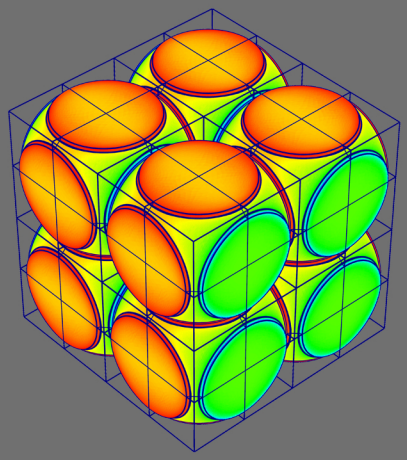
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Владимиров И. Ю., Корчагин Н. Н., Савин А. С.
Гидродинамические реакции в модели циркуляционного обтекания трубопровода придонным морским течением.
Математическое моделирование и численные методы, 2015, №3 (7), с. 41-57

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/56/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.216.187
14.11.2026 08:26:00

УДК 532.527:551.465

Гидродинамические реакции в модели циркуляционного обтекания трубопровода придонным морским течением

© И.Ю. Владимиров[1], Н.Н. Корчагин[1,2], А.С. Савин[2]

[1]Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН, Москва, 117851, Россия
[2]МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Получено аналитическое решение модельной задачи о волновом воздействии стратифицированного течения на подводный трубопровод в случае циркуляционного обтекания. Проведены численные расчеты гидродинамических реакций для реальных морских условий. Найдены значения параметров потока, при которых волновое сопротивление и подъемная сила трубопровода достигают максимумов.

Ключевые слова: *подводный трубопровод, придонные стратифицированные течения, волновое сопротивление, подъемная сила, циркуляционное обтекание.*

Введение. На обтекаемый морским или речным течением подводный трубопровод действует горизонтальная сила сопротивления, пропорциональная квадрату скорости потока воды. При этом если окружающая среда стратифицирована, то обтекаемый потоком трубопровод будет генерировать внутренние волны, вследствие чего возникнет дополнительное волновое сопротивление. Кроме того, усиленные воздействия на обтекаемый трубопровод могут оказывать придонные мутьевые потоки, возникающие при подъеме со дна твердых микро- и мелкозернистых частиц грунта. Эффективная плотность таких потоков может существенно превышать плотность чистой воды, а их толщина — достигать нескольких десятков метров [1]. Поэтому обтекание мутьевыми потоками подводных элементов каких-либо инженерных конструкций (в частности, транспортных трубопроводов) может приводить к вполне значимым силовым воздействиям на них внутренних волн [2].

Используемые в настоящей статье подходы к расчету силовых воздействий на подводный трубопровод, связанных с образованием внутренних волн, основаны на результатах модельных расчетов авторов [3−7]. Эти работы выполнены с целью изучения возмущений морской поверхности и гидродинамических реакций при обтекании глубинных препятствий стратифицированным морским течением. Важнейшими параметрами, подлежавшими определению в этих работах, являлись комплексный потенциал и комплексная скорость

возмущенного препятствием потока. Однако в предложенных авторами моделях не учитывалось влияние завихренности, которая, естественно, может приводить к дополнительным силовым воздействиям на трубопровод.

Из последних работ, представляющих интерес к поставленной задаче и ее обобщению, можно отметить [8−15]. В работе [8] изучено взаимодействие движущегося тела с резким скачком плотности водной среды. В [9] рассмотрена двухмерная задача об источнике, движущемся в стратифицированном сдвиговом потоке со скоростью, совпадающей с скоростью потока. В последнем случае волновое сопротивление может быть существенно больше, чем в однородном потоке. В [10] изложены результаты экспериментального исследования турбулентного стратифицированного сдвигового потока. Показано, что при превышении некоторой пороговой скорости происходит самовозбуждение интенсивных внутренних волн. В [11] изучено прохождение внутренних волн над круговым цилиндром в условиях непрерывной стратификации, характеризуемой наличием слоя высокого градиента плотности (пикноклина) конечной толщины. В [12] экспериментально исследованы гидродинамические нагрузки, возникающие на погруженном круговом цилиндре при взаимодействии с уединенной внутренней волной, распространяющейся по нижнему тонкому слою двухслойной системы смешивающихся жидкостей. Показано, что горизонтальная нагрузка максимальна, когда цилиндр находится на дне канала, и минимальна, когда он находится вблизи границы раздела сред.

Обобщению рассматриваемых задач на случай пространственного потока посвящена работа [13], где в рамках линейной теории найдены асимптотики полей возмущений скорости и давления, возникающих при равномерном движении тела в однородно-стратифицированной жидкости под произвольным углом к горизонтали. Для случая сферы вычислено волновое сопротивление и исследована его зависимость от угла атаки и числа Фруда. Движение сферы в однородно-стратифицированной жидкости исследовано также в [14]. Для коэффициента лобового сопротивления найдены асимптотические формулы, справедливые при больших и малых числах Фруда. Проведено сравнение полученных результатов с экспериментальными данными. В [15] получены выражения для гидродинамических реакций, испытываемых телом в потоке сжимаемой жидкости. Показано, что вычисление силы сопротивления и подъемной силы требует знания только полей скорости и ее производных на произвольной поверхности (либо контуре), охватывающей обтекаемое тело. Аналогичным задачам о расчете распределения давления на поверхности твердого тела в сжимаемом газовом потоке, но при сверхзвуковых скоростях, посвящено большое число работ; отметим лишь работу

[16], в которой также использованы приближенно аналитические методы.

Постановка задачи. Рассмотрим двухслойный поток идеальной жидкости, ограниченный горизонтальным дном, стационарно обтекающий трубопровод с круговым сечением радиусом R. Трубопровод моделируется точечным диполем с моментом

$$m = 2\pi VR^2, \tag{1}$$

где V — скорость набегающего потока [7], и точечным вихрем с циркуляцией Г. Обозначим толщину верхнего слоя H, нижнего — H_1, а их плотности — соответственно ρ_1 и ρ_2 $(\rho_1 < \rho_2)$. Требуется определить гидродинамическую нагрузку на трубопровод. Начало координат поместим на невозмущенной границе между слоями жидкости, ось x направим вдоль этой границы, ось y — вертикально вверх. Моделирующие трубопровод диполь и вихрь находятся в точке $(0, -h)$ под границей раздела двух слоев (рис. 1). Решение задачи осуществляем в рамках теории малых возмущений.

