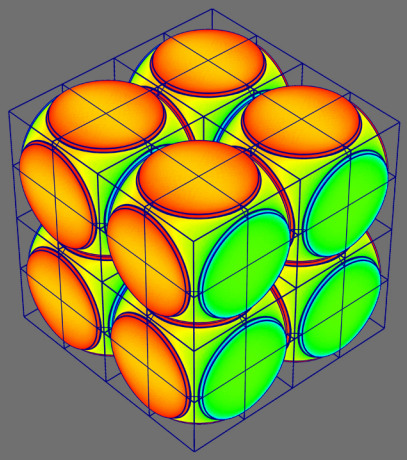
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Жилейкин М. М., Сарач Е. Б. Математическая модель движения многоосной колесной машины с податливой на кручение несущей системой. Математическое моделирование и численные методы, 2015, №3 (7), с. 17-40

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/55/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.217.22
18.11.2026 12:59:46

УДК 629.1.028

Математическая модель движения многоосной колесной машины с податливой на кручение несущей системой

© М.М. Жилейкин, Е.Б. Сарач

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

В рамках решения задачи активного управления упругими и демпфирующими элементами подвесок многоосных колесных машин (МКМ) остро стоит задача исследования свойств семейств подвесок, спроектированных как для различных ходов, так и для различных нагрузок. При этом их кинематические схемы также могут быть весьма разнообразны. Сбор требуемого объема информации для семейств автомобилей, различных по конструкции и эксплуатационным характеристикам, представляется неосуществимым. Провести полные аналитические исследования по определению соответствующих характеристик не представляется возможным. Эта задача с успехом может быть решена только с помощью моделирования.

Разработана математическая модель движения МКМ, особенностью которой является то, что скорость машины задается не принудительно, а формируется силами взаимодействия вращающихся колесных движителей с опорным основанием. Это позволяет получить высокую точность при моделировании реальных процессов движения МКМ по неровностям. Разработанная модель может быть применена для исследования различных законов управления подвеской многоосных колесных машин.

Ключевые слова: *математическая модель, прямолинейное движение многоосной колесной машины, дифференциальные уравнения движения, имитационное моделирование, уравнения динамики, уравнения кинематических связей.*

Введение. В рамках решения задачи активного управления упругими и демпфирующими элементами подвесок многоосных колесных машин (МКМ) остро стоит задача исследования свойств семейств подвесок, спроектированных как для различных ходов, так и для различных нагрузок. При этом их кинематические схемы также могут быть весьма разнообразны. Сбор требуемого объема информации для семейств автомобилей, различных по конструкции и эксплуатационным характеристикам, представляется неосуществимым. Сроки и объемы натурных испытаний для сбора статистических данных в такой постановке задачи крайне велики. В свою очередь, увеличение сроков испытаний приводит к моральному старению создаваемой системы. Для вновь проектируемых транспортных средств еще на этапе предпроектных исследований желательно иметь наиболее полную информацию не только о статических, но и о динамических характе-

ристиках разрабатываемой системы. Провести полные аналитические исследования по определению соответствующих характеристик не представляется возможным. Эта задача с успехом может быть решена только с помощью моделирования, в частности, средствами компьютерных имитационных математических моделей (ИММ) [1].

Имитационное математическое моделирование движения транспортного средства в различных режимах по различным трассам, а также преодоления типовых препятствий является основным методом исследования в теории подрессоривания современных машин.

Для выявления особенностей функционирования и определения требований как к информационному полю, так и к структуре и типу исполнительных элементов системы активного подрессоривания была поставлена задача синтеза математической модели, позволяющей:

- выявить особенности работы управляемых систем подрессоривания;
- сформировать требования к информационному полю для проектируемой системы автоматического управления (САУ) системой подрессоривания колес МКМ;
- сформировать требования к системам активного подрессоривания с энергетической точки зрения.

