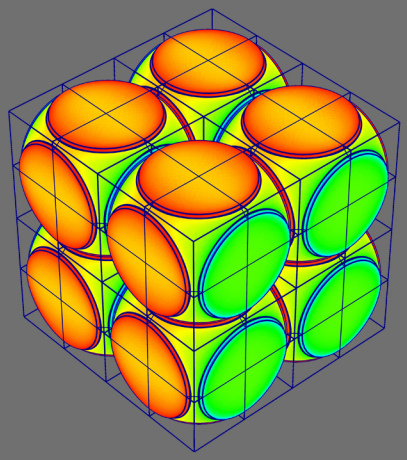
ISSN 2309-3684



# Математическое моделирование и численные методы

Basarab M. Numerical-analytical method of solving two-dimensional problems of natural convection in a closed cavity. Mathematical Modeling and Cотputational Methods, 2014, №1 (1), pp. 18-35

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/6/

Параметры загрузки:
IP: 3.41.188.32
17.11.2026 07:56:00

УДК 519.63:532.5

# Численно-аналитический метод решения двумерных задач естественной конвекции в замкнутых полостях

© М.А. Басараб

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

*Предложен метод численно-аналитического решения системы уравнений в частных производных, описывающих естественную тепловую конвекцию в двумерной полости сложной формы с произвольными граничными условиями (метод PGRM). Новый подход основан на комбинации методов Петрова – Галеркина и R-функций (функций Рвачева) и дает возможность получить априори удовлетворяющие граничным условиям представления функций температуры, вихря и тока в виде разложений по некоторым базисам. Согласованный выбор базисов позволяет естественным образом аппроксимировать краевые условия для функции тока. Нестационарные задачи конвекции решаются путем совместного использования PGRM и метода прямых (метод Роте).*

***Ключевые слова:*** *естественная конвекция, метод R-функций, метод Петрова – Галеркина.*

**Введение.** Решение задач естественной конвекции в объемах произвольного сечения представляет большой интерес благодаря большому числу практических приложений. Современный аппарат вычислительной гидродинамики (англ. CFD — Computational Fluid Dynamics) в основном базируется на использовании конечно-разностных (англ. FDM — Finite-Difference Method) [1–5] и конечно-элементных схем (англ. FEM — Finite-Element Method) [6]. Их основными недостатками являются громоздкое представление сеточного решения в области сложной геометрии и трудности, связанные с аппроксимацией краевых условий. Для функции вихря краевые условия вообще не заданы в явном виде и требуют использования специальных подходов для их постановки (условия Томá или Вудса). Большой обзор современных сеточных технологий в решении задач механики жидкости и газа приведен в [7], где описаны подходы к конструированию структурированных и неструктурированных сеток для областей произвольной геометрии.

Сложности дискретизации двух- и трехмерных задач математической физики можно преодолеть с помощью сравнительно нового класса вычислительных схем: бессеточных методов (англ. meshless или meshfree methods) [8]. Достаточно полный обзор таких подходов применительно к задачам гидродинамики представлен в [9].

Одним из наиболее интуитивно простых и эффективных бессеточных методов решения краевых задач в областях сложной геометрии является метод R-функций (RFM) [10, 11]. В частности, в [12]

было предложено использовать RFM для решения задачи гидродинамики несжимаемой жидкости. В [13] для решения стационарных задач конвекции-диффузии в замкнутых полостях сложной формы предложено совместно использовать проекционный метод Петрова – Галеркина и метод R-функций — PGRM (англ. Petrov–Galerkin–Rvachev Method), что позволяет априори удовлетворять заданным граничным условиям. Согласованный выбор базисных функций дает возможность не только точно удовлетворить краевым условиям задачи для функций температуры, вихря и тока, но и избежать решения уравнения для функции тока, что существенно упрощает схему решения системы уравнений свободной конвекции. В настоящей работе метод PGRM рассматривается с более общих позиций и обобщается на случай решения нестационарных задач конвекции-диффузии. Данный подход проиллюстрирован на примере решения задач тепловой конвекции в двумерной области в терминах функций температуры, вихря и тока. Особое внимание также уделено аспектам численной реализации и возможностям оптимизации процесса вычислений.

**Математическая постановка задачи.** Рассмотрим двумерную стационарную математическую модель свободной конвекции внутри замкнутой полости $\Omega$, заданную в безразмерном виде [4]:

$$\begin{aligned} &U\frac{\partial\theta}{\partial X}+V\frac{\partial\theta}{\partial Y}=\frac{1}{\mathrm{Pr}}\nabla^2\theta+S;\\ &U\frac{\partial\zeta}{\partial X}+V\frac{\partial\zeta}{\partial Y}=\nabla^2\zeta+\mathrm{Gr}\frac{\partial\theta}{\partial X};\\ &\nabla^2\psi=-\zeta,\\ &U=\frac{\partial\psi}{\partial Y},\quad V=-\frac{\partial\psi}{\partial X}. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь оператор Лапласа $\nabla^2\equiv\frac{\partial^2}{\partial X^2}+\frac{\partial^2}{\partial Y^2}$.

В модели (1) используются следующие безразмерные физические и геометрические параметры:

- горизонтальная и вертикальная скорости

$$U=uL/\nu,\quad V=vL/\nu;$$

- горизонтальная и вертикальная координаты

$$X=x/L,\quad Y=y/L;$$

- температура

$$\theta=\frac{T-T_c}{T_h-T_c};$$

- функция внутреннего источника теплоты

$$S = \frac{QL^2}{\nu\rho_0 c_p \left(T_h - T_c\right)};$$

- функция вихря $\zeta$;
- функция тока $\psi$;
- число Прандтля

$$\mathrm{Pr} = c_p \mu/\lambda;$$

- число Грасгофа

$$\mathrm{Gr} = g\beta\left(T_h - T_c\right)L^3/\nu^2,$$

где $u$, $v$ — горизонтальная и вертикальная составляющие скорости, м/с; $\nu$ — кинематическая вязкость, м$^2$/с; $x$, $y$ — горизонтальная и вертикальная координаты, м; $L$ — характерный размер области $\Omega$, м; $T$ — температура, К; $T_h$, $T_c$ — максимальная и минимальная температура, К; $Q$ — объемная мощность источника тепла, Вт/м$^3$; $\rho_0$ — плотность газа, кг/м$^3$; $c_p$ — теплоемкость газа при постоянном давлении, Дж/(кг·К); $\mu$ — динамическая вязкость, Па·с; $\lambda$ — теплопроводность, Вт/(м·К); $g$ — вертикальное ускорение (ускорение свободного падения), м/с$^2$; $\beta$ — температурный коэффициент объемного расширения газа, К$^{-1}$.