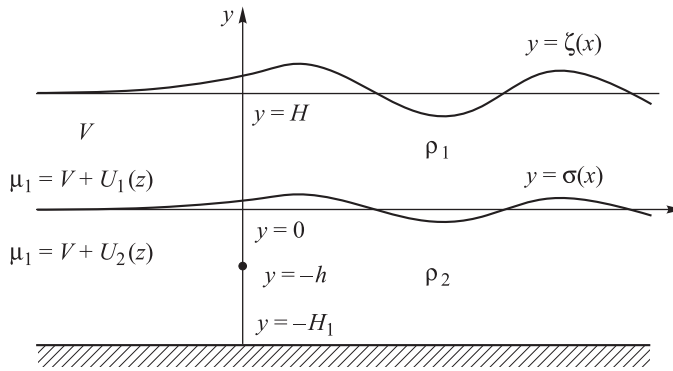


Рис. 1. Схема обтекания моделируемого трубопровода, локализованного в нижнем слое двухслойного потока

Метод решения. Предполагая течение потенциальным, представим комплексно-сопряженную скорость в каждом из двух слоев потока в виде $\mu_k = V + U_k$, $U_k = u_k - iv_k$, $k = \{1, 2\}$. Тогда задача об отыскании возмущений скорости U_k, вносимых в поток диполем и вихрем, формулируется следующим образом: требуется найти аналитические функции $U_1(z)$ и $U_2(z)$, удовлетворяющие граничным условиям (комплексную скорость возмущенного диполем потока находим в соответствии с подходами, предложенными в [3, 4]):

$$\mathrm{Im}\left[i\frac{dU_1}{dz} - \nu U_1 \right] = 0 \quad \text{при } y = H; \tag{2}$$

$$\delta \mathrm{Im}\left[i\frac{dU_1}{dz} - \nu U_1 \right] = \mathrm{Im}\left[i\frac{dU_2}{dz} - \nu U_2 \right] \text{ при } y = 0; \tag{3}$$

$$\mathrm{Im}\, U_1 = \mathrm{Im}\, U_2 \text{ при } y = 0; \tag{4}$$

$$\mathrm{Im}\, U_2 = 0 \text{ при } y = -H_1, \tag{5}$$

где $\delta = \rho_1/\rho_2$; $z = x + iy$. Кроме того, $U_1(z)$ должна быть регулярна в полосе $-\infty < x < \infty$, $0 < y < H$, а $U_2(z)$ — в полосе $-\infty < x < \infty$, $-H_1 < y < 0$ всюду за исключением точки $z = -ih$, в которой она имеет полюс второго порядка (так как в этой точке расположены вихрь и диполь):

$$U_2(z) = -\frac{m}{2\pi}\frac{1}{(z+ih)^2} + \frac{\Gamma}{2\pi i}\frac{1}{z+ih} + f(z),$$

где Γ — интенсивность вихря; $f(z)$ — регулярная функция. Отметим, что граничное условие (2) описывает постоянство давления на свободной поверхности, (3) — непрерывность давления при переходе через поверхность раздела слоев, (4) выражает отсутствие потока жидкости через эту поверхность, а (5) является условием непротекания через дно (вывод граничных условий (2)–(5) см. в [5]).

В силу линейности рассматриваемой задачи представим искомую комплексно-сопряженную скорость в виде суммы возмущений комплексно-сопряженной скорости, вносимых в поток точечным вихрем и диполем: $U_k(z) = U_k^{\Gamma}(z) + U_k^{m}(z)$ $k = \{1,2\}$. Для функций $U_k^{\Gamma}(z)$ и $U_k^{m}(z)$ получаем граничные условия, аналогичные (2)–(5), причем

$$U_2^{\Gamma}(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i}\frac{1}{z+ih} + f_{\Gamma}(z); \tag{6}$$

$$U_2^{m}(z) = -\frac{m}{2\pi}\frac{1}{(z+ih)^2} + f_m(z), \tag{7}$$

где $f_{\Gamma}(z)$ и $f_m(z)$ — функции, регулярные в полосе $-\infty < x < \infty$, $-H_1 < y < 0$ и $f(z) = f_{\Gamma}(z) + f_m(z)$.

В соответствии с изложенным будем искать скорости $U_1^{\Gamma}(z)$ и $f_{\Gamma}(z)$, а также $U_1^{m}(z)$ и $f_m(z)$ в виде их разложения в интеграл Фурье по волновым числам:

$$U_1^{\Gamma}(z)=\frac{\Gamma}{2\pi}\int_0^{\infty}\left[A_{\Gamma}(k)e^{ikz}+B_{\Gamma}(k)e^{-ikz}\right]dk; \tag{8}$$

$$f_{\Gamma}(z)=\frac{\Gamma}{2\pi}\int_0^{\infty}\left[C_{\Gamma}(k)e^{ikz}+D_{\Gamma}(k)e^{-ikz}\right]dk; \tag{9}$$

$$U_1^{m}(z)=\frac{m}{2\pi}\int_0^{\infty}k\left[A_m(k)e^{ikz}+B_m(k)e^{-ikz}\right]dk; \tag{10}$$

$$f_m(z)=\frac{m}{2\pi}\int_0^{\infty}k\left[C_m(k)e^{ikz}+D_m(k)e^{-ikz}\right]dk, \tag{11}$$

где функции $A_{\Gamma}(k)$, $B_{\Gamma}(k)$, $C_{\Gamma}(k)$, $D_{\Gamma}(k)$ и $A_m(k)$, $B_m(k)$, $C_m(k)$, $D_m(k)$ подлежат определению.

Применив равенство

$$\frac{1}{z+ih}=\begin{cases}-i\int_0^{\infty}e^{-kh}e^{ikz}dk, \text{ если } y>-h;\\ i\int_0^{\infty}e^{kh}e^{-ikz}dk, \text{ если } y<-h,\end{cases}$$

получим из (6) и (9) выражения для функции $U_2^{\Gamma}(z)$ в областях нижнего слоя, находящихся выше и ниже горизонта локализации вихря и диполя, моделирующих обтекаемый трубопровод:

$$U_2^{\Gamma}(z)=\begin{cases}\frac{\Gamma}{2\pi}\int_0^{\infty}[(-e^{-kh}+C_{\Gamma}(k))e^{ikz}+D_{\Gamma}(k)e^{-ikz}]dk, \text{если } y>-h;\\ \frac{\Gamma}{2\pi}\int_0^{\infty}[C_{\Gamma}(k)e^{ikz}+(e^{kh}+D_{\Gamma}(k))e^{-ikz}]dk, \text{если } y<-h.\end{cases} \tag{12}$$

