное решение.

Всякое частное решение разностного уравнения (7) или (8), где u задается формулой (3), определяет допустимый вид точных решений. Окончательный вид точного решения определяется после подстановки выражения (3) в нелинейное УрЧП с запаздыванием (6); полученное таким образом уравнение затем анализируется, чтобы найти подходящий вид функций $G(u)$, $H_1(u)$, $H_2(u)$.

Связи (7) и (8) в дальнейшем будем называть соответственно *функциональной связью первого рода* и *функциональной связью второго рода*.

Метод функциональных связей может быть использован также для поиска решений с функциональным разделением переменных вида (5); таким способом были получены многие из указанных ниже решений.

Замечание 6. Далее рассмотрим более сложные, чем (6), нелинейные реакционно-диффузионные уравнения с запаздыванием

$$u_t = (G(u)u_x)_x + H_1(u) + H_2(u)f(z) + H_3(u)g(z), \quad z = z(u,w), \quad (9)$$

где $f(z)$ и $g(z)$ — произвольные функции одного аргумента (можно исследовать модифицированное уравнение (9), где вместо $H_3(u)$ стоит $H_3(w)$). В статье также приведены точные решения некоторых других уравнений.

Рассмотрены одномерные нелинейные реакционно-диффузионные уравнения с запаздыванием вида (2), содержащие произвольные функции $f(z_1)$ и $g(z_2)$, приведен список их точных решений с простым, обобщенным и функциональным разделением переменных. Промежуточные результаты, иллюстрирующие применение метода функциональных связей, указаны только для первых пяти уравнений. Все полученные решения легко могут быть проверены прямой подстановкой в исходные уравнения.

Замечание 7. Некоторые результаты обобщены на случай трехмерных реакционно-диффузионных уравнений с запаздыванием и нелинейных реакционно-диффузионных уравнений с переменным запаздыванием $\tau = \tau(t)$.

Одномерные реакционно-диффузионные уравнения, содержащие одну произвольную функцию одного аргумента. Функции $G(u)$, $H_1(u)$, $H_2(u)$ в рассматриваемых далее уравнениях (1)–(4), имеющих вид (6), находят в степенном виде, а те же функции в уравнениях (5)–(7) — в виде экспонент или констант.

Уравнение 1. Рассмотрим уравнение (6) вида

$$u_t = a(u^k u_x)_x + uf(w/u). \tag{10}$$

Уравнение (10) содержит произвольную функцию $f(z)$, где $z = w/u$. В этом случае функциональная связь второго рода (8) имеет вид

$$w/u = q(t), \qquad w = u(x, t-\tau). \tag{11}$$

Легко видеть, что разностному уравнению (11) удовлетворяет решение в виде произведения функций разных аргументов

$$u = \varphi(x)\,\psi(t), \tag{12}$$

откуда следует, что $q(t) = \psi(t-\tau)/\psi(t)$.

Подставляя решение (12) в УрЧП с запаздыванием (10) и разделяя переменные, для функций $\varphi(x)$ и $\psi(t)$ приходим к следующим обыкновенным дифференциальным уравнениям (ОДУ) без запаздывания и с запаздыванием:

$$a(\varphi^k \varphi'_x)'_x = b\varphi, \tag{13}$$

$$\psi'(t) = b\psi^{k+1}(t) + \psi(t) f(\psi(t-\tau)/\psi(t)), \tag{14}$$

где b — произвольная постоянная.

При $b = 0$ решение уравнения (13) принимает вид

$$\varphi = \begin{cases} (C_1 x + C_2)^{1/(k+1)} & \text{при } k \neq -1; \\ C_1 \exp(C_2 x) & \text{при } k = -1, \end{cases}$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

При $k \neq -2$ и $k \neq 0$ уравнение (13) имеет частное решение

$$\varphi = Ax^{2/k}, \qquad A = \left[\frac{bk^2}{2a(k+2)}\right]^{1/k}.$$

Замечание 8. Уравнение (10) допускает также более сложное решение вида

$$u = (x + C)^{2/k}\theta(\zeta), \quad \zeta = t + \lambda\ln(x + C),$$

где C и λ — произвольные постоянные, а функция $\theta(\zeta)$ удовлетворяет ОДУ с запаздыванием

$$\theta'(\zeta) = a\left\{\lambda^2\theta^k(\zeta)\theta''(\zeta) + \frac{(3k+4)\lambda}{k}\theta^k(\zeta)\theta'(\zeta) + \right.$$

$$\left. + k\lambda^2\theta^{k-1}(\zeta)[\theta'(\zeta)]^2 + \frac{2(k+2)}{k^2}\theta^{k+1}(\zeta)\right\} + \theta(\zeta)f(\theta(\zeta-\tau)/\theta(\zeta)).$$

Уравнение 2. Рассмотрим уравнение

$$u_t = a(u^k u_x)_x + uf(w/u) + bu^{k+1}, \tag{15}$$

которое обобщает уравнение (10). В этом случае функциональная связь второго рода (8) имеет вид (11), ей удовлетворяет решение с разделяющимися переменными (12), а функция $\varphi(x)$ имеет специальный вид.

1) Уравнение (15) при $b(k+1) > 0$ допускает решение в виде произведения функций разных аргументов

$$u = [C_1\cos(\beta x) + C_2\sin(\beta x)]^{1/(k+1)}\psi(t), \quad \beta = \sqrt{b(k+1)/a}, \tag{16}$$

где $\psi(t)$ — функция, описываемая ОДУ с запаздыванием

$$\psi'(t) = \psi(t)f(\psi(t-\tau)/\psi(t)). \tag{17}$$

Частное решение уравнения (17) имеет вид

$$\psi(t) = Ae^{\lambda t}, \tag{18}$$

где A — произвольная постоянная; λ — корень алгебраического (трансцендентного) уравнения $\lambda - f(e^{-\lambda\tau}) = 0$.

2) Уравнение (15) при $b(k+1) < 0$ допускает решение в виде произведения функций разных аргументов

$$u = [C_1\exp(-\beta x) + C_2\exp(\beta x)]^{1/(k+1)}\psi(t), \ \beta = \sqrt{-b(k+1)/a}, \tag{19}$$

где функция $\psi(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением с запаздыванием (17).

3) При $k=-1$ уравнение (15) также допускает решение в виде произведения

$$u = C_1 \exp\left(-\frac{b}{2a}x^2 + C_2 x\right)\psi(t), \qquad (20)$$

где функция $\psi(t)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению с запаздыванием (17).

Уравнение 3. Рассмотрим уравнение

$$u_t = a(u^k u_x)_x + b + u^{-k} f(u^{k+1} - w^{k+1}), \quad k \neq -1, \qquad (21)$$

которое содержит произвольную функцию $f(z)$, где $z = u^{k+1} - w^{k+1}$. В этом случае функциональная связь второго рода (8) имеет вид

$$u^{k+1} - w^{k+1} = q(t), \qquad w = u(x, t-\tau). \qquad (22)$$

Разностному уравнению (22) удовлетворяет решение с функциональным разделением переменных

$$u = [\varphi(x) + \psi(t)]^{1/(k+1)}, \qquad (23)$$

откуда следует, что $q(t) = \psi(t) - \psi(t-\tau)$. Подставляя (23) в УрЧП с запаздыванием (21), получаем следующие результаты.

1) Уравнение (21) допускает решение с функциональным разделением переменных

$$u = \left[At - \frac{b(k+1)}{2a}x^2 + C_1 x + C_2\right]^{1/(k+1)}, \qquad (24)$$

где A — корень алгебраического (трансцендентного) уравнения $A = (k+1) f(A\tau)$.

2) Уравнение (21) допускает более сложное решение с функциональным разделением переменных

$$u = \left(\psi(t) - \frac{b(k+1)}{2a}x^2 + C_1 x + C_2\right)^{1/(k+1)}, \qquad (25)$$

где $\psi(t)$ — функция, описываемая ОДУ с запаздыванием,

$$\psi'(t) = (k+1) f(\psi(t) - \psi(t-\tau)). \qquad (26)$$

Уравнение 4. Рассмотрим уравнение

$$u_t = a(u^{-1/2}u_x)_x + bu^{1/2} + f(u^{1/2} - w^{1/2}), \tag{27}$$

в котором $f(z)$ — произвольная функция, где $z = u^{1/2} - w^{1/2}$. В этом случае функциональная связь первого рода (7) имеет вид

$$u^{1/2} - w^{1/2} = p(x), \qquad w = u(x, t-\tau). \tag{28}$$

Разностному уравнению (28) удовлетворяет функция

$$u = (\varphi(x)t + \psi(x))^2, \tag{29}$$

откуда $p(x) = \tau\varphi(x)$.

Поставляя (29) в УрЧП с запаздыванием (27), для функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ получаем систему ОДУ

$$\begin{cases} 2a\varphi''_{xx} + b\varphi - 2\varphi^2 = 0; \\ 2a\psi''_{xx} + b\psi - 2\varphi\psi + f(\tau\varphi) = 0. \end{cases}$$

Частное решение этой системы имеет вид

$$\varphi = \frac{1}{2}b; \quad \psi = -\frac{1}{4a} f\left(\frac{b\tau}{2}\right) x^2 + Ax + B,$$

где A, B — произвольные постоянные.