Требования к математической модели, процесс моделирования, основные допущения. Требования к математической модели динамики МКМ определяются совокупностью задач, при решении которых должна быть получена необходимая информация для оценки эксплуатационных качеств. К числу основных можно отнести следующие требования:

- модель должна описывать совместную динамику кузова, силовой установки и ходовой части МКМ с точностью, необходимой для оценки плавности хода и нагруженности ее элементов;
- в модели должны быть учтены конструктивные особенности системы подрессоривания и движителя, неудерживающий и неголономный характер связей, наложенных на МКМ;
- в модели не должно быть ограничений на характеристики профиля трасс в вертикальной плоскости, что позволит исследовать поведение машины при движении как по реальным неровностям, так и через искусственные препятствия;
- движение МКМ должно моделироваться с учетом характеристик сопротивления и сцепления грунта, так как тягово-сцепные характеристики влияют на скорость машины.

При выводе дифференциальных уравнений прямолинейного движения МКМ особое место занимает обоснованное принятие допущений. Допущения должны, с одной стороны, обеспечить выполнение требований, предъявляемых к математической модели, а с другой —

ограничить число моделируемых параметров системы самыми необходимыми.

В соответствии с требованиями к математической модели примем следующие допущения:

- массы неподрессоренных элементов МКМ приведены к осям колес, а подрессоренных — к несущей системе;
- вращающиеся массы силовой установки и трансмиссии приведены к ведущим колесам;
- опорное основание полагается недеформируемым (необходимая податливость по нормали к грунту может быть учтена в соответствующих характеристиках шин колес, а тангенциальная податливость грунта учитывается в характеристике его сцепных свойств);
- профиль опорного основания полагается кусочно-линейным.

Общее уравнение динамики многоосной колесной машины. Рассмотрим пространственное движение МКМ как твердого тела. Связь между кинематическими параметрами и внешними возмущениями устанавливается дифференциальными уравнениями, составляющими математическую модель движения машины.

Система уравнений движения МКМ содержит:

- динамические уравнения, описывающие движение МКМ, полученные на основе закона сохранения количества движения и момента количества движения;
- кинематические уравнения связи угловых и линейных скоростей с угловыми и пространственными координатами, полученные на основе уравнений связи между различными координатными системами;
- динамические уравнения движения неподрессоренных масс относительно корпуса.

Системы координат, используемые в моделировании. В предлагаемой модели использованы три различные системы координат (рис. 1), что объясняется структурой и формой уравнений движения объекта.

Первая, неподвижная, система координат (НСК) $O_2X_2Y_2Z_2$ служит для моделирования заданных дорожно-грунтовых условий движения. Начало координат системы, точка O_2, совпадает с началом моделируемой трассы.

Вторая, полусвязанная, система координат (ПСК) $O_1X_1Y_1Z_1$ характеризуется тем, что ее начало, точка O_1, всегда совпадает с центром масс МКМ и перемещается вместе с ним в пространстве. Оси O_1X_1, O_1Y_1, O_1Z_1 параллельны соответствующим осям несвязанной системы координат.

Третья система координат, $OXYZ$, используемая для математического описания движения МКМ, — глобальная подвижная система координат (ГПСК), ее центр O всегда совпадает с центром масс C, а оси совпадают с главными осями инерции машины.

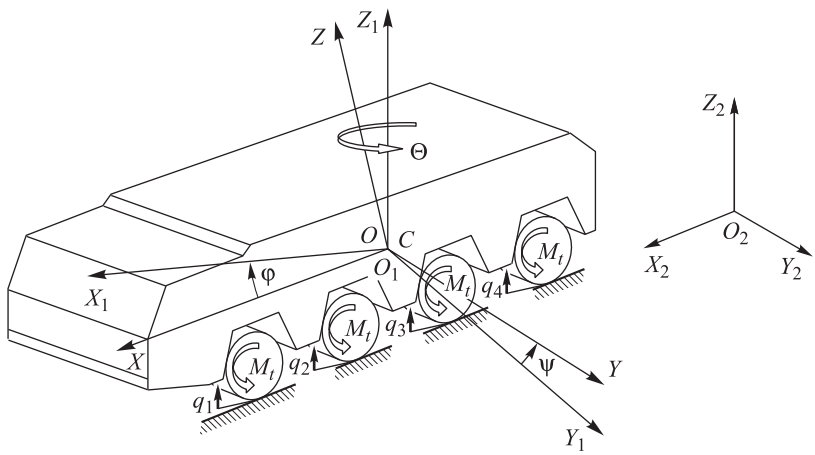


Рис. 1. Положение МКМ в пространстве

Уравнения динамики МКМ записываются в связанной системе координат, поэтому в качестве параметров движения выступают проекции линейной (V_X, V_Y, V_Z) и угловой (ω_X, ω_Y, ω_Z) скоростей на связанные оси.