Задача (1) есть *модель естественной конвекции по Буссинеску*, в которой не учитывается влияние вязкого и компрессионного нагрева, а все газовые постоянные, кроме плотности, полагаются не зависящими от температуры.

На границе области $\partial\Omega$ зададим смешанные краевые условия:

$$\begin{aligned} &\partial\Omega_1\colon\ \theta = \varphi_1(X,Y);\\ &\partial\Omega_2\colon\ \frac{\partial\theta}{\partial\mathbf{n}} = \varphi_2(X,Y);\\ &\partial\Omega\colon\ \psi = \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}} = U = V = 0, \end{aligned} \qquad (2)$$

где $\varphi_1, \varphi_2$ — известные функции, определенные на участках границы $\partial\Omega_1$, $\partial\Omega_2$ соответственно ($\partial\Omega_1 \bigcup \partial\Omega_2 = \partial\Omega$, $\partial\Omega_1 \bigcap \partial\Omega_2 = \varnothing$); $\mathbf{n}$ — вектор внешней нормали к $\partial\Omega$. Таким образом, на участке $\partial\Omega_1$ задана температура, а на участке $\partial\Omega_2$ — тепловой поток. Для вихревой функции $\zeta$ краевые условия аппроксимируются разложением функции тока в ряд Тейлора в окрестности границы $\partial\Omega$ [1, 4].

**Основные понятия теории R-функций.** Функция $z = f(x, y)$ называется *R-функцией*, если ее знак вполне определяется знаками (но не абсолютными значениями) ее аргументов [10, 11]. Наиболее популярна следующая система R-функций

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= x \wedge y \equiv x + y - \sqrt{x^2 + y^2}, \\ f_2(x, y) &= x \vee y \equiv x + y + \sqrt{x^2 + y^2}, \\ f_3(x) &= \overline{x} \equiv -x. \end{aligned} \tag{3}$$

Эти R-функции соответствуют логическим операциям конъюнкции, дизъюнкции и отрицания, что позволяет строить в неявной форме уравнения границ сложных геометрических объектов.

Пусть область $\Omega = F(\Omega_1, ..., \Omega_n)$ образована путем теоретико-множественной комбинации (объединение и пересечение) простых областей $\Omega_i$, каждая из которых аналитически определяется неравенством $\omega_i(x, y) > 0$. Если $f$ есть R-функция, соответствующая булевой функции $F$, то неравенство, описывающее сложную область, имеет вид $f(\omega_1, ..., \omega_n) > 0$. За пределами $\Omega$ функция $f(\omega_1, ..., \omega_n) < 0$, а уравнение $f(\omega_1, ..., \omega_n) = 0$ определяет границу $\partial\Omega$ области $\Omega$.

Найдем решение операторного уравнения

$$Au = f \tag{4}$$

внутри ограниченной области $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ при заданных краевых условиях

$$Lu\,|_{\partial\Omega} = \varphi \tag{5}$$

на границе $\partial\Omega$.

Так называемая *общая структура решения* краевой задачи определяется выражением

$$u = B_L(\Phi, \omega, \{\omega_i\}) + S_L(\omega, \{\omega_i\}, \varphi), \tag{6}$$

точно удовлетворяющим граничным условиям независимо от выбора неопределенной компоненты $\Phi(x, y)$. Здесь $B_L$, $S_L$ — операторы, зависящие от геометрии области $\Omega$ и участков ее границы $\partial\Omega_i$. Структура решения осуществляет так называемое продолжение граничных условий внутрь области.

Неопределенная компонента структуры (6) представляется в виде ряда

$$\Phi = \sum_{n=1}^{N} c_n g_n(x, y), \tag{7}$$

где $g_n(x, y)$ — элементы полной системы координатных функций (алгебраические или тригонометрические полиномы, сплайны и др.); $c_n$ — неопределенные коэффициенты, которые находятся, например, методом Галеркина, после подстановки структуры (6) в левую часть (4).

Краевое условие 1-го рода (5) ($L$ — тождественный оператор)

$$u\big|_{\partial\Omega} = \varphi$$

точно удовлетворяется структурой Дирихле

$$u = \omega\Phi + \varphi.$$

Рассмотрим удовлетворение краевым условиям дифференциального типа и смешанным условиям на разных участках границы. Функция $\omega_n$ *нормализована* в области $\Omega$, если

$$\omega_n\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \left.\frac{\partial\omega_n}{\partial\mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega} = -1. \tag{8}$$

Функция $\omega(x, y)$, образованная из нормализованных функций $\omega_i(x, y)$ с помощью R-операций (3), будет также нормализована в регулярных точках границы. С учетом этого нормализованные в регулярных точках границы уравнения сложных областей могут быть получены из нормализованных уравнений границ простейших геометрических объектов в $\mathbf{R}^2$, а также путем преобразований подобия, переноса и поворота координат.

Нормализованное уравнение дает возможность строить пучки функций, нормальная производная которых на границе области принимает заданные значения. Для этого вводится линейный дифференциальный оператор с переменными коэффициентами, зависящими от формы области:

$$D \equiv \frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial\omega}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}. \tag{9}$$

Для произвольной достаточно гладкой функции $f$ на границе области $\partial\Omega$ оператор $D$ превращается в оператор дифференцирования по внешней нормали:

$$Df\big|_{\partial\Omega} = -\left.\frac{\partial f}{\partial\mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega}.$$

Аналоги оператора $D$ для участков $\partial\Omega_i$ границы $\partial\Omega$ обозначим через

$$D^{(i)} \equiv \frac{\partial\omega_i}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial\omega_i}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}.$$

Некоторые типы краевых условий и структуры решения соответствующих краевых задач приведены в таблице (для краевых условий типа Неймана функции $\omega(x, y)$ и $\omega_2(x, y)$ нормализованы).