Уравнение 5. Рассмотрим уравнение

$$u_t = a(e^{\lambda u}u_x)_x + f(u - w). \tag{30}$$

Уравнение (30) содержит произвольную функцию $f(z)$, где $z = u - w$. Функциональная связь второго рода (8) имеет вид

$$u - w = q(t), \qquad w = u(x, t-\tau). \tag{31}$$

Разностному уравнению (31) удовлетворяет решение в виде суммы функций разных аргументов

$$u = \varphi(x) + \psi(t), \tag{32}$$

откуда следует, что $q(t) = \psi(t) - \psi(t-\tau)$.

Поставляя (32) в УрЧП с запаздыванием (30), получим решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$u = \frac{1}{\lambda}\ln(Ax^2 + Bx + C) + \psi(t), \tag{33}$$

где A, B, C — произвольные постоянные; функция $\psi(t)$ описывается ОДУ с запаздыванием

$$\psi'(t) = 2a(A/\lambda)e^{\lambda\psi(t)} + f(\psi(t) - \psi(t-\tau)). \tag{34}$$

Замечание 9. Уравнение (30) допускает также более сложное решение вида

$$u = \frac{2}{\lambda}\ln(x + C) + \theta(\zeta), \quad \zeta = t + \beta\ln(x + C), \tag{35}$$

где C и β — произвольные постоянные; функция $\theta(\zeta)$ удовлетворяет ОДУ с запаздыванием

$$\theta'(\zeta) = ae^{\lambda\theta(\zeta)}\left\{\frac{2}{\lambda} + 3\beta\theta'(\zeta) + \beta^2\lambda(\theta'(\zeta))^2 + \beta^2\theta''(\zeta)\right\} + f(\theta(\zeta) - \theta(\zeta - \tau)).$$

Уравнение 6. Рассмотрим уравнение

$$u_t = a(e^{\lambda u}u_x)_x + f(u - w) + be^{\lambda u}, \tag{36}$$

которое обобщает уравнение (30).

1) При $b\lambda > 0$ уравнение (36) допускает решение в виде суммы

$$u = \frac{1}{\lambda}\ln(C_1\cos(\beta x) + C_2\sin(\beta x)) + \psi(t), \quad \beta = \sqrt{b\lambda/a}, \tag{37}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные; $\psi(t)$ — функция, описываемая ОДУ с запаздыванием

$$\psi'(t) = f(\psi(t) - \psi(t-\tau)). \tag{38}$$

Уравнение (38) имеет частное решение

$$\psi = A + kt,$$

где A — произвольная постоянная; k — корень алгебраического (трансцендентного) уравнения $k - f(k\tau) = 0$.

2) При $b\lambda < 0$ уравнение (36) допускает решение в виде суммы

$$u = \frac{1}{\lambda}\ln(C_1\exp(-\beta x) + C_2\exp(\beta x)) + \psi(t), \quad \beta = \sqrt{-b\lambda/a}, \tag{39}$$

где функция $\psi(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением с запаздыванием (38).

Уравнение 7. Рассмотрим уравнение

$$u_t = a(e^{\lambda u}u_x)_x + b + e^{-\lambda u} f(e^{\lambda u} - e^{\lambda w}). \qquad (40)$$

1) Уравнение (40) допускает решение с функциональным разделением переменных:

$$u = \frac{1}{\lambda}\ln\left(At - \frac{b\lambda}{2a}x^2 + C_1 x + C_2\right), \qquad (41)$$

где A — корень алгебраического (трансцендентного) уравнения $A - \lambda f(A\tau) = 0$.

2) Уравнение (40) допускает более сложное решение с функциональным разделением переменных

$$u = \frac{1}{\lambda}\ln\left(\psi(t) - \frac{b\lambda}{2a}x^2 + C_1 x + C_2\right), \qquad (42)$$

где функция $\psi(t)$ описывается ОДУ с запаздыванием

$$\psi'(t) = \lambda f(\psi(t) - \psi(t-\tau)). \qquad (43)$$

Уравнение 8. Уравнение

$$u_t = ((a\ln u + b)u_x)_x - cu\ln u + uf(w/u) \qquad (44)$$

допускает решения в виде произведения

$$u = \exp(\pm\lambda x)\psi(t), \quad \lambda = \sqrt{c/a}, \qquad (45)$$

где функция $\psi(t)$ описывается ОДУ с запаздыванием

$$\psi'(t) = \lambda^2(a+b)\psi(t) + \psi(t) f(\psi(t-\tau)/\psi(t)). \qquad (46)$$

Уравнение 9. Рассмотрим уравнение

$$u_t = (uf'(u)u_x)_x + \frac{1}{f'(u)}(af(u) + bf(w) + c), \qquad (47)$$

где $f(u)$ — произвольная функция, а штрих обозначает производную по u.

Уравнение (47) допускает решение с функциональным разделением переменных, которое можно записать в неявном виде,

$$f(u) = \varphi(t)x + \psi(t), \qquad (48)$$

где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — функции, удовлетворяющие ОДУ с запаздыванием

$$\varphi'(t) = a\varphi(t) + b\varphi(t-\tau), \tag{49}$$

$$\psi'(t) = a\psi(t) + b\psi(t-\tau) + c + \varphi^2(t). \tag{50}$$

Уравнение 10. Уравнение

$$u_t = \left(uf'(u)u_x\right)_x + (a+b)u + \frac{2}{f'(u)}\left(af(u) + bf(w) + c\right) \tag{51}$$

допускает решение с функциональным разделением переменных, которое можно записать в неявном виде:

$$f(u) = -\tfrac{1}{2}(a+b)x^2 + \varphi(t)x + \psi(t), \tag{52}$$

где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — функции, удовлетворяющие ОДУ с запаздыванием

$$\varphi'(t) = -2b\varphi(t) + 2b\varphi(t-\tau), \tag{53}$$

$$\psi'(t) = 2a\psi(t) + 2b\psi(t-\tau) + 2c + \varphi^2(t). \tag{54}$$

Уравнение (53) имеет частное решение

$$\varphi(t) = C_1 e^{\lambda t} + C_2, \tag{55}$$

где λ — корень трансцендентного уравнения $\lambda + 2b(1 - e^{-\lambda\tau}) = 0$.

Уравнение 11. Уравнение

$$u_t = (f'(u)u_x)_x + a_1 f(u) + a_2 f(w) + a_3 + \frac{b}{f'(u)}(f(u) - f(w)) \tag{56}$$

допускает решение с функциональным разделением переменных, которое можно записать в неявном виде:

$$f(u) = e^{\lambda t}\varphi(x) - \frac{a_3}{a_1 + a_2}, \tag{57}$$

где λ — корень трансцендентного уравнения,

$$\lambda = b(1 - e^{-\lambda\tau}); \tag{58}$$

$\varphi(x)$ — функция, описываемая линейным ОДУ с постоянными коэффициентами

$$\varphi''_{xx} + (a_1 + a_2 e^{-\lambda\tau})\varphi = 0. \tag{59}$$

Уравнение 12. Уравнение

$$u_t = (f'(u)u_x)_x + a[f(u) - f(w)] + \frac{1}{f'(u)}(b_1 f(u) + b_2 f(w) + b_3) \qquad (60)$$

допускает решение с функциональным разделением переменных в неявном виде:

$$f(u) = e^{\lambda t}\varphi(x) - \frac{b_3}{b_1 + b_2}. \qquad (61)$$

Здесь λ — корень трансцендентного уравнения

$$\lambda - b_1 - b_2 e^{-\lambda\tau} = 0, \qquad (62)$$

а функция $\varphi(x)$ описывается линейным ОДУ с постоянными коэффициентами

$$\varphi''_{xx} + a(1 - e^{-\lambda\tau})\varphi = 0. \qquad (63)$$

Уравнение 13. Рассмотрим уравнение

$$\begin{aligned} u_t &= (f'(u)u_x)_x + a_1 f(u) + a_2 f(w) + \\ &+ a_3 + \frac{1}{f'(u)}(b_1 f(u) + b_2 f(w) + b_3), \end{aligned} \qquad (64)$$

которое обобщает два предыдущих уравнения.

Пусть выполняется условие

$$(a_1 + a_2)b_3 = a_3(b_1 + b_2). \qquad (65)$$

Тогда имеется решение с функциональным разделением переменных, которое можно представить в неявном виде:

$$f(u) = e^{\lambda t}\varphi(x) + c. \qquad (66)$$

Здесь

$$c = -\frac{a_3}{a_1 + a_2} \ \text{ при } \ a_1 \neq -a_2 \quad \text{ или } \quad c = -\frac{b_3}{b_1 + b_2} \ \text{ при } \ b_1 \neq -b_2; \qquad (67)$$

λ — корень трансцендентного уравнения

$$\lambda - b_1 - b_2 e^{-\lambda\tau} = 0; \qquad (68)$$

функция $\varphi(x)$ удовлетворяет линейному ОДУ с постоянными коэффициентами

$$\varphi''_{xx} + (a_1 + a_2 e^{-\lambda\tau})\varphi = 0. \tag{69}$$

Уравнение 14. Рассмотрим уравнение

$$\begin{gathered} u_t = (h(u)u_x)_x + \frac{1}{f'(u)}(c_1 f(u) + c_2 f(w) + c_3), \\ h(u) = f'(u)\int (af(u) + b)\,du, \end{gathered} \tag{70}$$

где $f(u)$ — произвольная функция, а штрих обозначает производную по u.