Использование связанной системы координат для записи уравнений динамики МКМ определяются следующими положениями:

- будем считать, что подвижные оси с началом координат в центре масс являются главными осями инерции тела и моменты инерции относительно них не зависят от изменения кинематических параметров;
- основные внешние силы, действующие на МКМ, ориентированы по отношению к корпусу и наиболее просто выражаются в координатных осях, жестко с ним связанных.

В связи с этим форма уравнений динамики МКМ, записанных в подвижной системе координат, наиболее проста и удобна для последующего решения при достаточно полном отражении процессов взаимодействия движущегося тела и внешней среды.

Общая форма уравнений движения корпуса колесной машины. Схема сил, действующих на МКМ, приведена на рис. 2.

Первые три уравнения поступательного движения колесной машины могут быть получены на основе теоремы об изменении количества движения. Проецируя векторное выражение теоремы на оси системы *OXYZ*, получим

$$\begin{cases} m\dot{V}_{cX} + m(\omega_Y V_{cZ} - \omega_Z V_{cY}) = \sum\limits_k F_k^X; \\ m\dot{V}_{cY} + m(\omega_Z V_{cX} - \omega_{Xk}^c V_{cZ}) = \sum\limits_k F_k^Y; \\ m\dot{V}_{cZ} + m(\omega_{Xk}^c V_{cY} - \omega_Y V_{cX}) = \sum\limits_k F_k^Z, \end{cases}$$

где m — масса МКМ; F_k^x; F_k^y; F_k^z — силы, действующие на корпус МКМ.

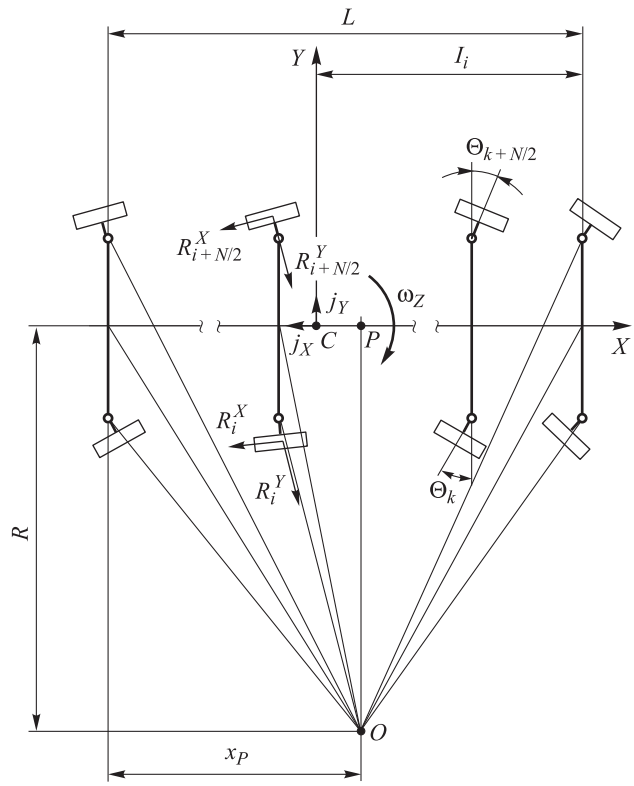


Рис. 2. Схема сил, действующих на МКМ

Уравнения динамики вращательного движения корпуса вокруг ЦМ можно получить на основе теоремы об изменении главного момента количества движения. В векторной форме для общего случая в соответствии с формулой Бура

$$\frac{\tilde{d}\mathbf{K}_0}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K}_0 = \mathbf{L}_0^{(e)},$$