**Структуры решения для основных типов краевых условий**

| Краевое условие | Структура решения |
|---|---|
| 1-го рода (Дирихле)<br>$u\big\|_{\partial\Omega} = \varphi$ | $u = \omega\Phi + \varphi$ |
| Смешанное (Дирихле)<br>$u\big\|_{\partial\Omega_1} = \varphi_1, \quad u\big\|_{\partial\Omega_2} = \varphi_2$ | $u = \omega\Phi + \dfrac{\omega_1\varphi_2 + \omega_2\varphi_1}{\omega_1 + \omega_2}$ |
| 2-го рода (Неймана)<br>$\partial u / \partial\mathbf{n}\big\|_{\partial\Omega} = \varphi$ | $u = (1 - \omega D)\Phi - \omega\varphi$ |
| Смешанное (Дирихле – Неймана)<br>$u\,\big\|_{\partial\Omega_1} = \varphi_1, \quad \partial u / \partial\mathbf{n}\big\|_{\partial\Omega_2} = \varphi_2$ | $u = \left(1 - \dfrac{\omega_1\omega_2}{\omega_1 + \omega_2} D^{(2)}\right)(\omega_1\Phi + \varphi_1) - \dfrac{\omega_1\omega_2}{\omega_1 + \omega_2}\varphi_2$ |
| «Жесткого защемления»<br>$u\,\big\|_{\partial\Omega} = \partial u / \partial\mathbf{n}\big\|_{\partial\Omega} = 0$ | $u = \omega^2\Phi$ |

Заменой

$$u := u - S_L(\omega, \{\omega_i\}, \varphi)$$

предварительно сведем исходную задачу (4), (5) к задаче с однородными краевыми условиями и измененной правой частью $f$:

$$f := f - A\left[S_L(\omega, \{\omega_i\}, \varphi)\right].$$

Тогда в результате подстановки неопределенной компоненты (7) в структуру решения (6), учитывая линейность краевых условий, получаем разложение

$$u = \sum_{n=1}^{N} c_n \chi_n, \tag{10}$$

где $\chi_n = B_L(g_n, \omega, \{\omega_i\})$ — функции базиса $g_n$, трансформированного компонентой структуры $B_L$.

Неопределенные компоненты $c_n$ разложения (10) могут быть найдены одним из вариационных или проекционных методов: коллокации, Бубнова – Галеркина, наименьших квадратов и др.

**Стационарная задача конвекции-диффузии.** Суть метода рассмотрим для случая, когда на всех участках границы $\partial\Omega$ для функции температуры заданы краевые условия Дирихле:

$$\partial\Omega:\ \theta=\varphi;\quad \psi=\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}=U=V=0. \tag{11}$$

В первую очередь заменой

$$\theta:=\theta-\varphi$$

сведем задачу (1) с неоднородными условиями (11) к *задаче с однородными краевыми условиями*:

$$\begin{aligned}
&U\frac{\partial\theta}{\partial X}+V\frac{\partial\theta}{\partial Y}=\frac{1}{\mathrm{Pr}}\nabla^2\theta+\left(\frac{1}{\mathrm{Pr}}\nabla^2\varphi-U\frac{\partial\varphi}{\partial X}-V\frac{\partial\varphi}{\partial Y}\right);\\
&U\frac{\partial\zeta}{\partial X}+V\frac{\partial\zeta}{\partial Y}=\nabla^2\zeta+\mathrm{Gr}\left(\frac{\partial\theta}{\partial X}+\frac{\partial\varphi}{\partial X}\right);\\
&\nabla^2\psi=-\zeta,\\
&U=\frac{\partial\psi}{\partial Y},\quad V=-\frac{\partial\psi}{\partial X};
\end{aligned} \tag{12}$$

$$\partial\Omega:\quad \theta=\psi=\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}=U=V=0. \tag{13}$$

Общий вид итерационного процесса решения системы (12), (13) следующий:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\mathrm{Pr}}\nabla^2\theta^{(k)}=U^{(k-1)}\frac{\partial\theta^{(k-1)}}{\partial X}+V^{(k-1)}\frac{\partial\theta^{(k-1)}}{\partial Y}-\\
&\qquad-\left(\frac{1}{\mathrm{Pr}}\nabla^2\varphi-U^{(k-1)}\frac{\partial\varphi}{\partial X}-V^{(k-1)}\frac{\partial\varphi}{\partial Y}\right);\\
&\nabla^2\zeta^{(k)}=U^{(k-1)}\frac{\partial\zeta^{(k-1)}}{\partial X}+V^{(k-1)}\frac{\partial\zeta^{(k-1)}}{\partial Y}-\mathrm{Gr}\left(\frac{\partial\theta^{(k)}}{\partial X}+\frac{\partial\varphi}{\partial X}\right);\\
&\nabla^2\psi^{(k)}=-\zeta^{(k)},\\
&U^{(k)}=\frac{\partial\psi^{(k)}}{\partial Y},\quad V^{(k)}=-\frac{\partial\psi^{(k)}}{\partial X}\quad (k=1,\,2,\,\ldots).
\end{aligned} \tag{14}$$

Здесь известные либо уже вычисленные величины записаны в правой части выражений.

Процесс прекращается при выполнении критерия сходимости, например, когда

$$\max_{(X,Y)\in\Omega}\frac{|\theta^{(k+1)}-\theta^{(k)}|}{|\theta^{(k)}|}\le\varepsilon_1,\quad \max_{(X,Y)\in\Omega}\frac{|\zeta^{(k+1)}-\zeta^{(k)}|}{|\zeta^{(k)}|}\le\varepsilon_2,$$

$$\max_{(X,Y)\in\Omega}\frac{|\psi^{(k+1)}-\psi^{(k)}|}{|\psi^{(k)}|}\le\varepsilon_3.$$

На первой итерации ($k=1$) необходимо задать начальные приближения $\theta^{(0)}$, $U^{(0)}$, $V^{(0)}$. Если положить $\zeta^{(0)}=\psi^{(0)}=U^{(0)}=V^{(0)}=0$, то получим *решение задачи стационарной теплопроводности в отсутствие конвекции*.