Уравнение (70) допускает решение с функциональным разделением переменных в неявном виде

$$f(u) = \varphi(t)x + \psi(t), \tag{71}$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ удовлетворяют ОДУ с запаздыванием:

$$\varphi'(t) = a\varphi^3(t) + c_1\varphi(t) + c_2\varphi(t-\tau),$$

$$\psi'(t) = \varphi^2(t)(a\psi(t) + b) + c_1\psi(t) + c_2\psi(t-\tau) + c_3.$$

Одномерные реакционно-диффузионные уравнения, содержащие две произвольные функции одного аргумента.

Уравнение 15. Рассмотрим уравнение

$$u_t = a(u^k u_x)_x + uf(w/u) + u^{k+1}g(w/u), \tag{72}$$

где $f(z)$ и $g(z)$ — произвольные функции.

Уравнение (72) допускает решения в виде произведения вида

$$u = e^{\lambda t}\varphi(x), \tag{73}$$

где λ — корень алгебраического (трансцендентного) уравнения

$$\lambda = f(e^{-\lambda\tau});$$

$\varphi(x)$ — функция, описываемая ОДУ

$$a(\varphi^k \varphi'_x)'_x + g(e^{-\lambda\tau})\varphi^{k+1} = 0.$$

При $k \neq -1$ подстановка $\theta = \varphi^{k+1}$ приводит к линейному ОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами. При $k = -1$ следует использовать подстановку $\theta = \ln \varphi$.

Уравнение 16. Уравнение

$$u_t = a(u^{-1/2}u_x)_x + f(u^{1/2} - w^{1/2}) + u^{1/2}g(u^{1/2} - w^{1/2}) \tag{74}$$

допускает решение с обобщенным разделением переменных:

$$u = [\varphi(x)t + \psi(x)]^2, \tag{75}$$

где функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ описываются системой ОДУ

$$2a\varphi''_{xx} + \varphi g(\tau\varphi) - 2\varphi^2 = 0;$$
$$2a\psi''_{xx} + \psi g(\tau\varphi) - 2\varphi\psi + f(\tau\varphi) = 0.$$

Система допускает частное решение

$$\varphi = k; \quad \psi = -\frac{1}{4a} f(k\tau)x^2 + Ax + B,$$

где A и B — произвольные постоянные; константа k находится из алгебраического (трансцендентного) уравнения $g(k\tau) - 2k = 0$.

Уравнение 17. Уравнение

$$u_t = a(u^k u_x)_x + f(u^{k+1} - w^{k+1}) + u^{-k}g(u^{k+1} - w^{k+1}), \ k \neq -1, \tag{76}$$

допускает решение с обобщенным разделением переменных

$$u = (At + Bx^2 + C_1 x + C_2)^{1/(k+1)}; \quad B = -\frac{(k+1)}{2a} f(A\tau), \tag{77}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные; константа A определяется из решения алгебраического (трансцендентного) уравнения $A - (k+1)g(A\tau) = 0$.

Уравнение 18. Уравнения вида

$$u_t = a(e^{\lambda u}u_x)_x + f(u - w) + e^{\lambda u}g(u - w) \tag{78}$$

допускают решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$u = \beta t + \varphi(x), \tag{79}$$

где β — корень алгебраического (трансцендентного) уравнения,

$$\beta = f(\beta\tau);$$

функция $\varphi(x)$ описывается ОДУ

$$a(e^{\lambda\varphi}\varphi_x)_x + g(\beta\tau)e^{\lambda\varphi} = 0,$$

которое подстановкой $\theta = e^{\lambda\varphi}$ приводится к линейному ОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами.

Уравнение 19. Уравнение

$$u_t = a(e^{\lambda u}u_x)_x + f(e^{\lambda u} - e^{\lambda w}) + e^{-\lambda u}g(e^{\lambda u} - e^{\lambda w}) \tag{80}$$

допускает решение с обобщенным разделением переменных:

$$u = \frac{1}{\lambda}\ln(At + Bx^2 + C_1x + C_2), \quad B = -\frac{\lambda}{2a}f(A\tau), \tag{81}$$

где константу A находят из алгебраического (трансцендентного) уравнения $A - \lambda g(A\tau) = 0$.

Уравнение 20. Рассмотрим уравнение

$$u_t = a(g'(u)u_x)_x + b + \frac{1}{g'(u)}f(g(u) - g(w)), \tag{82}$$

где $g(u)$ и $f(z)$ — произвольные функции, а штрих обозначает производную по аргументу.

Уравнение (82) допускает решение с функциональным разделением переменных в неявном виде:

$$g(u) = \psi(t) - \frac{b}{2a}x^2 + C_1x + C_2. \tag{83}$$

Функция $\psi(t)$ описывается ОДУ с запаздыванием (38), которое имеет частное решение $\psi(t) = At$, где A — корень алгебраического (трансцендентного) уравнения $A - f(A\tau) = 0$.

Уравнение 21. Рассмотрим уравнение

$$u_t = a(g'(u)u_x)_x + bg(u) + \frac{g(u)}{g'(u)}f(g(w)/g(u)), \tag{84}$$

где $g(u)$ и $f(z)$ — произвольные функции, а штрих обозначает производную по аргументу.

1) При $ab > 0$ уравнение (84) допускает решение с функциональным разделением переменных в неявном виде

$$g(u)=[C_1\cos(\lambda x)+C_2\sin(\lambda x)]\psi(t),\quad \lambda=\sqrt{b/a}. \tag{85}$$

Функция $\psi(t)$ описывается ОДУ с запаздыванием (17); это уравнение имеет частное решение $\psi(t)=e^{\lambda t}$, где λ — корень алгебраического (трансцендентного) уравнения $\lambda - f(e^{-\lambda\tau})=0$.

2) При $ab<0$ уравнение (84) допускает решение с функциональным разделением переменных в неявном виде:

$$g(u)=[C_1\exp(-\lambda x)+C_2\exp(\lambda x)]\psi(t),\quad \lambda=\sqrt{-b/a}\,, \tag{86}$$

где функция $\psi(t)$ описывается ОДУ с запаздыванием (17).

3) При $b=0$ уравнение (84) допускает решение с функциональным разделением переменных в неявном виде

$$g(u)=(C_1x+C_2)\psi(t),$$

а функция $\psi(t)$ описывается ОДУ с запаздыванием (17).

Уравнение 22. Рассмотрим уравнение

$$\begin{gathered}u_t=(h(u)u_x)_x-\frac{1}{g'(u)}(c_1g(u)+c_2g(w))+\frac{1}{g'(u)}f(g(u)-g(w)),\\ h(u)=g'(u)\int(ag(u)+b)du,\end{gathered} \tag{87}$$

где $g(u)$ и $f(z)$ — произвольные функции; штрих обозначает производную по u.

Уравнение (87) допускает решения с функциональным разделением переменных в неявном виде

$$g(u)=\pm kx+\psi(t),\quad k=\sqrt{(c_1+c_2)/a}, \tag{88}$$

где функция $\psi(t)$ описывается ОДУ с запаздыванием

$$\psi'(t)=c_2\psi(t)+bk^2-c_2\psi(t-\tau)+f(\psi(t)-\psi(t-\tau)).$$

Одномерные реакционно-диффузионные уравнения, содержащие три произвольные функции одного аргумента.

Уравнение 23. Рассмотрим уравнение

$$u_t=a(f'(u)u_x)_x+g(f(u)-f(w))+\frac{1}{f'(u)}h(f(u)-f(w)), \tag{89}$$

где $f(u)$, $g(z)$, $h(z)$ — произвольные функции; штрих обозначает производную.

Уравнение (89) допускает решение с функциональным разделением переменных в неявном виде:

$$f(u) = At - \frac{g(A\tau)}{2a}x^2 + C_1 x + C_2, \tag{90}$$

где константа A — корень алгебраического (трансцендентного) уравнения $A - h(A\tau) = 0$.

Уравнение 24. Рассмотрим уравнение

$$u_t = a(f'(u)u_x)_x + f(u)g(f(w)/f(u)) + \frac{f(u)}{f'(u)}h(f(w)/f(u)), \tag{91}$$

где $f(u)$, $g(z)$, $h(z)$ — произвольные функции.