Аналогично с помощью соотношения

$$-\frac{1}{(z+ih)^2}=\begin{cases}\int_0^{\infty}ke^{-kh}e^{ikz}dk, \text{ если } y>-h;\\ \int_0^{\infty}ke^{kh}e^{-ikz}dk, \text{ если } y<-h\end{cases}$$

из (7) и (11) можно получить интегральное представление для $U_2^m(z)$:

$$U_2^m(z)=\begin{cases}\dfrac{m}{2\pi}\displaystyle\int_0^\infty k[(e^{-kh}+C_m(k))e^{ikz}+D_m(k)e^{-ikz}]dk, \text{если } y>-h;\\ \dfrac{m}{2\pi}\displaystyle\int_0^\infty k[C_m(k)e^{ikz}+(e^{kh}+D_m(k))e^{-ikz}]dk, \text{если } y<-h.\end{cases} \tag{13}$$

Подстановка формул (8), (12) и (10), (13) в граничные условия (2)–(5) приводит к двум системам линейных уравнений относительно функций $A_\Gamma(k)$, $B_\Gamma(k)$, $C_\Gamma(k)$, $D_\Gamma(k)$ и $A_m(k)$, $B_m(k)$, $C_m(k)$, $D_m(k)$ соответственно:

$$\begin{cases}(k+\nu)e^{-kH}A_\Gamma & +(k-\nu)e^{kH}B_\Gamma & & & = & 0;\\ \delta(k+\nu)A_\Gamma & +\delta(k-\nu)B_\Gamma & -(k+\nu)C_\Gamma & -(k-\nu)D_\Gamma & = & -(k+\nu)e^{-kh};\\ A_\Gamma & -B_\Gamma & -C_\Gamma & +D_\Gamma & = & -e^{-kh};\\ & & e^{kH_1}C_\Gamma & -e^{-kH_1}D_\Gamma & = & e^{k(h-H_1)}\end{cases}$$

и

$$\begin{cases}(k+\nu)e^{-kH}A_m & +(k-\nu)e^{kH}B_m & & & = & 0;\\ \delta(k+\nu)A_m & +\delta(k-\nu)B_m & -(k+\nu)C_m & -(k-\nu)D_m & = & (k+\nu)e^{-kh};\\ A_m & -B_m & -C_m & +D_m & = & e^{-kh};\\ & & e^{kH_1}C_m & -e^{-kH_1}D_m & = & e^{k(h-H_1)}.\end{cases}$$

Решая эти системы, получаем следующие выражения для $C_\Gamma(k)$, $D_\Gamma(k)$ и $C_m(k)$, $D_m(k)$:

$$C_\Gamma(k)=\frac{(1-\delta)(k^2-\nu^2)\operatorname{ch}k(H-h)+[(1+\delta)k^2+(1-\delta)\nu^2]\operatorname{ch}k(H+h)-2k\nu\operatorname{sh}k(H+h)}{2\operatorname{ch}kH\operatorname{ch}kH_1e^{kH_1}\left\{k^2+[\delta k^2+(1-\delta)\nu^2]\operatorname{th}kH\operatorname{th}kH_1-k\nu(\operatorname{th}kH+\operatorname{th}kH_1)\right\}};$$

$$D_\Gamma(k)=\frac{\operatorname{sh}k(H_1-h)\left\{[(1+\delta)k^2+2k\nu+(1-\delta)\nu^2]e^{-kH}+(1-\delta)(k^2-\nu^2)e^{kH}\right\}}{2\operatorname{ch}kH\operatorname{ch}kH_1\left\{k^2+[\delta k^2+(1-\delta)\nu^2]\operatorname{th}kH\operatorname{th}kH_1-k\nu(\operatorname{th}kH+\operatorname{th}kH_1)\right\}};$$

$$C_m(k)=\frac{-(1-\delta)(k^2-\nu^2)\operatorname{sh}k(H-h)+[(1+\delta)k^2+(1-\delta)\nu^2]\operatorname{sh}k(H+h)-2k\nu\operatorname{ch}k(H+h)}{2\operatorname{ch}kH\operatorname{ch}kH_1e^{kH_1}\left\{k^2+[\delta k^2+(1-\delta)\nu^2]\operatorname{th}kH\operatorname{th}kH_1-k\nu(\operatorname{th}kH+\operatorname{th}kH_1)\right\}}; \tag{14}$$

$$D_m(k)=\frac{\operatorname{ch}k(H_1-h)\left\{-[(1+\delta)k^2+2k\nu+(1-\delta)\nu^2]e^{-kH}-(1-\delta)(k^2-\nu^2)e^{kH}\right\}}{2\operatorname{ch}kH\operatorname{ch}kH_1\left\{k^2+[\delta k^2+(1-\delta)\nu^2]\operatorname{th}kH\operatorname{th}kH_1-k\nu(\operatorname{th}kH+\operatorname{th}kH_1)\right\}}.$$

Заметим далее, что для получения физически реализуемого решения (т. е. решения, которое удовлетворяет условию отсутствия

возмущений далеко вверх по потоку) контур интегрирования в первых слагаемых выражений для $f_\Gamma(z)$ и $f_m(z)$ следует сместить в нижнюю полуплоскость, а во вторых — в верхнюю. Таким образом, всюду в дальнейшем $f(z) = f_\Gamma(z) + f_m(z)$ понимается как следующий предел:

$$f(z) = \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \left\{ \frac{\Gamma}{2\pi} \left[\int_{-i\varepsilon_1}^{-i\varepsilon_1 + \infty} C_\Gamma(k) e^{ikz} dk + \int_{i\varepsilon_1}^{i\varepsilon_1 + \infty} D_\Gamma(k) e^{-ikz} dk \right] + \right.$$
$$\left. + \frac{m}{2\pi} \left[\int_{-i\varepsilon_1}^{-i\varepsilon_1 + \infty} kC_m(k) e^{ikz} dk + \int_{i\varepsilon_1}^{i\varepsilon_1 + \infty} kD_m(k) e^{-ikz} dk \right] \right\}. \qquad (15)$$

Для вычисления равнодействующей R гидродинамических сил, приложенных к трубопроводу, воспользуемся формулой С.А. Чаплыгина, согласно которой

$$R^* = X - iY = \frac{i\rho_2}{2} \int_K \mu_2^2(z) dz.$$

Здесь X — волновое сопротивление; Y — подъемная сила, а интегрирование осуществляется по произвольному контуру K, расположенному в нижнем слое и охватывающему рассматриваемые вихрь и диполь. Поскольку

$$\mu_2(z) = V + U_2(z) = V - \frac{m}{2\pi} \frac{1}{(z+ih)^2} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{z+ih} + f(z)$$