Будем искать приближение функции $\theta^{(k)}$ на каждом временно́м шаге в виде обобщенного ряда Фурье (конечного) по функциям некоторого базиса $\{f_n\}_{n=1}^N$ с неопределенными коэффициентами $\mathbf{c}^{(k)}=$ $=(c_1^{(k)}, c_2^{(k)}, ..., c_N^{(k)})$:

$$\theta^{(k)} \approx \sum_{n=1}^{N} c_n^{(k)} f_n. \tag{15}$$

Помимо обычных ограничений на дифференцируемость потребуем от всех функций $f_n$ удовлетворения однородному краевому условию

$$\partial\Omega:\ f_n=0, \quad n=1, ..., N. \tag{16}$$

Из (16) следует, что аппроксимация (15) тоже будет точно удовлетворять краевому условию (13).

Нахождение базиса, удовлетворяющего условиям (13), может быть реализовано с помощью приема, предложенного Л.В. Канторовичем [14]. Для этого выберем некоторую систему функций $\{\chi_n\}_{n=1}^N$, полную в подходящем функциональном пространстве (например, $W_2^1(\Omega)$ либо $L_2(\Omega)$). Это могут быть алгебраические или тригонометрические полиномы, сплайны и др.

Пусть известна функция $\omega(X,Y)$ границы $\partial\Omega$ замкнутой ограниченной области $\Omega$, причем $\omega>0$ внутри $\Omega$; $\omega<0$ в $\mathbf{R}^2\setminus\bar{\Omega}$; $\omega=0$ и $|\nabla\omega|^2\neq 0$ на $\partial\Omega$. Общий метод построения таких выражений для произвольных областей основан на теории R-функций, разработанной В.Л. Рвачевым [10, 11]. При этом возможно получение функции $\omega$, обладающей достаточно высокой степенью гладкости на всей числовой плоскости за исключением, быть может, конечного числа нерегулярных точек $\partial\Omega$.

Составим далее систему функций

$$f_n \equiv \omega\chi_n, \quad n=1, ..., N. \tag{17}$$

Очевидно, что в силу свойств функции $\omega$ базис (17) удовлетворяет условиям (16). Строго говоря, полнота системы (17) обоснована для случая невырождающегося положительно определенного эллиптического оператора, однако на практике этот базис применим и для решения более широкого класса задач.

С учетом (17) разложение (15) примет вид

$$\theta^{(k)} \approx \sum_{n=1}^{N} c_n^{(k)} \omega \chi_n. \qquad (18)$$

Для учета условий (13) функцию тока запишем через базис $\{\omega^2\chi_n\}_{n=1}^N$ с неопределенными коэффициентами $\mathbf{e}^{(k)}=\left(e_1^{(k)},\ e_2^{(k)}, ..., e_N^{(k)}\right)$:

$$\psi^{(k)} \approx \sum_{n=1}^{N} e_n^{(k)} \omega^2 \chi_n. \qquad (19)$$

По построению структура решений (18), (19) строго удовлетворяет однородным условиям (13) при произвольном выборе исходного базиса $\{\chi_n\}_{n=1}^N$. Компоненты скорости вычисляются следующим образом:

$$U^{(k)} = \sum_{n=1}^{N} e_n^{(k)} \frac{\partial(\omega^2\chi_n)}{\partial Y}, \quad V^{(k)} = -\sum_{n=1}^{N} e_n^{(k)} \frac{\partial(\omega^2\chi_n)}{\partial X}. \qquad (20)$$

Подставляя (19) в левую часть третьего уравнения системы (12), получаем выражение для вихревой функции с неопределенными коэффициентами $\mathbf{d}^{(k)} = \left(d_1^{(k)},\ d_2^{(k)}, ..., d_N^{(k)}\right)$:

$$\zeta^{(k)} \approx \sum_{n=1}^{N} d_n^{(k)} \nabla^2(\omega^2\chi_n), \qquad (21)$$

позволяющее согласовать ее краевые условия с зависимостью от функции тока. Таким образом, получено представление функции вихря по базисным функциям $\nabla^2(\omega^2\chi_n)$.

Из третьего уравнения системы (12) и формул (19), (21) имеем

$$e_n^{(k)} = -d_n^{(k)}, \quad n = 1, ..., N. \qquad (22)$$

Таким образом, достаточно рекуррентно решать только первые два уравнения системы (14) и находить коэффициенты $c_n^{(k)}$, $d_n^{(k)}$.

Рассмотрим сначала нахождение неопределенных компонент $c_n^{(k)}$ методом Бубнова – Галеркина [6]. Подставив (18) в первое уравнение (14), получим невязку

$$\delta^{(k)} = \frac{1}{\mathrm{Pr}} \sum_{n=1}^{N} c_n^{(k)} \nabla^2(\omega\chi_n) - F^{(k)}, \qquad (23)$$

где

$$F^{(k)} = U^{(k-1)} \frac{\partial \theta^{(k-1)}}{\partial X} + V^{(k-1)} \frac{\partial \theta^{(k-1)}}{\partial Y} - \left( \frac{1}{\mathrm{Pr}} \nabla^2 \varphi - U^{(k-1)} \frac{\partial \varphi}{\partial X} - V^{(k-1)} \frac{\partial \varphi}{\partial Y} \right).$$

Необходимо выбрать коэффициенты $c_n^{(k)}$ так, чтобы получить невязку, наименее отклоняющуюся от нуля. В методе Бубнова – Галеркина требуется ортогональность невязки в $L_2(\Omega)$ функциям базиса $\{f_n\}_{n=1}^N$:

$$\int_\Omega \delta^{(k)} \omega \chi_m \, dX \, dY = 0, \quad m = 1, \ldots, N. \tag{24}$$

Подставив (23) в (24), получим систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно вектора неизвестных коэффициентов $\mathbf{c}^{(k)}$:

$$\mathbf{A}\mathbf{c}^{(k)} = \mathbf{b}^{(k-1)}, \tag{25}$$

где элементы матрицы $\mathbf{A}$ и вектора $\mathbf{b}^{(k-1)}$ определяются следующим образом:

$$\begin{gathered} a_{m,n} = \frac{1}{\mathrm{Pr}} \int_\Omega \omega \chi_m \nabla^2 (\omega \chi_n) \, dX \, dY = -\frac{1}{\mathrm{Pr}} \int_\Omega \nabla(\omega \chi_m) \nabla(\omega \chi_n) \, dX \, dY; \\ b_m^{(k-1)} = \int_\Omega \omega \chi_m F^{(k)} dX \, dY, \\ m, \, n = 1, \ldots, N. \end{gathered} \tag{26}$$