Пусть β — корень алгебраического (трансцендентного) уравнения

$$\beta - h(e^{-\beta\tau}) = 0.$$

1) При $ag(e^{-\beta\tau}) > 0$ уравнение (91) допускает решение с функциональным разделением переменных в неявном виде:

$$f(u) = [C_1 \cos(\lambda x) + C_2 \sin(\lambda x)]e^{\beta t}, \quad \lambda = \sqrt{g(e^{-\beta\tau})/a}, \tag{92}$$

2) При $ag(e^{-\beta\tau}) < 0$ уравнение (91) допускает решение с функциональным разделением переменных в неявном виде:

$$f(u) = [C_1 \exp(-\lambda x) + C_2 \exp(\lambda x)]e^{\beta t}, \quad \lambda = \sqrt{-g(e^{-\beta\tau})/a}\,. \tag{93}$$

3) При $g(e^{-\beta\tau}) = 0$ уравнение (91) допускает решение с функциональным разделением переменных в неявном виде:

$$f(u) = (C_1 x + C_2)e^{\beta t}.$$

Уравнение 25. Уравнение

$$u_t = (g(u)u_x)_x - \frac{\lambda^2}{f'(u)}\frac{d}{du}\left(\frac{g(u)}{f'(u)}\right) + \frac{1}{f'(u)}h(f(u) - f(w))$$

допускает решения с функциональным разделением переменных в неявном виде:

$$f(u) = \pm\lambda x + \psi(t),$$

где функция $\psi(t)$ — решение ОДУ с запаздыванием:

$$\psi'(t) = h(\psi(t) - \psi(t - \tau)).$$

Трехмерные реакционно-диффузионные уравнения, содержащие произвольную функцию одного аргумента. Будем рассматривать многомерные обобщения некоторых одномерных уравнений и их решений, представленных ранее. Далее используем следующие обозначения: $u = u(\mathbf{x}, t) \equiv u(x_1, \ldots, x_n, t)$, $w = u(\mathbf{x}, t - \tau)$. Двух- и трехмерные уравнения соответствуют $n = 2$ и $n = 3$.

Уравнение 26. Рассмотрим уравнение

$$u_t = a\operatorname{div}(u^k \nabla u) + uf(w/u) + bu^{k+1}. \tag{94}$$

1) При $k \neq -1$ уравнение (94) допускает решения в виде произведения вида

$$u = \psi(t)\varphi^{1/(k+1)}(\mathbf{x}), \tag{95}$$

где функция $\psi(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением с запаздыванием (17), а функция $\phi(\mathbf{x}) = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\Delta\varphi + \frac{b(k+1)}{a}\varphi = 0, \tag{96}$$

в котором Δ — оператор Лапласа.

2) При $k = -1$ уравнение (94) допускает решения в виде произведения вида

$$u = \psi(t)\ln\varphi(\mathbf{x}), \tag{97}$$

где функция $\psi(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением с запаздыванием (17), а функция $\varphi(\mathbf{x})$ удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta\varphi + (b/a) = 0. \tag{98}$$

Уравнение 27. Уравнение

$$u_t = a\operatorname{div}(u^k \nabla u) + b + u^{-k} f(u^{k+1} - w^{k+1}), \quad k \neq -1, \tag{99}$$

допускает решение с функциональным разделением переменных:

$$u = (\varphi(\mathbf{x}) + \psi(t))^{1/(k+1)}, \tag{100}$$

в котором функция $\psi(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением с запаздыванием (26), а функция $\varphi(\mathbf{x})$ удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta\varphi + \frac{b(k+1)}{a} = 0. \tag{101}$$

Уравнение 28. Уравнение

$$u_t = a\,\mathrm{div}(u^{-1/2}\nabla u) + bu^{1/2} + f(u^{1/2} - w^{1/2}) \qquad (102)$$

допускает решения с обобщенным разделением переменных вида

$$u = (\varphi(\mathbf{x})t + \psi(\mathbf{x}))^2, \qquad (103)$$

где $\varphi = \varphi(\mathbf{x})$ и $\psi = \psi(\mathbf{x})$ — функции, удовлетворяющие уравнениям в частных производных,

$$2a\Delta\varphi + b\varphi - 2\varphi^2 = 0, \qquad (104)$$

$$2a\Delta\psi + b\psi - 2\varphi\psi + f(\tau\varphi) = 0. \qquad (105)$$

Уравнение (104) имеет частное решение $\varphi = \frac{1}{2}b = \mathrm{const}$. В этом случае уравнение (105) переходит в уравнение Пуассона

$$a\Delta\psi + \frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}b\tau\right) = 0.$$

Уравнение 29. Рассмотрим уравнение

$$u_t = a\,\mathrm{div}(e^{\lambda u}\nabla u) + f(u - w) + be^{\lambda u}, \qquad (106)$$

которое обобщает уравнение (36).

Уравнение (106) допускает решение в виде суммы

$$u = \psi(t) + \frac{1}{\lambda}\ln\varphi(\mathbf{x}), \qquad (107)$$

в котором функция $\psi(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением с запаздыванием (38), а функция $\varphi(\mathbf{x})$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\Delta\varphi + \lambda(b/a)\varphi = 0. \qquad (108)$$

Уравнение 30. Уравнение

$$u_t = a\,\mathrm{div}(e^{\lambda u}\nabla u) + b + e^{-\lambda u} f(e^{\lambda u} - e^{\lambda w}) \qquad (109)$$

допускает решение с функциональным разделением переменных

$$u = \frac{1}{\lambda}\ln(\varphi(\mathbf{x}) + \psi(t)), \qquad (110)$$

где функция $\psi(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением с запаздыванием (43), функция $\varphi(\mathbf{x})$ удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta\varphi + \lambda(b / a) = 0. \qquad (111)$$

Уравнение 31. Рассмотрим уравнение

$$u_t = \operatorname{div}(uf'(u)\nabla u) + \frac{1}{f'(u)}(af(u) + bf(w) + c), \qquad (112)$$

где $f(u)$ — произвольная функция; штрих обозначает производную по u.

Уравнение (112) допускает решение с функциональным разделением переменных в неявном виде:

$$f(u) = \sum_{k=1}^{n}\varphi_k(t)x_k + \psi(t), \qquad (113)$$

где функции $\varphi_k(t)$ и $\psi(t)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями с запаздыванием

$$\varphi_k'(t) = a\varphi_k(t) + b\varphi_k(t-\tau), \quad k = 1,\ldots,n, \qquad (114)$$

$$\psi'(t) = a\psi(t) + b\psi(t-\tau) + c + \sum_{k=1}^{n}\varphi_k^2(t). \qquad (115)$$

Уравнение 32. Уравнение

$$u_t = \operatorname{div}(f'(u)\nabla u) + a_1 f(u) + a_2 f(w) + a_3 + \frac{b}{f'(u)}(f(u) - f(w)) \qquad (116)$$

допускает решение с функциональным разделением переменных в неявном виде:

$$f(u) = e^{\lambda t}\varphi(\mathbf{x}) - \frac{a_3}{a_1 + a_2}, \qquad (117)$$

где λ — корень трансцендентного уравнения,

$$\lambda = b(1 - e^{-\lambda\tau}), \qquad (118)$$

а функция $\varphi(\mathbf{x})$ описывается уравнением Гельмгольца

$$\Delta\varphi + (a_1 + a_2 e^{-\lambda\tau})\varphi = 0. \qquad (119)$$

Уравнение 33. Уравнение

$$u_t = \operatorname{div}(f'(u)\nabla u) + a(f(u) - f(w)) + \frac{1}{f'(u)}(b_1 f(u) + b_2 f(w) + b_3) \qquad (120)$$

допускает решение с функциональным разделением переменных в неявном виде:

$$f(u) = e^{\lambda t}\varphi(\mathbf{x}) - \frac{b_3}{b_1 + b_2}, \qquad (121)$$

где λ — корень трансцендентного уравнения,

$$\lambda - b_1 - b_2 e^{-\lambda\tau} = 0, \qquad (122)$$

а $\varphi(x)$ — функция, описываемая уравнением Гельмгольца,

$$\Delta\varphi + a(1 - e^{-\lambda\tau})\varphi = 0. \qquad (123)$$

Трехмерные реакционно-диффузионные уравнения, содержащие две произвольные функции одного аргумента.

Уравнение 34. Уравнение

$$u_t = a\,\operatorname{div}(u^{-1/2}\nabla u) + f(u^{1/2} - w^{1/2}) + u^{1/2} g(u^{1/2} - w^{1/2}) \qquad (124)$$

допускает решения с обобщенным разделением переменных вида

$$u = (u(\mathbf{x})t + \psi(\mathbf{x}))^2, \qquad (125)$$

где $\varphi = \varphi(\mathbf{x})$ и $\psi = \psi(\mathbf{x})$ — функции, описываемые уравнениями в частных производных,

$$2a\Delta\varphi + \varphi g(\tau\varphi) - 2\varphi^2 = 0, \qquad (126)$$

$$2a\Delta\psi + \psi g(\tau\varphi) - 2\varphi\psi + f(\tau\varphi) = 0. \qquad (127)$$

Уравнение (126) имеет частное решение $\varphi = \varphi_0 = \mathrm{const}$, где φ_0 — корень алгебраического (трансцендентного) уравнения $g(\tau\varphi_0) - 2\varphi_0 = 0$. В этом случае уравнение (127) переходит в уравнение Пуассона

$$a\Delta\psi + \frac{1}{2} f(\tau\varphi_0) = 0.$$

Уравнение 35. Уравнение

$$u_t = a\operatorname{div}(u^k\nabla u) + f(u^{k+1} - w^{k+1}) + u^{-k} g(u^{k+1} - w^{k+1}), \quad k \neq -1, \qquad (128)$$

допускает решения с обобщенным разделением переменных:

$$u = [At + \varphi(\mathbf{x})]^{1/(k+1)}, \qquad (129)$$

где константа A определяется из решения алгебраического (трансцендентного) уравнения $A-(k+1)g(A\tau)=0$, а функция $\varphi(\mathbf{x})$ описывается уравнением Пуассона

$$a\Delta\varphi + (k+1)f(A\tau) = 0. \qquad (130)$$

Уравнение 36. Рассмотрим уравнение

$$u_t = a\,\mathrm{div}(e^{\lambda u}\nabla u) + f(u-w) + e^{\lambda u}g(u-w), \qquad (131)$$

где $f(z)$ и $g(z)$ — произвольные функции.