и функция $f(z)$ регулярна в области, занятой нижней жидкостью, то функция $\mu_2^2(z)$ имеет в этой области единственную особую точку $z = -ih$. Применяя теорему о вычетах, находим

$$\int_K \mu_2^2(z) dz = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=-ih} \mu_2^2(z).$$

Вычет подынтегральной функции в точке $z = -ih$

$$\operatorname*{res}_{z=-ih} \mu_2^2(z) = \frac{\Gamma V}{\pi i} - \frac{m f'(-ih)}{\pi} + \frac{\Gamma f(-ih)}{\pi i}.$$

Следовательно,

$$R^* = i\rho V \Gamma + i\rho_2 \Gamma f(-ih) + \rho_2 m f'(-ih).$$

В дальнейшем нас будут интересовать величины добавочной силы ΔR к обобщенной силе Жуковского $-i\rho V\Gamma$, действующей на трубопровод [7], и ее составляющих X и ΔY. Очевидно, что

$$\Delta R^* = X - i\Delta Y = i\rho_2\Gamma\, f(-ih) + \rho_2 m\, f'(-ih). \qquad (16)$$

Из (15) находим

$$f(-ih) = \lim_{\varepsilon_1\to 0}\left\{\frac{\Gamma}{2\pi}\left[\int\limits_{-i\varepsilon_1}^{-i\varepsilon_1+\infty} C_\Gamma(k)e^{kh}dk + \int\limits_{i\varepsilon_1}^{i\varepsilon_1+\infty} D_\Gamma(k)e^{-kh}dk\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{m}{2\pi}\left[\int\limits_{-i\varepsilon_1}^{-i\varepsilon_1+\infty} kC_m(k)e^{kh}dk + \int\limits_{i\varepsilon_1}^{i\varepsilon_1+\infty} kD_m(k)e^{-kh}dk\right]\right\}$$

и

$$f'(-ih) = \lim_{\varepsilon_1\to 0}\left\{\frac{i\Gamma}{2\pi}\left[\int\limits_{-i\varepsilon_1}^{-i\varepsilon_1+\infty} kC_\Gamma(k)e^{kh}dk - \int\limits_{i\varepsilon_1}^{i\varepsilon_1+\infty} kD_\Gamma(k)e^{-kh}dk\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{im}{2\pi}\left[\int\limits_{-i\varepsilon_1}^{-i\varepsilon_1+\infty} k^2C_m(k)e^{kh}dk - \int\limits_{i\varepsilon_1}^{i\varepsilon_1+\infty} k^2D_m(k)e^{-kh}dk\right]\right\}.$$

С помощью интегральной теоремы Коши можно показать, что

$$f(-ih) = \frac{\Gamma}{2\pi}\int_0^{+\infty}\left[C_\Gamma(k)e^{kh} + D_\Gamma(k)e^{-kh}\right]dk + \frac{m}{2\pi}\int_0^{+\infty} k\left[C_m(k)e^{kh} + D_m(k)e^{-kh}\right]dk +$$

$$+ \frac{i\Gamma}{2}\sum_{j=1}^{s}\operatorname*{res}_{k=k_j}\left\{C_\Gamma(k)e^{kh} - D_\Gamma(k)e^{-kh}\right\} + \frac{im}{2}\sum_{j=1}^{s}\operatorname*{res}_{k=k_j}\left\{k\left[C_m(k)e^{kh} - D_m(k)e^{-kh}\right]\right\}$$

и

$$f'(-ih) = \frac{i\Gamma}{2\pi}\int_0^{+\infty} k\left[C_\Gamma(k)e^{kh} - D_\Gamma(k)e^{-kh}\right]dk + \frac{im}{2\pi}\int_0^{+\infty} k^2\left[C_m(k)e^{kh} - D_m(k)e^{-kh}\right]dk -$$

$$- \frac{\Gamma}{2}\sum_{j=1}^{s}\operatorname*{res}_{k=k_j}\left\{k\left[C_\Gamma(k)e^{kh} + D_\Gamma(k)e^{-kh}\right]\right\} - \frac{m}{2}\sum_{j=1}^{s}\operatorname*{res}_{k=k_j}\left\{k^2\left[C_m(k)e^{kh} + D_m(k)e^{-kh}\right]\right\}.$$

Отсюда из (16) имеем

$$\Delta R^* = \frac{i\rho_2 m^2}{2\pi}\int_0^{+\infty} k^2\left[C_m(k)e^{kh} - D_m(k)e^{-kh}\right]dk + \frac{i\rho_2\Gamma^2}{2\pi}\int_0^{+\infty}\left[C_\Gamma(k)e^{kh} + D_\Gamma(k)e^{-kh}\right]dk +$$
$$+\frac{i\rho_2 m\Gamma}{2\pi}\int_0^{+\infty} k\left[\left(C_m(k)+C_\Gamma(k)\right)e^{kh} + \left(D_m(k)-D_\Gamma(k)\right)e^{-kh}\right]dk -$$
$$-\frac{\rho_2 m^2}{2}\sum_{j=1}^{s}\operatorname*{res}_{k=k_j}\left\{k^2\left[C_m(k)e^{kh} + D_m(k)e^{-kh}\right]\right\} + \frac{\rho_2\Gamma^2}{2}\sum_{j=1}^{s}\operatorname*{res}_{k=k_j}\left\{-C_\Gamma(k)e^{kh} + D_\Gamma(k)e^{-kh}\right\} + \quad (17)$$
$$+\frac{\rho_2 m\Gamma}{2}\sum_{j=1}^{s}\operatorname*{res}_{k=k_j}\left\{k\left[-\left(C_m(k)+C_\Gamma(k)\right)e^{kh} + \left(D_m(k)-D_\Gamma(k)\right)e^{-kh}\right]\right\}.$$

Здесь интеграл понимается в смысле главного значения по Коши, а вычеты берутся по всем s полюсам k_j соответствующих функций, расположенным на положительной действительной оси. Из (14) видно, что указанные полюса — общие для данных функций и являются положительными корнями уравнения

$$k^2 + [\delta k^2 + (1-\delta)\nu^2]\,\mathrm{th}\,kH\,\mathrm{th}\,kH_1 - k\nu(\mathrm{th}\,kH + \mathrm{th}\,kH_1) = 0. \quad (18)$$

Кроме того, очевидно, что точки $k = k_j$ (и только они) являются особыми для подынтегральных функций в первых трех слагаемых формулы (17) (т. е. полюсами, расположенными на контуре интегрирования).