Элементы $a_{m,n}$ вычисляются однократно, а развернутое выражение для $b_m^{(k-1)}$ имеет вид

$$b_m^{(k-1)} = \sum_{r=1}^N c_r^{(k-1)} \sum_{s=1}^N e_s^{(k-1)} w_{msr}^{\mathrm{I}} + \sum_{s=1}^N e_s^{(k-1)} w_{ms}^{\mathrm{II}} + w_m^{\mathrm{III}}.$$

Здесь

$$w_{msr}^{\mathrm{I}} = \int_\Omega \omega \chi_m \left[ \nabla(\omega \chi_r) \mathbf{G} \nabla(\omega^2 \chi_s) \right] dX \, dY;$$

$$w_{ms}^{\mathrm{II}} = \int_\Omega \omega \chi_m \left[ \nabla \varphi \mathbf{G} \nabla(\omega^2 \chi_s) \right] dX \, dY;$$

$$w_m^{\mathrm{III}} = -\frac{1}{\mathrm{Pr}} \int_\Omega \omega \chi_m \nabla^2 \varphi \, dX \, dY,$$

где $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ — матрица перестановки.

Перейдем теперь к нахождению коэффициентов разложения (21).

Аналогично предыдущему случаю для второго уравнения системы (14) запишем невязку

$$\tilde{\delta}^{(k)} = \sum_{n=1}^{N} d_n^{(k)} \nabla^2 \nabla^2 (\omega\chi_n) - \tilde{F}^{(k)}, \tag{27}$$

где

$$\tilde{F}^{(k)} = U^{(k-1)} \frac{\partial \zeta^{(k-1)}}{\partial X} + V^{(k-1)} \frac{\partial \zeta^{(k-1)}}{\partial Y} - \mathrm{Gr}\left( \frac{\partial \theta^{(k)}}{\partial X} + \frac{\partial \varphi}{\partial X} \right).$$

Коэффициенты $d_n^{(k)}$ будем определять согласно условиям ортогональности невязки функциям базиса $\{f_n\}_{n=1}^{N}$ (метод Петрова – Галеркина):

$$\int_{\Omega} \tilde{\delta}^{(k)} \omega\chi_m dX\, dY = 0, \quad m = 1, ..., N. \tag{28}$$

В итоге СЛАУ для определения вектора неизвестных коэффициентов $\mathbf{d}^{(k)}$ примет вид

$$\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{d}^{(k)} = \tilde{\mathbf{b}}^{(k-1)}, \tag{29}$$

где элементы матрицы $\tilde{\mathbf{A}}$ и вектора $\tilde{\mathbf{b}}^{(k-1)}$ определяются следующим образом:

$$\begin{gathered} \tilde{a}_{m,n} = \int_{\Omega} \omega\chi_m \nabla^2 \nabla^2 (\omega\chi_n)\, dX\, dY; \\ \tilde{b}_m^{(k-1)} = \int_{\Omega} \omega\chi_m \tilde{F}^{(k)} dX\, dY, \\ m, n = 1, ..., N. \end{gathered} \tag{30}$$

В развернутом виде

$$\tilde{b}_m^{(k-1)} = \sum_{r=1}^{N} d_r^{(k-1)} \sum_{s=1}^{N} e_s^{(k-1)} \tilde{w}_{msr}^{\mathrm{I}} + \sum_{s=1}^{N} c_s^{(k)} \tilde{w}_{ms}^{\mathrm{II}} + \tilde{w}_m^{\mathrm{III}},$$

где

$$\tilde{w}_{msr}^{\mathrm{I}} = \int_{\Omega} \omega\chi_m \left[ \nabla\left( \nabla^2 (\omega\chi_r) \right) \mathbf{G} \nabla(\omega^2 \chi_s) \right] dX\, dY;$$

$$\tilde{w}_{ms}^{\mathrm{II}} = -\mathrm{Gr} \int_{\Omega} \omega\chi_m \frac{\partial(\omega\chi_s)}{\partial X} dX\, dY;$$

$$\tilde{w}_m^{\mathrm{III}} = -\mathrm{Gr} \int_{\Omega} \omega\chi_m \frac{\partial \varphi}{\partial X} dX\, dY.$$

Интегралы в выражениях (26), (30) можно вычислить с помощью двумерных квадратур, а дифференциальные операторы в подынтегральных выражениях — аппроксимировать конечно-разностными аналогами.

Если заданы краевые условия общего вида (2), отличные от (11),

при конструировании базиса следует воспользоваться другими структурами решения (см. таблицу).

Интенсивность теплообмена в точке участка границы $\partial\Omega$ вычисляется с помощью локального числа Нуссельта

$$\mathrm{Nu}_0 = -\left.\frac{\partial\theta}{\partial\mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega}.$$

Учитывая формулу (9), можно записать, что

$$\mathrm{Nu}_0 = D\theta\big|_{\partial\Omega} = \left.\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{\partial\theta}{\partial x} + \frac{\partial\omega}{\partial y}\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)\right|_{\partial\Omega}.$$

Полный поток теплоты через участок границы $\Gamma$

$$\overline{\mathrm{Nu}} = \frac{1}{l}\int_{\Gamma}\mathrm{Nu}_0\, ds,$$

где $l$ — длина участка $\Gamma$.

**Нестационарная задача конвекции-диффузии.** Аналогично [15], где задача нестационарной теплопроводности решалась методом R-функций, для решения нестационарной задачи конвекции-диффузии приме́ним метод Роте в комбинации с PGRM.