Уравнение (131) допускает решение в виде суммы

$$u = \beta t + \frac{1}{\lambda}\ln\varphi(\mathbf{x}), \qquad (132)$$

где β — корень алгебраического (трансцендентного) уравнения $\beta - f(\beta\tau)=0$; $\varphi(\mathbf{x})$ — функция, удовлетворяющая уравнению Гельмгольца

$$a\Delta\varphi + \lambda g(\beta\tau)\varphi = 0. \qquad (133)$$

Уравнение 37. Уравнение

$$u_t = a\,\mathrm{div}(e^{\lambda u}\nabla u) + f(e^{\lambda u} - e^{\lambda w}) + e^{-\lambda u}g(e^{\lambda u} - e^{\lambda w}) \qquad (134)$$

допускает решение с обобщенным разделением переменных:

$$u = \frac{1}{\lambda}\ln(At + \varphi(\mathbf{x})), \qquad (135)$$

где константа A определяется из решения алгебраического (трансцендентного) уравнения $A-\lambda g(A\tau)=0$, а функция $\varphi(\mathbf{x})$ описывается уравнением Пуассона

$$a\Delta\varphi + \lambda f(A\tau) = 0. \qquad (136)$$

Уравнение 38. Рассмотрим уравнение

$$u_t = a\,\mathrm{div}(g'(u)\nabla u) + b + \frac{1}{g'(u)}f(g(u)-g(w)), \qquad (137)$$

где $g(u)$ и $f(z)$ — произвольные функции; штрих обозначает производную.

Уравнение (137) допускает решение с функциональным разделением переменных в неявном виде:

$$g(u) = \varphi(\mathbf{x}) + \psi(t). \qquad (138)$$

Функция $\psi(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением с запаздыванием (38), а функция $\varphi(\mathbf{x})$ удовлетворяет уравнению Пуассона (98).

Уравнение 39. Рассмотрим уравнение

$$u_t = a\mathrm{div}(g'(u)\nabla u) + bg(u) + \frac{g(u)}{g'(u)} f(g(w)/g(u)), \qquad (139)$$

где $g(u)$ и $f(z)$ — произвольные функции.

Уравнение (139) допускает решение с функциональным разделением переменных в неявном виде:

$$g(u) = \varphi(\mathbf{x})\psi(t). \qquad (140)$$

Функция $\psi(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением с запаздыванием (17), функция $\varphi(\mathbf{x})$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$a\Delta\varphi + b\varphi = 0. \qquad (141)$$

Трехмерные реакционно-диффузионные уравнения, содержащие три произвольные функции одного аргумента.

Уравнение 40. Рассмотрим уравнение

$$u_t = a\,\mathrm{div}(f'(u)\nabla u) + g(f(u) - f(w)) + \frac{1}{f'(u)} h(f(u) - f(w)), \qquad (142)$$

где $f(u)$, $g(z)$, $h(z)$ — произвольные функции.

Уравнение (142) допускает решение с функциональным разделением переменных в неявном виде:

$$f(u) = At + \varphi(\mathbf{x}), \qquad (143)$$

где A — корень алгебраического (трансцендентного) уравнения $A - h(A\tau) = 0$; $\varphi(\mathbf{x})$ — функция, описываемая уравнением Пуассона,

$$a\Delta\varphi + g(A\tau) = 0. \qquad (144)$$

Уравнение 41. Рассмотрим уравнение

$$u_t = a\,\mathrm{div}9 f'(u)\nabla u) + f(u)g(f(w)/f(u)) + \frac{f(u)}{f'(u)} h(f(w)/f(u)), \qquad (145)$$

где $f(u)$, $g(z)$, $h(z)$ — произвольные функции.

Уравнение (145) допускает решение с функциональным разделением переменных в неявном виде:

$$f(u) = \varphi(\mathbf{x})e^{\beta t}, \qquad (146)$$

где β — корень алгебраического (трансцендентного) уравнения $\beta - h(e^{-\beta\tau}) = 0$; $\varphi(\mathbf{x})$ — функция, удовлетворяющая уравнению Гельмгольца,

$$a\Delta\varphi + g(e^{-\beta\tau})\varphi = 0. \qquad (147)$$

Реакционно-диффузионные уравнения с переменным запаздыванием. Большая часть представленных выше результатов применима и к нелинейным реакционно-диффузионным уравнениям с зависящим от времени запаздыванием $\tau = \tau(t)$. В табл. 1 приведены некоторые уравнения, содержащие произвольные функции, а также их решения. В искомых функциях, зависящих от t и $t-\tau$, входящих в определяющие обыкновенные дифференциальные уравнения с запаздыванием, необходимо положить $\tau = \tau(t)$.

Таблица 1

Точные решения реакционно-диффузионного уравнения с переменным запаздыванием $u_t = (G(u)u_x)_x + F(u,w)$, где $w = u(\mathbf{x}, t-\tau)$ и $\tau = \tau(t)$

Вид реакционно-диффузионных уравнений с переменным запаздыванием	Вид точных решений	Определяющее уравнение
$u_t = a(u^k u_x)_x + uf(w/u)$	$u = \varphi(x)\psi(t)$	(13), (14)
$u_t = a(u^k u_x)_x + uf(w/u) + bu^{k+1}$	$u = \varphi(x)\psi(t)$, см. (16), (19), (20)	(17)
$u_t = a(u^k u_x)_x + b + u^{-k} f(u^{k+1} - w^{k+1})$	$u = (\varphi(x) + \psi(t))^{1/(k+1)}$, см. (25)	(26)
$u_t = a(e^{\lambda u}u_x)_x + f(u-w)$	$u = \varphi(x) + \psi(t)$, см. (33)	(34)
$u_t = a(e^{\lambda u}u_x)_x + f(u-w) + be^{\lambda u}$	$u = \varphi(x) + \psi(t)$, см. (37), (39)	(38)
$u_t = a(e^{\lambda u}u_x)_x + b + e^{-\lambda u} f(e^{\lambda u} - e^{\lambda w})$	$u = \frac{1}{\lambda}\ln(\varphi(x) + \psi(t))$, см. (42)	(43)
$u_t = ((a\ln u + b)u_x)_x - cu\ln u + uf(w/u)$	$u = \exp\left(\pm\sqrt{c/a}\,x\right)\psi(t)$	(46)

Окончание табл. 1

Вид реакционно-диффузионных уравнений с переменным запаздыванием	Вид точных решений	Определяющее уравнение
$u_t = (uf'(u)u_x)_x + \frac{1}{f'(u)}(af(u) + bf(w) + c)$	$f(u) = \varphi(t)x + \psi(t)$	(49), (50)
$u_t = a(g'(u)u_x)_x + b + \frac{1}{g'(u)} f(g(u) - g(w))$	$g(u) = \varphi(x) + \psi(t)$, см. (83)	(38)
$u_t = a(g'(u)u_x)_x + bg(u) + \frac{g(u)}{g'(u)} f(g(u)/g(w))$	$g(u) = \varphi(x)\ \psi(t)$, см. (85), (86)	(17)

Пример. Рассмотрим первое уравнение в табл. 1. Полагая $\tau = \tau(t)$ в определяющем уравнении (14) для $\psi(t)$, получаем ОДУ с запаздыванием

$$\psi'(t) = b\psi^{k+1}(t) + \psi(t) f(\psi(t-\tau)/\psi(t)), \qquad \tau = \tau(t).$$

В табл. 2 приведены некоторые трехмерные реакционно-диффузионные уравнения с переменным запаздыванием $\tau = \tau(t)$, а также их точные решения.