Проведенный в [5] анализ показал, что уравнение (18) имеет два положительных корня $(s = 2)$ при выполнении условия

$$V < V_{cr}^{\text{вн}} = \sqrt{\frac{gH\left(\beta + 1 - \sqrt{(\beta+1)^2 - 4\varepsilon\beta}\right)}{2}} \quad (19)$$

и один положительный корень $(s = 1)$, если

$$V_{cr}^{\text{вн}} < V < V_{cr}^{\text{пов}} = \sqrt{\frac{gH\left(\beta + 1 + \sqrt{(\beta+1)^2 - 4\varepsilon\beta}\right)}{2}}. \quad (20)$$

При $V > V_{cr}^{\text{пов}}$ положительных решений нет $(s = 0)$. Здесь $\varepsilon = 1 - \delta = (\rho_2 - \rho_1)/\rho_2$ — относительный перепад плотности между слоями; $\beta = H_1/H$. С физической точки зрения критические скорости $V_{cr}^{\text{вн}}$ и $V_{cr}^{\text{пов}}$ означают максимальную скорость течения, при которой в потоке за обтекаемым трубопроводом образуются волны, обусловленные наличием слоя скачка плотности и свободной поверхности (т. е. внутренние и поверхностные).

Выделяя в формуле (17) вещественную и мнимую части с учетом соотношения (1), связывающего момент диполя с радиусом моделируемого им трубопровода и скоростью набегающего потока, окончательно получаем следующие выражения для волнового сопротивления и подъемной силы:

$$X = -2\pi^2\rho_2 V^2 R^4 \sum_{j=1}^{s} \operatorname*{res}_{k=k_j} \left\{ k^2 \left[C_m(k)e^{kh} + D_m(k)e^{-kh} \right] \right\} +$$

$$+ \frac{\rho_2 \Gamma^2}{2} \sum_{j=1}^{s} \operatorname*{res}_{k=k_j} \left\{ -C_\Gamma(k)e^{kh} + D_\Gamma(k)e^{-kh} \right\} +$$

$$+ \pi\rho_2 V R^2 \Gamma \sum_{j=1}^{s} \operatorname*{res}_{k=k_j} \left\{ k \left[-\left(C_m(k) + C_\Gamma(k) \right) e^{kh} + \left(D_m(k) - D_\Gamma(k) \right) e^{-kh} \right] \right\};$$

$$\Delta Y = -2\pi\rho_2 V^2 R^4 \int_0^{+\infty} k^2 \left[C_m(k)e^{kh} - D_m(k)e^{-kh} \right] dk -$$

$$- \frac{\rho_2 \Gamma^2}{2\pi} \int_0^{+\infty} \left[C_\Gamma(k)e^{kh} + D_\Gamma(k)e^{-kh} \right] dk -$$

$$- \rho_2 V R^2 \Gamma \int_0^{+\infty} k \left[\left(C_m(k) + C_\Gamma(k) \right) e^{kh} + \left(D_m(k) - D_\Gamma(k) \right) e^{-kh} \right] dk.$$

Здесь следует отметить, что в выражение для вычисления подъемной силы не включена действующая на трубопровод сила Архимеда.

Далее подсчет вычетов осуществляем по формулам

$$\operatorname*{res}_{k=k_j} \left\{ k^2 \left[C_m(k)e^{kh} + D_m(k)e^{-kh} \right] \right\} = \left. \frac{k^2 (c_m(k)e^{kh} + d_m(k)e^{-kh})}{dq(k)/dk} \right|_{k=k_j};$$

$$\operatorname*{res}_{k=k_j} \left\{ -C_\Gamma(k)e^{kh} + D_\Gamma(k)e^{-kh} \right\} = \left. \frac{-c_\Gamma(k)e^{kh} + d_\Gamma(k)e^{-kh}}{dq(k)/dk} \right|_{k=k_j};$$

$$\operatorname*{res}_{k=k_j} \left\{ k \left[-\left(C_m(k) + C_\Gamma(k) \right) e^{kh} + \left(D_m(k) - D_\Gamma(k) \right) e^{-kh} \right] \right\} =$$

$$= \left. \frac{k \left[-(c_m(k) + c_\Gamma(k))e^{kh} + (d_m - d_\Gamma(k))e^{-kh} \right]}{dq(k)/dk} \right|_{k=k_j},$$

где

$$c_\Gamma(k) = \frac{(1-\delta)(k^2-\nu^2)\operatorname{ch}k(H-h) + [(1+\delta)k^2 + (1-\delta)\nu^2]\operatorname{ch}k(H+h) - 2k\nu\operatorname{sh}k(H+h)}{2e^{kH_1}\operatorname{ch}kH\operatorname{ch}kH_1};$$

$$d_\Gamma(k) = \frac{\operatorname{sh}k(H_1-h)\left\{[(1+\delta)k^2 + 2k\nu + (1-\delta)\nu^2]e^{-kH} + (1-\delta)(k^2-\nu^2)e^{kH}\right\}}{2\operatorname{ch}kH\operatorname{ch}kH_1};$$

$$c_m(k) = \frac{-(1-\delta)(k^2-\nu^2)\operatorname{sh}k(H-h) + [(1+\delta)k^2 + (1-\delta)\nu^2]\operatorname{sh}k(H+h) - 2k\nu\operatorname{ch}k(H+h)}{2e^{kH_1}\operatorname{ch}kH\operatorname{ch}kH_1};$$

$$d_m(k) = \frac{\operatorname{ch}k(H_1-h)\left\{-[(1+\delta)k^2 + 2k\nu + (1-\delta)\nu^2]e^{-kH} - (1-\delta)(k^2-\nu^2)e^{kH}\right\}}{2\operatorname{ch}kH\operatorname{ch}kH_1};$$

$$q(k) = k^2 + [\delta k^2 + (1-\delta)\nu^2]\operatorname{th}kH\operatorname{th}kH_1 - k\nu(\operatorname{th}kH + \operatorname{th}kH_1).$$

Далее представлены результаты расчетов силового воздействия на обтекаемый трубопровод за счет внутренних волн при наличии скачка плотности в морской среде, а также их анализ.