Пусть вместо (1) на интервале времени $\tau\in[0,\bar{\tau}]$ ($\tau = t\nu/L^2$ — безразмерное время, где $t$ — время в секундах) имеем нестационарную задачу конвекции-диффузии:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\theta}{\partial\tau} + U\frac{\partial\theta}{\partial X} + V\frac{\partial\theta}{\partial Y} = \frac{1}{\mathrm{Pr}}\nabla^2\theta + S;\\
&\frac{\partial\zeta}{\partial\tau} + U\frac{\partial\zeta}{\partial X} + V\frac{\partial\zeta}{\partial Y} = \nabla^2\zeta + \mathrm{Gr}\frac{\partial\theta}{\partial X};\\
&\nabla^2\psi = -\zeta,\\
&U = \frac{\partial\psi}{\partial Y},\quad V = -\frac{\partial\psi}{\partial X}.
\end{aligned} \tag{31}$$

Введем разбиение интервала $[0,\bar{\tau}]$ с шагом $\Delta\tau = \tau_{k+1} - \tau_k$ $(k = 0, 1, ..., K)$ и заменим производные по времени в (31) конечно-разностными отношениями

$$\frac{\partial\theta^{(k)}}{\partial\tau} = \frac{\theta^{(k)} - \theta^{(k-1)}}{\Delta\tau} + O(\Delta\tau),\qquad \frac{\partial\zeta^{(k)}}{\partial\tau} = \frac{\zeta^{(k)} - \zeta^{(k-1)}}{\Delta\tau} + O(\Delta\tau),$$

где $\theta^{(k)} = \theta(X, Y, \tau_k)$; $\zeta^{(k)} = \zeta(X, Y, \tau_k)$.

Исходная задача (31) будет сведена к последовательности задач

$$\frac{1}{\mathrm{Pr}}\nabla^2\theta^{(k)}-\frac{\theta^{(k)}}{\Delta\tau}=U^{(k-1)}\frac{\partial\theta^{(k-1)}}{\partial X}+V^{(k-1)}\frac{\partial\theta^{(k-1)}}{\partial Y}-\frac{\theta^{(k-1)}}{\Delta\tau}-S^{(k-1)};$$
$$\nabla^2\zeta^{(k)}-\frac{\zeta^{(k)}}{\Delta\tau}=U^{(k-1)}\frac{\partial\zeta^{(k-1)}}{\partial X}+V^{(k-1)}\frac{\partial\zeta^{(k-1)}}{\partial Y}-\mathrm{Gr}\frac{\partial\theta^{(k)}}{\partial X}-\frac{\zeta^{(k-1)}}{\Delta\tau};\qquad(32)$$
$$\nabla^2\psi^{(k)}=-\zeta^{(k)},$$
$$U^{(k)}=\frac{\partial\psi^{(k)}}{\partial Y},\quad V^{(k)}=-\frac{\partial\psi^{(k)}}{\partial X}\qquad(k=1,\,2,\,...),$$

которые пошагово решаются описанным ранее методом PGRM. При $k=1$ используются начальные условия

$$\theta|_{\tau=0}=\theta^{(0)},\ U|_{\tau=0}=U^{(0)},\ V|_{\tau=0}=V^{(0)},$$
$$\zeta|_{\tau=0}=\zeta^{(0)},\ \psi|_{\tau=0}=\psi^{(0)}.\qquad(33)$$

**Численный эксперимент.** Рассмотрим задачу конвекции в прямоугольной полости, приведенной на рис. 1 [16]. Краевые условия:

$$X=-\frac{1}{2},\ Y\in\left(-\frac{H}{L},\frac{H}{L}\right):\ \theta=1,\quad \psi=\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}=U=V=0;$$
$$X=\frac{1}{2},\ Y\in\left(-\frac{H}{L},\frac{H}{L}\right):\ \theta=\psi=\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}=U=V=0;\qquad(34)$$
$$Y=\pm\frac{H}{L},\ X\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right):\ \frac{\partial\theta}{\partial\mathbf{n}}=\psi=\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}=U=V=0.$$

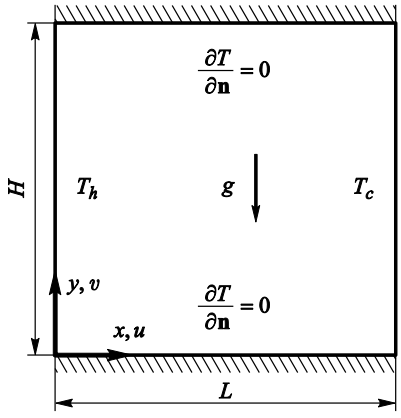



**Рис. 1.** Задача конвекции в прямоугольной полости

С помощью обобщенной формулы Лагранжа и замены безразмерной функции температуры $\theta$ приведем эту задачу к *задаче с однородными краевыми условиями относительно* $\theta$:

$$\theta:=\theta+f=\theta+\left(\frac{1}{2}-X\right),$$

где

$$f=\frac{\omega_c}{\omega_h+\omega_c}\ \left(\omega_h=\frac{1}{2}+X,\ \omega_c=\frac{1}{2}-X\right).$$

Вместо (1) получим систему (12) с краевыми условиями

$$X = \pm\frac{1}{2},\ Y \in \left(-\frac{H}{L}, \frac{H}{L}\right):\quad \theta = \psi = \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}} = U = V = 0;$$
$$Y = \pm\frac{H}{L},\ X \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right):\quad \frac{\partial\theta}{\partial\mathbf{n}} = \psi = \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}} = U = V = 0. \qquad (35)$$

Общая структура решения для функции безразмерной температуры имеет вид

$$\theta = \sum_{n=1}^{N} c_n \chi_n,\ \chi_n = \omega_1 - \frac{\omega_1\omega_2}{\omega_1 + \omega_2}\left(\frac{\partial(\omega_1 g_n)}{\partial X}\frac{\partial\omega_2}{\partial X} + \frac{\partial(\omega_1 g_n)}{\partial Y}\frac{\partial\omega_2}{\partial Y}\right), \qquad (36)$$

где

$$\omega_1 = \frac{1}{4} - X^2;\quad \omega_2 = \frac{L}{H}\left(\frac{H^2}{L^2} - Y^2\right).$$

Структуры решения для функций тока и вихря запишем соответственно в виде (19), (21) с учетом того, что $\omega = \omega_1 \wedge \omega_2$.