Таблица 2

Точные решения реакционно-диффузионного уравнения с переменным запаздыванием $u_t = \operatorname{div}(G(u)\nabla u) + F(u,w)$, где $w = u(\mathbf{x}, t-\tau)$ и $\tau = \tau(t)$

Вид реакционно-диффузионных уравнений с переменным запаздыванием	Вид точных решений	Определяющее уравнение
$u_t = a\operatorname{div}(u^k\nabla u) + uf(w/u) + bu^{k+1}$	$u = \psi(t)\varphi^{1/(k+1)}(\mathbf{x})$	(17), (96)
$u_t = a\operatorname{div}(u^k\nabla u) + b + u^{-k} f(u^{k+1} - w^{k+1})$	$u = [\varphi(\mathbf{x}) + \psi(t)]^{1/(k+1)}$	(26), (101)
$u_t = a\operatorname{div}(e^{\lambda u}\nabla u) + f(u-w) + be^{\lambda u}$	$u = \psi(t) + \frac{1}{\lambda}\ln\varphi(\mathbf{x})$	(38), (108)
$u_t = a\operatorname{div}(e^{\lambda u}\nabla u) + b + e^{-\lambda u} f(e^{\lambda u} - e^{\lambda w})$	$u = \frac{1}{\lambda}\ln(\varphi(\mathbf{x}) + \psi(t))$	(43), (111)
$u_t = a\operatorname{div}(g'(u)\nabla u) + b + \frac{1}{g'(u)} f(g(u) - g(w))$	$g(u) = \varphi(\mathbf{x}) + \psi(t)$	(38), (98)
$u_t = a\operatorname{div}(g'(u)\nabla u) + bg(u) + \frac{g(u)}{g'(u)} f(g(w)/g(w))$	$g(u) = \varphi(\mathbf{x})\varphi(t)$	(17), (141)

Заключение. В статье описана новая модификация метода функциональных связей. Представлены точные решения одномерных нелинейных реакционно-диффузионных уравнений с запаздыванием вида

$$u_t = (G(u)u_x)_x + F(u,w),$$

где $u = u(x,t)$; $w = u(x, t-\tau)$, τ — время запаздывания. Все рассмотренные уравнения содержат одну, две или три произвольные функции одного аргумента. Описан ряд решений с обобщенным разделением переменных вида $u=\sum_{n=1}^{N}\varphi_n(x)\,\psi_n(t)$, а также решений с функциональным разделением переменных вида $u=U(z)$, где $z=\sum_{n=1}^{N}\varphi_n(x)\psi_n(t)$. Рассмотрены трехмерные реакционно-диффузионные уравнения с запаздыванием вида

$$u_t = \operatorname{div}(G(u)\nabla u) + F(u, w)$$

и их точные решения. Некоторые из результатов распространяются и на нелинейные реакционно-диффузионные уравнения с переменным запаздыванием $\tau=\tau(t)$, где $\tau(t)$ — произвольная функция. Большинство полученных решений содержит свободные параметры и может использоваться для решения некоторых задач и тестирования приближенных аналитических и численных методов решения нелинейных УрЧП с запаздыванием.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Wu J. *Theory and applications of partial functional differential equations*. New York, Springer-Verlag, 1996.

[2] Smith H.L., Zhao X.-Q. Global asymptotic stability of travelling waves in delayed reaction-diffusion equations. *SIAM J. Math. Anal.*, 2000, no. 31, pp. 514–534.

[3] Wu J., Zou X. Traveling wave fronts of reaction-diffusion systems with delay. *J. Dynamics and Differential Equations*, 2001, vol. 13, no. 3, pp. 651–687.

[4] Huang J., Zou X. Traveling wavefronts in diffusive and cooperative Lotka — Volterra system with delays. *J. Math. Anal. Appl.*, 2002, vol. 271, pp. 455–466.

[5] Faria T., Trofimchuk S. Nonmonotone travelling waves in a single species reaction-diffusion equation with delay. *J. Differential Equations*, 2006, vol. 228, pp. 357–376.

[6] Trofimchuk E., Tkachenko V., Trofimchuk S. Slowly oscillating wave solutions of a single species reaction-diffusion equation with delay. *J. Differential Equations*, 2008, vol. 245, pp. 2307–2332.

[7] Mei M., So J., Li M., Shen S. Asymptotic stability of travelling waves for Nicholson's blowflies equation with diffusion. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 2004, vol. 134, pp. 579–594.

[8] Gourley S.A., Kuan Y. Wavefronts and global stability in time-delayed population model with stage structure. *Proc. Roy. Soc. London A*, 2003, vol. 459, pp. 1563–1579.

[9] Pao C. Global asymptotic stability of Lotka — Volterra competition systems with diffusion and time delays. *Nonlinear Anal.: Real World Appl.*, 2004, vol. 5, no. 1, pp. 91–104.

[10] Liz E., Pinto M., Tkachenko V., Trofimchuk S. A global stability criterion for a family of delayed population models. *Quart. Appl. Math.*, 2005, vol. 63, pp. 56–70.

[11] Meleshko S.V., Moyo S. On the complete group classification of the reaction-diffusion equation with a delay. *J. Math. Anal. Appl.*, 2008, vol. 338, pp. 448–466.

[12] Polyanin A.D., Zhurov A.I.. Exact solutions of linear and non-linear differential-difference heat and diffusion equations with finite relaxation time. International J. *of Non-Linear Mechanics*, 2013, vol. 54, pp. 115–126.

[13] Arik S. Global asymptotic stability of a larger class of neural networks with constant time delay. *Phys. Lett. A*, 2003, vol. 311, pp. 504–511.

[14] Cao J. New results concerning exponential stability and periodic solutions of delayed cellular neural networks. *Phys. Lett. A*, 2003, vol. 307, pp. 136–147.

[15] Cao J., Liang J., Lam J. Exponential stability of high-order bidirectional associative memory neural networks with time delays. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2004, vol. 199, no. 3–4, pp. 425–436.

[16] Lu H.T., Chung F.L., He Z.Y. Some sufficient conditions for global exponential stability of delayed Hopfield neural networks. *Neural Networks*, 2004, vol. 17, pp. 537–544.

[17] Cao J.D., Ho D.W.C. A general framework for global asymptotic stability analysis of delayed neural networks based on LMI approach. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2005, vol. 24, pp. 1317–1329.

[18] Liao X.X., Wang J., Zeng Z. Global asymptotic stability and global exponential stability of delayed cellular neural networks. *IEEE Trans. Circ. Syst II*, 2005, vol. 52, no. 7, pp. 403–409.

[19] Song O.K., Cao J.D. Global exponential stability and existence of periodic solutions in BAM networks with delays and reaction diffusion terms. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2005, vol. 23, no. 2, pp. 421–430.

[20] Zhao H. Exponential stability and periodic oscillatory of bidirectional associative memory neural network involving delays. *Neurocomputing*, 2006, vol. 69, pp. 424–448.

[21] Wang L., Gao Y. Global exponential robust stability of reaction–diffusion interval neural networks with time-varying delays. *Physics Letters A*, 2006, vol. 350, pp. 342–348.

[22] Lu J.G. Global exponential stability and periodicity of reaction-diffusion delayed recurrent neural networks with Dirichlet boundary conditions. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2008, vol. 35, pp. 116–125.

[23] Дородницын В.А. Об инвариантных решениях уравнения нелинейной теплопроводности с источником. *Журнал вычислительной математики и математической физики*, 1982, т. 22, № 6, с. 1393–1400.

[24] Nucci M.C., Clarkson P.A. The nonclassical method is more general than the direct method for symmetry reductions. An example of the Fitzhugh — Nagumo equation. *Phys. Lett. A*, 1992, vol. 164, pp. 49–56.

[25] Кудряшов Н.А. О точных решениях уравнений семейства Фишера. *Теоретическая и математическая физика*, 1993, т. 94, № 2, с. 211–218.

[26] Galaktionov V.A. Quasilinear heat equations with first-order sign-invariants and new explicit solutions. *Nonlinear Analys., Theory, Meth. and Applications*, 1994, vol. 23, pp. 1595–1621.

[27] Ibragimov N.H., ed. *CRC handbook of Lie group analysis of differential equations*. *Vol. 1. Symmetries, exact solutions and conservation laws*. Boca Raton, CRC Press, 1994.

[28] Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И. *Методы решения нелинейных уравнений математической физики*. Москва, Физматлит, 2005.

[29] Galaktionov V.A., Svirshchevskii S.R. *Exact solutions and invariant subspaces of nonlinear partial differential equations in mechanics and physics*. Boca Raton, Chapman & Hall/CRC Press, 2006.

[30] Polyanin A.D., Zaitsev V.F. *Handbook of nonlinear partial differential equations*. 2nd ed. Boca Raton, Chapman & Hall/CRC Press, 2012.

[31] Polyanin A.D., Zhurov A.I. Exact separable solutions of delay reaction-diffusion equations and other nonlinear partial functional-differential equations. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2014, vol. 19, pp. 409–416.