Анализ и численные расчеты для реальных условий моря. Расчеты гидродинамических воздействий на обтекаемый трубопровод, моделируемый точечным диполем с моментом $m = 2\pi VR^2$ (см. (1)), проведены для реальных значений характеристик морской среды. Так, плотность в верхнем слое воды $\rho_1 = 1024$ кг / м^3, а перепад плотности между верхним и нижним слоями $\rho_2 / \rho_1 = 1,01...1,02$, что соответствует наличию мутьевого потока в нижнем слое. Общая глубина потока $H_0 = H + H_1 = 50$ м, толщина верхнего слоя $H = 40$ м, радиус цилиндра $R = 0,71$ м. Диполь локализован в нижнем слое на расстоянии $h = 1,5$ м от границы раздела слоев воды. Безразмерная циркуляция определялась как $\gamma = \Gamma/4\pi VR$, где V — скорость потока, Г — размерная циркуляция. Модельные расчеты проведены отдельно с учетом положительной и отрицательной циркуляций (рис. 2, 3).

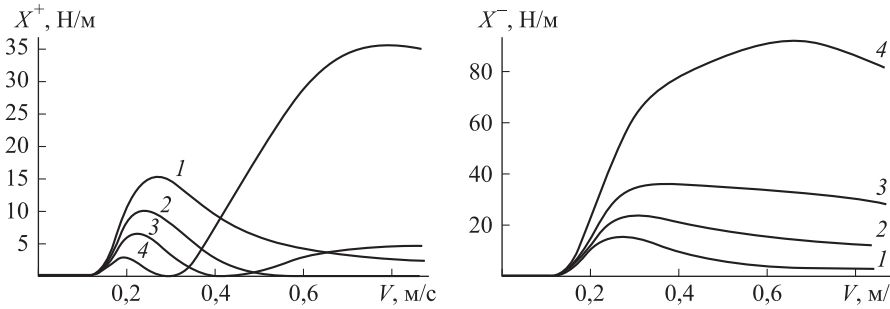


Рис. 2. Зависимости волнового сопротивления диполя от скорости потока; диполь под скачком плотности, $\rho_2 / \rho_1 = 1,01$

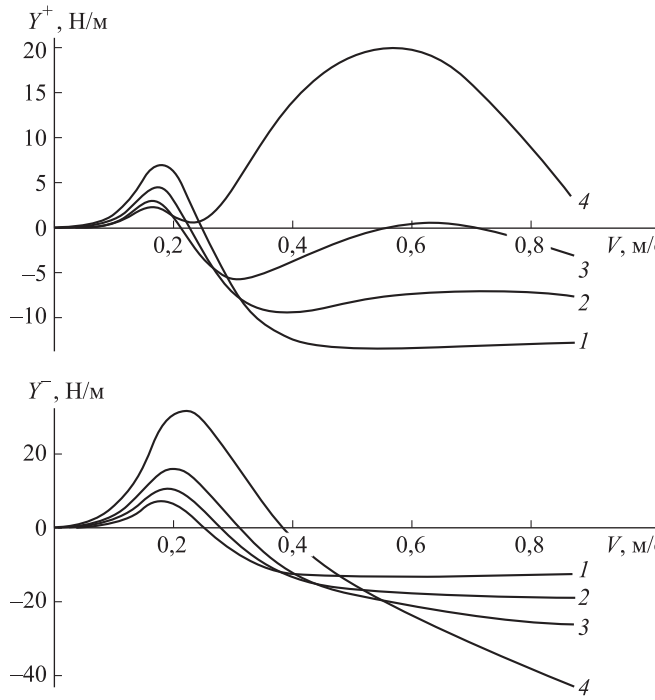


Рис. 3. Зависимости подъемной силы диполя от скорости потока; диполь под скачком плотности, $\rho_2 / \rho_1 = 1,01$

Результаты вычислений волнового сопротивления X и подъемной силы Y (в расчете на погонный метр длины трубопровода) в зависимости от скорости набегающего потока V приведены на рис. 2, 3. На каждом графике представлены четыре кривые, соответствующие разным значениям γ_i. На этих графиках номерам i соответствуют следующие значения абсолютной величины γ_i: *1* — 0; *2* — 0,05; *3* — 0,1; *4* — 0,2. При этом безвихревые кривые ($\gamma_i = 0$, $i = 1$) разнонаправленных циркуляций отдельно как для X, так и для Y на рис. 2–4 практически совпадают между собой, тем самым подтверждая адекватность общей постановки завихренной модели. Адекватность такой модели подтверждается и при сравнении ее результатов с аналогичными кривыми, полученными по безвихревой модели из работы [6] и приведенными на рис. 4. На каждом графике рис. 4 приведены 4 кривые, соответствующие локализации диполя под слоем скачка плотности на расстояниях от невозмущенного его положения h_i = 1,5 м (*1*); 2,0 (*2*); 3,0 (*3*); 4,5 м (*4*).

Левый график на рис. 2 представляет зависимость силы волнового сопротивления $X^+(V)$ для положительной циркуляции, т. е. при движении жидкости вблизи вихря против часовой стрелки. Правый график на рис. 2 — зависимость $X^-(V)$ для отрицательной циркуляции

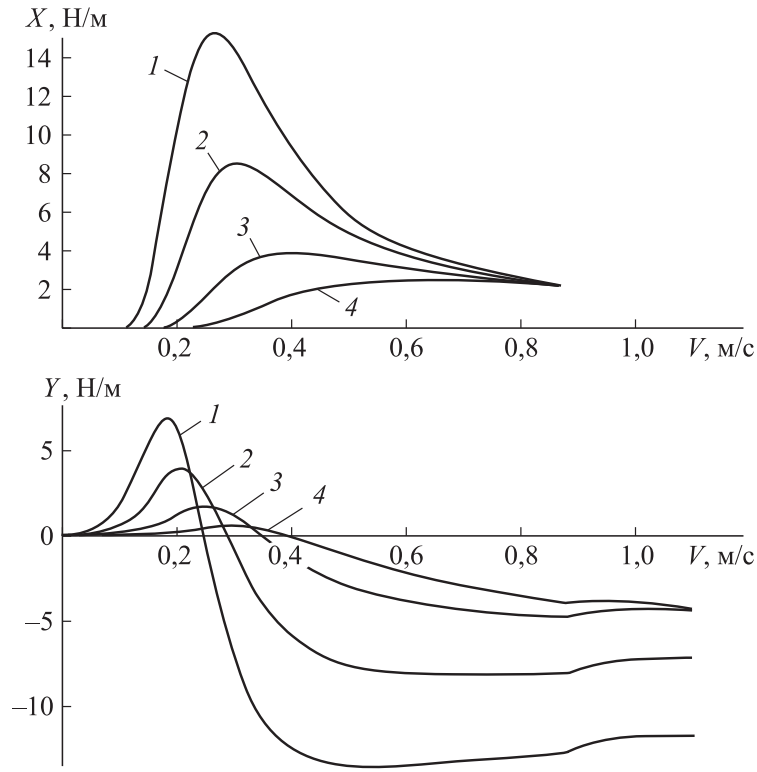


Рис. 4. Графики $X(V)$ и $Y(V)$, приведенные по результатам безвихревой модели авторов [6] (кривые соответствуют локализации диполя под слоем скачка плотности на расстояниях h_i = 1,5; 2; 3; 4,5 м от невозмущенного его положения)