На рис. 2, *а* и *б* показаны линии уровня температуры соответственно для случаев стационарного теплопереноса при отсутствии и при наличии конвекции в квадратной полости $(L = H)$, хорошо согласующиеся с результатами [16], что также подтверждалось сравнением значений числа Нуссельта Nu в различных сечениях. Численное интегрирование проводилось методом трапеций на сетке 64 × 64 узла.

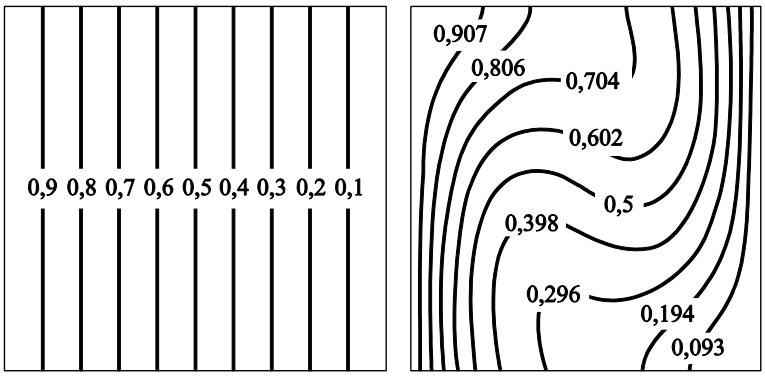



**Рис. 2.** Изолинии температуры:
*а* — стационарная теплопроводность; *б* — стационарная конвекция (число Рэлея $\mathrm{Re} = 1\cdot10^4$)

На рис. 3 приведены последовательные решения нестационарной задачи конвекции-диффузии, сходящиеся к решению стационарной задачи. Шаг по безразмерному времени $\Delta\tau = 3{,}2\cdot10^{-3}$.

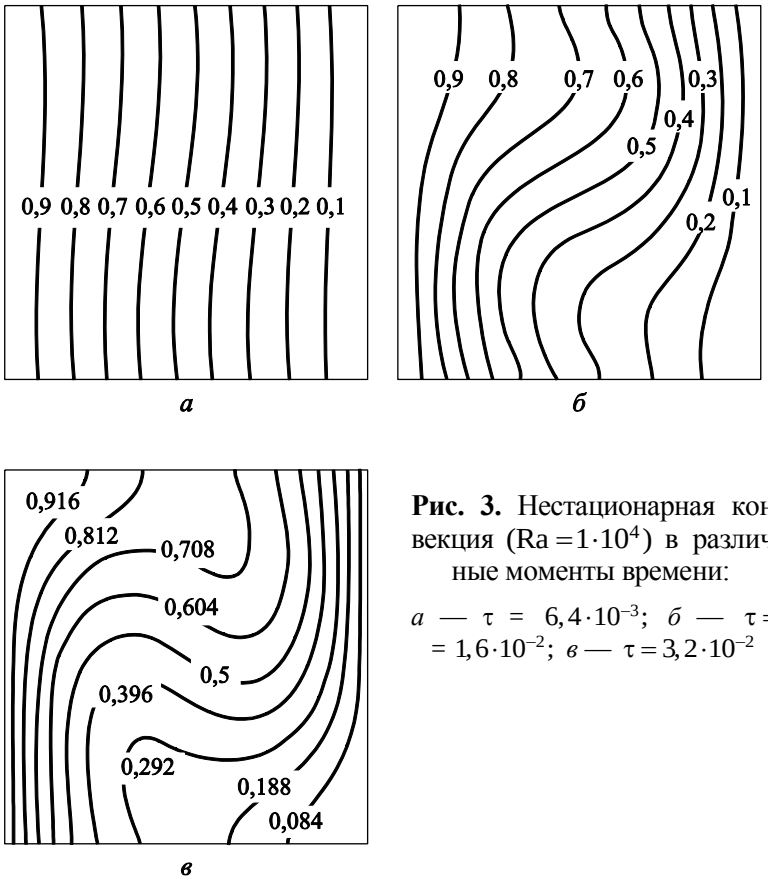



**Рис. 3.** Нестационарная конвекция ($\mathrm{Ra} = 1 \cdot 10^4$) в различные моменты времени:

*а* — $\tau = 6,4 \cdot 10^{-3}$; *б* — $\tau = 1,6 \cdot 10^{-2}$; *в* — $\tau = 3,2 \cdot 10^{-2}$

**Заключение.** Результаты численных экспериментов подтверждают эффективность метода R-функций в комбинации с методом Петрова – Галеркина (PGRM) при решении стационарных и нестационарных задач свободной конвекции в полостях произвольной геометрии с различными краевыми условиями. Применение полуаналитического метода R-функций позволяет получить решение задачи конвекции-диффузии с приемлемой точностью, априори удовлетворяющее граничным условиям. В описанной форме метод дает результаты, хорошо согласующиеся с экспериментальными данными и решениями тестовых задач при небольших числах Рэлея ($\mathrm{Ra} < 1 \cdot 10^6$). Поэтому, как и многие классические методы, PGRM в перспективе требует своего развития на случай $\mathrm{Ra} > 1 \cdot 10^6$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Роуч П. *Вычислительная гидродинамика*. Москва, Мир, 1980, 618 с.

[2] Патанкар С.В. *Численное решение задач теплопроводности и конвективного теплообмена при течении в каналах*. Москва, Изд-во МЭИ, 2003, 312 с.

[3] Самарский А.А., Вабищевич П.Н. *Численные методы решения задач конвекции-диффузии*. Москва, УРСС, 2009, 248 с.

[4] Ши Д. *Численные методы в задачах теплообмена*. Москва, Мир, 1988, 544 с.

[5] De Vahl Davis G. Finite Difference Methods for Natural and Mixed Convection in Enclosures. Tien C.L., Carey V.P., Ferrell J.K (eds.). *Heat Transfer*. Washington: Hemisphere Publ. Corp., 1986, vol. 1, pp. 101–109.

[6] Флетчер К. *Численные методы на основе метода Галеркина*. Москва, Мир, 1988, 352 с.

[7] Волков К.Н., Емельянов В.Н. *Вычислительные технологии в задачах механики жидкости и газа.* Москва, Физматлит, 2012, 468 с.

[8] Liu G.R. *Mesh Free Methods: Moving Beyond the Finite Element Method*. CRC Press, 2009, 792 p.