[32] Polyanin A.D., Zhurov A.I. Functional constraints method for constructing exact solutions to delay reaction-diffusion equations and more complex nonlinear equations. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2014, vol. 19, pp. 417–430.
[33] Polyanin A.D., Zhurov A.I. New generalized and functional separable solutions to non-linear delay reaction-diffusion equations. *International J. of Non-Linear Mechanics*, 2014, vol. 59, pp. 16–22.
[34] Polyanin A.D., Zhurov A.I. Non-linear instability and exact solutions to some delay reaction-diffusion systems. *International J. of Non-Linear Mechanics*, 2014, vol. 62, pp. 33–40.
[35] Полянин А.Д., Сорокин В.Г., Вязьмин А.В. Нелинейные реакционно-диффузионные уравнения гиперболического типа с запаздыванием: точные решения, глобальная неустойчивость. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 4, с. 53–73.
[36] Polyanin A.D., Sorokin V.G. Nonlinear delay reaction-diffusion equations: Traveling-wave solutions in elementary functions. *Applied Mathematics Letters*, 2015, vol. 46, p. 38–43.
[37] Polyanin A.D., Zhurov A.I. Nonlinear delay reaction-diffusion equations with varying transfer coefficients: Exact methods and new solutions. *Applied Mathematics Letters*, 2014, vol. 37, pp. 43–48.
[38] Беллман Р., Кук К. *Дифференциально-разностные уравнения*. Москва, Мир, 1967.
[39] Hale J. *Functional differential equations*. New York, Springer-Verlag, 1977.
[40] Driver R.D. *Ordinary and delay differential equations*. New York, Springer-Verlag, 1977.
[41] Kolmanovskii V., Myshkis A. *Applied theory of functional differential equations*. Dordrecht, Kluwer, 1992.
[42] Kuang Y. *Delay differential equations with applications in population dynamics*. Boston, Academic Press, 1993.
[43] Smith H.L. *An introduction to delay differential equations with applications to the life sciences*. New York, Springer, 2010.
[44] Tanthanuch J. Symmetry analysis of the nonhomogeneous inviscid Burgers equation with delay. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2012, vol. 17, pp. 4978–4987.
[45] Polyanin A.D., Zhurov A.I. Exact solutions of non-linear differential-difference equations of a viscous fluid with finite relaxation time. *International J. of Non-Linear Mechanics*, 2013, vol. 57, pp. 116–122.
[46] Polyanin A.D., Zhurov A.I. Generalized and functional separable solutions to nonlinear delay Klein — Gordon equations. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2014, vol. 19, no. 8, pp. 2676–2689.
[47] He Q., Kang L., Evans D.J. Convergence and stability of the finite difference scheme for nonlinear parabolic systems with time delay. *Numerical Algorithms*, 1997, vol. 16, no. 2, pp. 129–153.
[48] Pao C.V. Numerical methods for systems of nonlinear parabolic equations with time delays. *J. of Mathematical Analysis and Applications*, 1999, vol. 240, no. 1, pp. 249–279.
[49] Jackiewicza Z., Zubik-Kowal B. Spectral collocation and waveform relaxation methods for nonlinear delay partial differential equations. *Applied Numerical Mathematics*, 2006, vol. 56, no. 3–4, pp. 433–443.
[50] Брацун Д.А., Захаров А.П. К вопросу о численном расчете пространственно-распределенных динамических систем с запаздыванием по времени. *Вестник Пермского университета. Сер. Математика, механика, информатика*, 2012, т. 4, № 12, с. 32–41.

[51] Zhang Q., Zhang C. A compact difference scheme combined with extrapolation techniques for solving a class of neutral delay parabolic differential equations. *Applied Mathematics Letters*, 2013, vol. 26, no. 2, pp. 306–312.
[52] Zhang Q., Zhang C. A new linearized compact multisplitting scheme for the nonlinear convection-reaction-diffusion equations with delay. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2013, vol. 18, no. 12, pp. 3278–3288.
[53] Grundland A.M., Infeld E. A family of nonlinear Klein — Gordon equations and their solutions. *J. Math. Phys*., 1992, vol. 33, pp. 2498–2503.
[54] Miller W., Rubel L.A. Functional separation of variables for Laplace equations in two dimensions. *Physica A*, 1993, vol. 26, pp. 1901–1913.
[55] Zhdanov R.Z. Separation of variables in the nonlinear wave equation. *Physica A*, 1994, vol. 27, pp. L291–L297.
[56] Doyle Ph.W., Vassiliou P.J. Separation of variables for the 1-dimensional nonlinear diffusion equation. *International J. of Non-Linear Mechanics*, 1998, vol. 33, pp. 315–326.
[57] Pucci E., Saccomandi G. Evolution equations, invariant surface conditions and functional separation of variables. *Physica D*: *Nonlinear Phenomena*, 2000, vol. 139, pp. 28–47.
[58] Andreev V.K., Kaptsov O.V., Pukhnachov V.V., Rodionov A.A. *Applications of Group-Theoretical Methods in Hydrodynamics*. Dordrecht, Kluwer, 1998.

Статья поступила в редакцию 22.04.2015

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Полянин А.Д., Журов А.И. Нелинейные реакционно-диффузионные уравнения с запаздыванием и переменными коэффициентами переноса: решения с обобщенным и функциональным разделением переменных. *Математическое моделирование и численные методы*, 2015, № 4 (8), с. 3–37.

Полянин Андрей Дмитриевич родился в 1951 г., окончил МГУ им. М.В. Ломоносова в 1974 г. Д-р физ.-мат. наук, профессор, главный научный сотрудник Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, профессор кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 30 монографий и справочников, 170 статей и трех изобретений. e-mail: polyanin@ipmnet.ru

Журов Алексей Иванович родился в 1967 г., окончил Московский физико-технический институт в 1990 г. Канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН. Автор более 70 научных статей и трех книг. e-mail: zhurov@ipmnet.ru

Nonlinear delay reaction-diffusion equations with varying transfer coefficients: generalized and functional separable solutions

© A.D. Polyanin[1,2,3], A.I. Zhurov[1,4]

[1]Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, 119526, Russia
[2]Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia
[3]National Research Nuclear University of Moscow Engineering Physics Institute, Moscow, 115409, Russia
[4]Cardiff University, Heath Park, Cardiff CF14 4XY, UK

We present a number of new simple separable, generalized separable, and functional separable solutions to one-dimensional nonlinear delay reaction-diffusion equations with varying transfer coefficients of the form $u_t = [G(u)u_x]_x + F(u,w)$, *where* $w = u(x,t)$ *and* $w = u(x,t-\tau)$, *with* τ *denoting the delay time. All of the equations considered contain one, two, or three arbitrary functions of a single argument. The generalized separable solutions are sought in the form* $u = \sum_{n=1}^{N} \varphi_n(x)\psi_n(t)$, *with* $\varphi_n(x)$ *and* $\psi_n(t)$ *to be determined in the analysis using a new modification of the functional constraints method. Some of the results are extended to nonlinear delay reaction-diffusion equations with time-varying delay* $\tau = \tau(t)$. *We also present exact solutions to more complex, three-dimensional delay reaction-diffusion equations of the form* $u_t = \mathrm{div}[G(u)\nabla u] + F(u,w)$. *Most of the solutions obtained involve free parameters, so they may be suitable for solving certain problems as well as testing approximate analytical and numerical methods for non-linear delay PDEs.*

Keywords: *delay reaction-diffusion equations, varying transfer coefficients, exact solutions, generalized separable solutions, functional separable solutions, time-varying delay, nonlinear delay partial differential equations.*

REFERENCES

[1] Wu J. *Theory and applications of partial functional differential equations*. New York, Springer-Verlag, 1996.
[2] Smith H.L., Zhao X.-Q. Global asymptotic stability of travelling waves in delayed reaction-diffusion equations. *SIAM J. Math. Anal*., 2000, no. 31, pp. 514–534.
[3] Wu J., Zou X. Traveling wave fronts of reaction-diffusion systems with delay. *J. Dynamics and Differential Equations*, 2001, vol. 13, no. 3, pp. 651–687.
[4] Huang J., Zou X. Traveling wave fronts in diffusive and cooperative Lotka — Volterra system with delays. *J. Math. Anal. Appl*., 2002, vol. 271, pp. 455–466.
[5] Faria T., Trofimchuk S. Nonmonotone travelling waves in a single species reaction-diffusion equation with delay. *J. Differential Equations*, 2006, vol. 228, pp. 357–376.
[6] Trofimchuk E., Tkachenko V., Trofimchuk S. Slowly oscillating wave solutions of a single species reaction–diffusion equation with delay. *J. Differential Equations*, 2008, vol. 245, pp. 2307–2332.
[7] Mei M., So J., Li M., Shen S. Asymptotic stability of travelling waves for Nicholson's blowflies equation with diffusion. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 2004, vol. 134, pp. 579–594.

[8] Gourley S.A., Kuan Y. Wavefronts and global stability in time-delayed population model with stage structure. *Proc. Roy. Soc. London A*, 2003, vol. 459, pp. 1563–1579.

[9] Pao C. Global asymptotic stability of Lotka — Volterra competition systems with diffusion and time delays. *Nonlinear Anal.: Real World Appl.*, 2004, vol. 5, no. 1, pp. 91–104.

[10] Liz E., Pinto M., Tkachenko V., Trofimchuk S. A global stability criterion for a family of delayed population models. *Quart. Appl. Math.*, 2005, vol. 63, pp. 56–70.

[11] Meleshko S.V., Moyo S. On the complete group classification of the reaction-diffusion equation with a delay. *J. Math. Anal. Appl.*, 2008, vol. 338, pp. 448–466.

[12] Polyanin A.D., Zhurov A.I. Exact solutions of linear and non-linear differential-difference heat and diffusion equations with finite relaxation time. *International J. of Non-Linear Mechanics*, 2013, vol. 54, pp. 115–126.

[13] Arik S. Global asymptotic stability of a larger class of neural networks with constant time delay. *Phys. Lett. A*, 2003, vol. 311, pp. 504–511.

[14] Cao J. New results concerning exponential stability and periodic solutions of delayed cellular neural networks. *Phys. Lett. A*, 2003, vol. 307, pp. 136–147.