(движение вблизи вихря по часовой стрелке). Как видно на рис. 2, кривые волнового сопротивления с противоположно направленными циркуляциями потока существенно отличаются друг от друга как по значениям, так и по форме, причем вклад отрицательной циркуляции в максимальную величину сопротивления X^- более чем в 2 раза превышает вклад циркуляции в соответствующие значения X^+. Если $\gamma_i > 0$, то при возрастании безразмерной циркуляции происходит уменьшение максимума волнового сопротивления, а также уменьшение величины скорости потока, при которой этот максимум достигается. В случае $\gamma_i < 0$ возрастанию модуля γ соответствует увеличение максимума волнового сопротивления и скорости потока V.

Как показано в [6], зависимость волнового воздействия на трубопровод от скорости набегающего потока проявляется в ограниченном ее диапазоне от 0 до $V_{cr}^{\text{вн}}$. Далее такая зависимость испытывает разрыв первого рода, резко уменьшаясь практически до нуля, что отражает влияние внутренней моды при наличии скачка плотности. Затем $X(V)$ вновь достигает значимых величин лишь при существенно бóльших

значениях скорости ($V > 6$ м/с), т. е. в диапазоне проявления поверхностной моды, связанной с наличием свободной поверхности.

Представляет интерес разность по амплитуде между кривыми $Y^+(V)$ и $Y^-(V)$ (см. рис. 3), особенно в случае максимальной величины завихренности $\gamma_4 = \pm 0,2$. Очевидно, что существенная разница в подъемной силе обусловлена увеличением либо уменьшением скорости потока вблизи трубопровода для разнонаправленных циркуляций. Действительно, для объяснения такого эффекта можно воспользоваться интегралом Бернулли, связывающим изменение давления с изменением квадрата скорости набегающего потока. В случае положительной циркуляции суммарная скорость потока под цилиндром увеличивается, а над цилиндром — уменьшается. В этом случае давление внизу уменьшается, а сверху цилиндра увеличивается. Поэтому в таком же порядке изменяется и подъемная сила.

В отличие от $X(V)$ зависимость подъемной силы $Y(V)$ от скорости потока имеет важную особенность в структурной изменчивости (см. рис. 3). Так, в относительно узком диапазоне изменения V подъемная сила резко меняет свое направление на противоположное. Возникает вопрос о возможных последствиях столь резкого и реверсивного изменения $Y(V)$. Для ответа на него можно воспользоваться интегралом Бернулли. Поскольку в реальных морских условиях скорость течения непостоянна по пространству вдоль обтекаемого трубопровода, то и поле давления непостоянно, а изменение давления непосредственно влияет на изменение силовых воздействий на трубопровод. Такая динамика обтекания трубопровода может приводить к деформированию его отдельных протяженных элементов, а силовые воздействия — к разрушению самого трубопровода.

Заключение. Обнаруженный на основе представленной модели эффект резкого (реверсивного) изменения направления действия подъемной силы в очень узком диапазоне скорости обтекания трубопровода морским течением необходимо учитывать при проектировании подводных инженерных конструкций в морской среде и на дне моря.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (№ 13-08-00538).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Жмур В.В., Сапов Д.А. Катастрофические взвесенесущие гравитационные потоки в придонном слое океана. *Мировой океан. Геология и тектоника океана. Катастрофические явления в океане*, 2013, т. 1, с. 499−524.

[2] Владимиров И.Ю., Корчагин Н.Н., Савин А.С. Моделирование волнового воздействия стратифицированного течения на подводный трубопровод. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 2, с. 62−76.

[3] Корчагин Н.Н., Савин А.С., Савина Е.О. Волны на поверхности моря, обусловленные обтеканием подводного препятствия. *Океанология*, 2009, т. 49, № 3, с. 348−35.

[4] Владимиров И.Ю., Корчагин Н.Н., Савин А.С. Поверхностные эффекты при обтекании препятствий в неоднородно-стратифицированной среде. *Докл. РАН*, 2011, т. 440, № 6, с. 826−829.
[5] Владимиров И.Ю., Корчагин Н.Н., Савин А.С. Поверхностные возмущения при обтекании препятствий стратифицированным потоком конечной глубины. *Океанология*, 2012, т. 52, № 6, с. 825−835.
[6] Владимиров И.Ю., Корчагин Н.Н., Савин А.С. Волновое воздействие взвесенесущего потока на обтекаемое препятствие. *Докл. РАН*, 2015, т. 461, № 2, с. 223−227.
[7] Лойцянский Л.Г. *Механика жидкости и газа*. Москва, Наука, 1978, 736 с.
[8] Васильева В.В. Теория гидродинамического взаимодействия резкого пикноклина с движущимся телом. *Тр. 8-й Междунар. конф. «Прикладные технологии гидроакустики и гидрофизики»*. Санкт-Петербург, 2006.
[9] Резник С.Н., Троицкая Ю.И. Волновое сопротивление источника массы в стратифицированном сдвиговом потоке, имеющем критический слой. Двумерный случай. *Изв. РАН. МЖГ*, 1997, № 2, с. 131−140.
[10] Казаков В.И., Коротков Д.П., Серин Б.В., Таланов В.И., Троицкая Ю.И. Автоколебания в турбулентном стратифицированном сдвиговом потоке. *Изв. РАН. ФАО*, 2002, т. 38, № 4, с. 504−514.
[11] Ерманюк Е.В., Гаврилов Н.В. Дифракция внутренних волн на круговом цилиндре, расположенном вблизи пикноклина. *ПМТФ*, 1999, т. 40, № 2, с. 79–85.
[12] Ерманюк Е.В., Гаврилов Н.В. Экспериментальное исследование силового воздействия уединенной внутренней волны на погруженный круговой цилиндр. *ПМТФ*, 2005, т. 46, № 6, с. 36−44.
[13] Scase M.M., Dalziel S.B. Internal wave fields and drag generated by a translating body in a stratified fluid. *Journal of Fluid Mechanics*, 2004, vol. 498, pp. 289–313. doi: 10.1017/S0022112003006815
[14] Greenslande M.D. Drag on a sphere moving horizontally in a stratified fluid. *Journal of Fluid Mechanics*, 2000, vol. 418, pp. 339–350. doi: 10.1017/S0022112000001361
[15] Zhu G., Bearman P.W., Graham J.M.R. Prediction of drag and lift using velocity and vorticity fields. *Aeron*., 2002, vol. 106, № 1064, pp. 547–554.
[16] Котенев В.П., Сысенко В.А. Аналитические формулы повышенной точности для расчета распределения давления на поверхности выпуклых затупленных тел вращения произвольного очертания. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 1, с. 68−82.