[9] Katz A.J. *Meshless Methods for Computational Fluid Dynamics*. Ph. D Thesis. Dept. of Aeronautics and Astronautics, Stanford University, 2009, 131 p.

[10] Рвачев В.Л. *Теория R-функций и некоторые ее приложения*. Киев: Наукова думка, 1982, 552 с.

[11] Кравченко В.Ф., Басараб М.А. *Булева алгебра и методы аппроксимации в краевых задачах электродинамики*. Москва, Физматлит, 2004, 308 с.

[12] Tsukanov I., Shapiro V., Zhang S. A Meshfree Method for Incompressible Fluid Dynamics Problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2003, vol. 58, pp.127–158. doi: 10.1002/nme.760.

[13] Басараб М.А. Решение стационарных двумерных задач естественной конвекции в замкнутых полостях методом R-функций. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, № 11(23). URL: http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/hidden/1071.html

[14] Канторович Л.В., Крылов В.И. *Приближенные методы высшего анализа*. Москва, Ленинград, Физматлит, 1962, 708 с.

[15] Басараб М.А., Кравченко В.Ф., Матвеев В.А. *Математическое моделирование физических процессов в гироскопии*. Москва, Радиотехника, 2005, 176 с.

[16] De Vahl Davis G. Natural Convection of Air in a Square Cavity: A Benchmark Numerical Solution. *International Journal of Numerical Methods in Fluids,* 1983, vol. 3, pp. 249–264.

Статья поступила в редакцию 06.03.2014

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Басараб М.А. Численно-аналитический метод решения двумерных задач естественной конвекции в замкнутых полостях. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 1, с. 18–35.

**Басараб Михаил Алексеевич** окончил Харьковский авиационный институт им. Н.Е. Жуковского в 1993 г. Д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры «Информационная безопасность» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор 5 монографий и более 100 научных работ в области прикладной математики, информатики, цифровой обработки сигналов, радиофизики. e-mail: bmic@mail.ru

# Numerical-analytical method of solving two-dimensional problems of natural convection in a closed cavity

© M.A. Basarab

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

*The author offers a method (PGRM) of numerical-analytical solving the equation system in partial derivatives describing the natural thermal convection in the complicated-shaped dimensional cavity with arbitrary boundary conditions. The new approach is based on a combination of Petrov – Galerkin method and R-functions (Rvachev functions) and makes it possible to obtain temperature, vortex and current functions satisfying the boundary conditions in the form of expansions in certain bases. The coordinated choice of bases provides a natural way to approximate the boundary conditions for the flow function. Unsteady convection problems are solved by combining PGRM and Rothe method.*

***Keywords*****:** *natural convection, the method of R-functions, Petrov – Galerkin method.*

## REFERENCES

[1] Rouch P. *Vychislitel'naya gidrodinamika* [Computational hydrodynamics]. Moscow, Mir Publ., 1980, 618 p.

[2] Patankar S.V. *Chislennoe reshenie zadach teploprovodnosti i konvektivnogo teploobmena pri techenii v kanalakh* [Numerical solution of problems of heat conductivity and convectional heat exchange in the canal current]. Moscow, MPEI Publ., 2003, 312 p.

[3] Samarsky A.A., Vabishchevich P.N. *Chislennye metody resheniya zadach konvektsii-diffuzii* [Numerical methods for solving problems of convection-diffusion]. Moscow, URSS, 2009, 248 p.

[4] Shi D. *Chislennye metody v zadachakh teploobmena* [Numerical methods in problems of heat exchange]. Moscow, Mir Publ., 1988, 544 p.

[5] De Vahl Davis, G. *Finite Difference Methods for Natural and Mixed Convection in Enclosures in Heat Transfer.* C.L. Tien, V.P. Carey and J.K. Ferrell, eds. Washington, Hemisphere Publ. Corp., 1986, vol. 1, pp. 101–109.

[6] Fletcher K. *Chislennye metody na osnove metoda Galerkina* [Numerical methods based on Galerkin method]. Moscow, Mir Publ., 1988, 352 p.

[7] Volkov K.N., Emelyanov V.N. *Vychislitel'nye tekhnologii v zadachakh mekhaniki zhidkosti i gaza* [Computational technologies in problems of liquid and gas mechanics]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2012, 468 p.

[8] Lui G.R. *Mesh Free Methods: Moving Beyond the Finite Element Method.* CRC Press, 2003, 792 p.

[9] Katz A.J. *Meshless Methods for Computational Fluid Dynamics.* Ph.D. Thesis. Dept. of Aeronautics and Astronautics, Stanford University, 2009, 131 p.

[10] Rvachev V.L. *Teoriya R-funktsii i nekotorye ee prilozheniya* [Theory of R-function and some of its applications]. Kiev, Naukova dumka Publ., 1982, 552 p.

[11] Kravchenko V.F., Basarab M.A. *Buleva algebra i metody approksimatsii v kraevykh zadachakh elektrodinamiki* [Boolean algebra and approximation methods in boundary problems of electrodynamics]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2004, 308 p.

[12] Tsukanov I., Shapiro V., Zhang S.A. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2003, vol. 58, pp. 127–158. doi: 10.1002/nme.760.

[13] Basarab M.A. *Inzhenernyi zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering journal: science and innovations*, 2013, no. 11 (23). URL: http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/hidden/1071.html

[14] Kantorovich L.V., Krylov V.I. *Priblizhennye metody vysshego analiza* [Approximate methods of higher analysis]. Moscow–Leningrad, Fizmatlit Publ., 1962, 708 p.

[15] Basarab M.A., Kravchenko V.F., Matveev V.A. *Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov v giroskopii* [Mathematical modeling of physical processes in gyroscopy]. Moscow, Radiotekhnika Publ., 2005, 176 p.

[16] De Vahl Davis G. *International Journal of Numerical Methods in Fluids*, 1983, vol. 3, pp. 249–264.

**Basarab M.A.** graduated from the Kharkov Aviation Institute (Aerospace University) named after N.E. Zhukovsky in 1993. Dr. Sci. (Phys.&Math.), professor of the Department of Information Security at Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 100 publications in the fields of applied mathematics, informatics, digital signal processing, and radiophysics. e-mail: bmic@mail.ru