[15] Cao J., Liang J., Lam J. Exponential stability of high-order bidirectional associative memory neural networks with time delays. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2004, vol. 199, no. 3–4, pp. 425–436.

[16] Lu H.T., Chung F.L., He Z.Y. Some sufficient conditions for global exponential stability of delayed Hopfield neural networks. *Neural Networks*, 2004, vol. 17, pp. 537–544.

[17] Cao J.D., Ho D.W.C. A general framework for global asymptotic stability analysis of delayed neural networks based on LMI approach. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2005, vol. 24, pp. 1317–1329.

[18] Liao X.X., Wang J., Zeng Z. Global asymptotic stability and global exponential stability of delayed cellular neural networks. *IEEE Trans. Circ. Syst II*, 2005, vol. 52, no. 7, pp. 403–409.

[19] Song O.K., Cao J.D. Global exponential stability and existence of periodic solutions in BAM networks with delays and reaction diffusion terms. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2005, vol. 23, no. 2, pp. 421–430.

[20] Zhao H. Exponential stability and periodic oscillatory of bidirectional associative memory neural network involving delays. *Neurocomputing*, 2006, vol. 69, pp. 424–448.

[21] Wang L., Gao Y. Global exponential robust stability of reaction-diffusion interval neural networks with time-varying delays. *Physics Letters A*, 2006, vol. 350, pp. 342–348.

[22] Lu J.G. Global exponential stability and periodicity of reaction-diffusion delayed recurrent neural networks with Dirichlet boundary conditions. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2008, vol. 35, pp. 116–125.

[23] Dorodnitsyn V.A. *Zhurnal vychislitelnoi matematiki i matematicheskoy fiziki – J. of Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1982, vol. 22, no. 6, pp. 1393–1400. (in Russian).

[24] Nucci M.C., Clarkson P.A. The nonclassical method is more general than the direct method for symmetry reductions. An example of the Fitzhugh — Nagumo equation. *Phys. Lett. A*, 1992, vol. 164, pp. 49–56.

[25] Kudryashov N.A. *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika — Theor. & Math. Phys.*, 1993, vol. 94, no. 2, pp. 211–218.

[26] Galaktionov V.A. Quasilinear heat equations with first-order sign-invariants and new explicit solutions. *Nonlinear Analys., Theory, Meth. and Applications*, 1994, vol. 23, pp. 1595–1621.

[27] Ibragimov N.H., ed. *CRC handbook of Lie group analysis of differential equations*. *Vol. 1. Symmetries, exact solutions and conservation laws*. Boca Raton, CRC Press, 1994.
[28] Polyanin A.D., Zaitsev V.F., Zhurov A.I. *Metody resheniya nelineinykh uravneniy matematicheskoy fiziki* [Solution methods for nonlinear equations of mathematical physics and mechanics]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2005 (in Russian).
[29] Galaktionov V.A., Svirshchevskii S.R. *Exact solutions and invariant subspaces of nonlinearpartial differential equations in mechanics and physics*. Boca Raton, Chapman & Hall/CRC Press, 2006.
[30] Polyanin A.D., Zaitsev V.F. *Handbook of nonlinear partial differential equations*. 2nd ed. Boca Raton, Chapman & Hall/CRC Press, 2012.
[31] Polyanin A.D., Zhurov A.I. Exact separable solutions of delay reaction-diffusion equations and other nonlinear partial functional-differential equations. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2014, vol. 19, pp. 409–416.
[32] Polyanin A.D., Zhurov A.I. Functional constraints method for constructing exact solutions to delay reaction-diffusionequations and more complex nonlinear equations. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2014, vol. 19, pp. 417–430.
[33] Polyanin A.D., Zhurov A.I. New generalized and functional separable solutions to non-linear delay reaction-diffusion equations. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2014, vol. 59, pp. 16–22.
[34] Polyanin A.D., Zhurov A.I. Non-linear instability and exact solutions to some delay reaction-diffusion systems. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2014, vol. 62, pp. 33–40.
[35] Polyanin A.D., Sorokin V.G., Vyazmin A.V. *Matematicheskoe modelirovanie I chislennye metody — Mathematical Modelling and Numerical Methods*, 2014, no. 4, p. 53–73.
[36] Polyanin A.D., Sorokin V.G. Nonlinear delay reaction-diffusion equations: Traveling-wave solutions in elementary functions. *Applied Mathematics Letters*, 2015, vol. 46, p. 38–43.
[37] Polyanin A.D., Zhurov A.I. Nonlinear delay reaction-diffusion equations with varying transfer coefficients: Exact methods and new solutions. *Applied Mathematics Letters*, 2014, vol. 37, pp. 43–48.
[38] Bellman R., Cooke K.L. *Differential-difference equations* [in Russian: Bellman R., Cooke K.L. Differentsialno-raznostnye uravneniya. Moscow, Mir Publ., 1967].
[39] Hale J. *Functional differential equations*. New York, Springer-Verlag, 1977.
[40] Driver R.D. *Ordinary and delay differential equations*. New York, Springer-Verlag, 1977.
[41] Kolmanovskii V., Myshkis A. *Applied theory of functional differential equations*. Dordrecht, Kluwer, 1992.
[42] KuangY. *Delay differential equations with applications in population dynamics*. Boston, Academic Press, 1993.
[43] Smith H.L. *An introduction to delay differential equations with applications to the life sciences*. New York, Springer, 2010.
[44] Tanthanuch J. *Symmetry analysis of the nonhomogeneous inviscid Burgers equation with delay. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2012, vol. 17, pp. 4978–4987.
[45] Polyanin A.D., Zhurov A.I. Exact solutions of non-linear differential-difference equations of a viscous fluid with finite relaxation time. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2013, vol. 57, pp. 116–122.

[46] Polyanin A.D., Zhurov A.I. Generalized and functional separable solutions to nonlinear delay Klein — Gordon equations. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2014, vol. 19, no. 8, pp. 2676–2689.

[47] He Q., Kang L., Evans D.J. Convergence and stability of the finite difference scheme for nonlinear parabolic systems with time delay. *Numerical Algorithms*, 1997, vol. 16, no. 2, pp. 129–153.

[48] Pao C.V. Numerical methods for systems of nonlinear parabolic equations with time delays. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1999, vol. 240, no. 1, pp. 249–279.

[49] Jackiewicza Z., Zubik-Kowal B. Spectral collocation and waveform relaxation methods for nonlinear delay partial differential equations. *Applied Numerical Mathematics*, 2006, vol. 56, no. 3–4, pp. 433–443.

[50] Bratsun D. A., Zakharov A. P. *Vestnik Permskogo universiteta. ser. matematika, mekhanika, informatika — Bulletin of Perm University. Series Mathematics, Mechanics, Computer Science*, 2012, vol. 4, no. 12, pp. 32–41 (in Russian).

[51] Zhang Q., Zhang C. A compact difference scheme combined with extrapolation techniques for solving a class of neutral delay parabolic differential equations. *Applied Mathematics Letters*, 2013, vol. 26, no. 2, pp. 306–312.

[52] Zhang Q., Zhang C. A new linearized compact multisplitting scheme for the nonlinear convection-reaction-diffusion equations with delay. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2013, vol. 18, no. 12, pp. 3278–3288.

[53] Grundland A.M., Infeld E. A family of nonlinear Klein — Gordon equations and their solutions. *J. Math. Phys*., 1992, vol. 33, pp. 2498–2503.

[54] Miller W., Rubel L.A. Functional separation of variables for Laplace equations in two dimensions. *Physica A*, 1993, vol. 26, pp. 1901–1913.

[55] Zhdanov R.Z. Separation of variables in the nonlinear wave equation. *Physica A*, 1994, vol. 27, pp. L291–L297.

[56] Doyle Ph.W., Vassiliou P.J. Separation of variables for the 1-dimensional nonlinear diffusion equation. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 1998, vol. 33, pp. 315–326.

[57] Pucci E., Saccomandi G. Evolution equations, invariant surface conditions and functional separation of variables. *Physica D*: *Nonlinear Phenomena*, 2000, vol. 139, pp. 28–47.

[58] Andreev V.K., Kaptsov O.V., Pukhnachov V.V., Rodionov A.A. *Applications of Group-Theoretical Methods in Hydrodynamics*. Dordrecht, Kluwer, 1998.

Polyanin A.D. (b. 1951) graduated from Lomonosov Moscow State University in 1974. Dr. Sci. (Phys. & Math.), Professor, principal researcher at Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Professor of the Department of Applied Mathematics at Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 30 books published in Russia, USA, England, Germany and Bulgaria, as well as over 170 research articles and three patents. Areas of expertise: differential and integral equations, mathematical physics, hydrodynamics, theory of heat and mass transfer, chemical engineering sciences. e-mail: polyanin@ipmnet.ru

Zhurov A.I. (b. 1967) graduated from Moscow Institute of Physics and Technology in 1990. Cand. Sci. (Phys. & Math.), senior researcher at Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences. Author of 3 books and more than 70 research articles. Areas of expertise: mathematical physics, hydrodynamics, theory of heat and mass transfer, computer algebra. e-mail: zhurov@ipmnet.ru