Статья поступила в редакцию 19.08.2015

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:
Владимиров И.Ю., Корчагин Н.Н., Савин А.С. Гидродинамические реакции при циркуляционном обтекании трубопровода придонным морским течением. *Математическое моделирование и численные методы*, 2015, № 3, с. 41–57.

Владимиров Игорь Юрьевич — старший научный сотрудник Института океанологии им. П.П. Ширшова РАН. Автор 10 научных публикаций в области физики океана.

Корчагин Николай Николаевич — главный научный сотрудник Института океанологии им. П.П. Ширшова РАН; профессор кафедры высшей математики МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор трех монографий и около 110 научных работ в области гидромеханики и физики океана.

Савин Александр Сергеевич — профессор кафедры высшей математики МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор около 100 научных публикаций в области теоретической и прикладной гидродинамики.

Hydrodynamic reactions in the model of circulatory streamlining the pipeline by bottom sea currents

© I.Yu. Vladimirov[1], N.N. Korchagin[1,2], A.S. Savin[2]

[1]P.P. Shirshov Institute of Oceanology, RAS, Moscow, 117851, Russia
[2]Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

The article describes an analytical solution to the model problem about stratified flow wave action on the underwater pipeline in the case of the circulation flow. Numerical computations of the hydrodynamic reactions for the real sea conditions are performed. The values of the flow parameters at which the wave-making drag and the lift capacity of the pipeline reaches its maximum are determined.

Keywords: *underwater pipeline, bottom stratified current, wave-making drag, lift capacity, circulation flow.*

REFERENCES

[1] Zhmur V.V., Sapov D.A. Katastroficheskie vzvesenesuschie gravitatsionnye potoki v pridonnom sloe [Catastrophic Sediment Gravity Flows in the Bottom Layer of the Ocean]. *Mirovoy okean. Tom 1. Geologiya i tektonika okeana. Katastroficheskie yavleniya v okeane* [World Ocean. Vol. 1. Geology and Tectonics of the Ocean. Catastrophic Events in the Ocean]. 2013, pp. 499−524.

[2] Vladimirov I.Yu., Korchagin N.N., Savin A.S. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye menody – Mathematical Modeling and Numerical Methods,* 2014, no. 2, pp. 62−76.

[3] Korchagin N.N., Savin A.S., Savina E.O. *Okeanologiya – Oceanology*, 2009, vol. 49, no. 3, pp. 348−35.

[4] Vladimirov I.Yu., Korchagin N.N., Savin A.S. *Doklady RAN – Reports of RAS*, 2011, vol. 440, no. 6, pp. 826−829.

[5] Vladimirov I.Yu., Korchagin N.N., Savin A.S. *Okeanologiya – Oceanology*, 2012, vol. 52, no. 6, pp. 825−835.

[6] Vladimirov I.Yu., Korchagin N.N., Savin A.S. *Doklady RAN – Reports of RAS*, 2015, vol. 461, no. 2, pp. 223−227.

[7] Loytsyanitskiy L.G. *Mekhanika zhidkosti i gaza* [Fluid and Gas Mechanics]. Moscow, Nauka Publ., 1978, 736 p.

[8] Vasilyeva V.V. Teoriya gidrodinamicheskogo vzaimodeystviya rezkogo piknoklina s dvizhuschimsya telom [The Theory of Hydrodynamic Interaction of Sharp Pycnocline with the Moving Body]. *Proceedings of the 8th International Conference "Applied Technologies of Hydroacoustics and Hydrophysics"*,St. Petersburg, 2006.

[9] Reznik S.N., Troitskaya Yu.I. *Izvestiya RAN. MZhG – Proceedings of the RAS. FM*, 1997, no. 2, pp. 131−140.

[10] Kazakov V.I., Korotkov D.P., Serin B.V., Talanov V.I., Troitskaya Yu.I. *Izvestiya RAN. FAO – Proceedings of the RAS. Atmospheric and Oceanic Physics*, 2002, vol. 38, no. 4, pp. 504−514.

[11] Yermanyuk E.V., Gavrilov N.V. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika – Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1999, vol. 40, no. 2, pp. 79–85.

[12] Yermanyuk E.V., Gavrilov N.V. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika – Journal of Applied Mechanics and Technical Physics,* 2005, vol. 46, no. 6, pp. 36−44.

[13] Scase M.M., Dalziel S.B. Internal wave fields and drag generated by a translating body in a stratified fluid. *Journal of Fluid Mechanics*, 2004, vol. 498, pp. 289–313. doi: 10.1017/S0022112003006815.
[14] Greenslande M.D. Drag on a sphere moving horizontally in a stratified fluid. *Journal of Fluid Mechanics*, 2000, vol. 418, pp. 339–350. doi: 10.1017/S0022112000001361.
[15] Zhu G., Bearman P.W., Graham J.M.R. Prediction of drag and lift using velocity and vorticity fields. *Aeron*., 2002, vol. 106, no. 1064, pp. 547–554.
[16] Kotenev V.P., Sysenko V.A. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye menody — Mathematical Modeling and Numerical Methods*, 2014, no. 1, pp. 68–82.

Vladimirov I.Yu. — senior research fellow of P.P. Shirshov Institute of Oceanology, RAS. Author of 10 research publications in the field of ocean physics.

Korchagin N.N. — Dr. Sci. (Phys.&Math.), senior staff scientist of P.P. Shirshov Institute of Oceanology, RAS; Professor of the Department of Higher Mathematics at Bauman Moscow State Technical University. Author of 3 monographs and about 110 research publications in the field of hydromechanics and ocean physics.

Savin A.S. — Dr. Sci. (Phys.&Math.), professor of the Department of Higher Mathematics at Bauman Moscow State Technical University. Author of about 100 research publications in the field of theoretical and applied hydromechanics.