где $\mathbf{K}_0 = \mathbf{J}\bar{\omega}$ — главный момент количества движения; $\frac{\tilde{d}\mathbf{K}_0}{dt}$ — локальная производная по времени от главного момента количества движения твердого тела относительно центра C [2],

$$\begin{aligned}\frac{\tilde{d}\mathbf{K}_0}{dt} = \frac{dK_X}{dt}\mathbf{I} + \frac{dK_Y}{dt}\mathbf{J} + \frac{dK_Z}{dt}\mathbf{K} = \mathbf{I}\left(J_X\frac{d\omega_X}{dt} - J_{XY}\frac{d\omega_Y}{dt} - J_{XZ}\frac{d\omega_Z}{dt}\right) + \\ + \mathbf{J}\left(-J_{YX}\frac{d\omega_X}{dt} + J_Y\frac{d\omega_Y}{dt} - J_{YZ}\frac{d\omega_Z}{dt}\right) + \mathbf{K}\left(-J_{ZX}\frac{d\omega_X}{dt} - J_{YZ}\frac{d\omega_Y}{dt} + J_Z\frac{d\omega_Z}{dt}\right);\end{aligned} \quad (1)$$

$\mathbf{L}_0^{(e)} = \sum_{k=1}^{N} \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k^{(e)}$ — главный момент внешних сил, приложенных к твердому телу, относительно того же центра.

В данном случае главный момент может быть найден с помощью третьего закона Ньютона. В проекциях на оси подвижной системы координат уравнения динамики вращательного движения корпуса вокруг ЦМ могут быть записаны в виде системы

$$\begin{cases} \dfrac{dK_X}{dt} + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K}_0)_X = L_X^{(e)}; \\ \dfrac{dK_Y}{dt} + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K}_0)_Y = L_Y^{(e)}; \\ \dfrac{dK_Z}{dt} + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K}_0)_Z = L_Z^{(e)}. \end{cases}$$

Раскрывая проекции векторного произведения $(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K}_0)$ и подставляя компоненты из (1), рассматриваемую систему динамических уравнений можно представить в виде

$$\begin{cases} J_X \dfrac{d\omega_X}{dt} - J_{XY} \dfrac{d\omega_Y}{dt} - J_{XZ} \dfrac{d\omega_Z}{dt} + J_{YZ}(\omega_Z^2 - \omega_Y^2) + \omega_Z \omega_Y (J_Z - J_Y) - \\ -\omega_X \omega_Y J_{XZ} - \omega_Z \omega_X J_{XY} = L_X^{(e)}; \\ -J_{YX} \dfrac{d\omega_X}{dt} + J_Y \dfrac{d\omega_Y}{dt} - J_{YZ} \dfrac{d\omega_Z}{dt} + J_{ZX}(\omega_X^2 - \omega_Z^2) + \omega_X \omega_Z (J_X - J_Z) - \\ -\omega_X \omega_Y J_{YZ} - \omega_Z \omega_Y J_{XY} = L_Y^{(e)}; \\ -J_{ZX} \dfrac{d\omega_X}{dt} - J_{YZ} \dfrac{d\omega_Y}{dt} + J_Z \dfrac{d\omega_Z}{dt} + J_{XY}(\omega_Y^2 - \omega_X^2) + \omega_X \omega_Y (J_Y - J_X) - \\ -\omega_X \omega_Z J_{YZ} - \omega_Z \omega_Y J_{XZ} = L_Z^{(e)}. \end{cases} \quad (2)$$

В частном случае совпадения выбранных осей с осями эллипсоида инерции корпуса система уравнений (2) принимает вид динамических уравнений Эйлера и в проекции на подвижные оси системы имеет вид

$$\begin{cases} A\dot{\omega}_X + (C - B)\omega_Y \omega_Z = L_X; \\ B\dot{\omega}_Y + (A - C)\omega_Z \omega_X = L_X; \\ C\dot{\omega}_Z + (B - A)\omega_X \omega_Y = L_X, \end{cases}$$

где A, B, C — соответствующие осевые моменты инерции тела относительно трех ортогональных главных осей инерции.

Кинематические параметры и уравнения связи поступательного движения. Поскольку оси несвязанной системы координат $O_2X_2Y_2Z_2$ параллельны осям полусвязанной системы координат $O_1X_1Y_1Z_1$, то для определения кинематических параметров поступательного движения используются матрицы линейного преобразования координат из связанной системы в полусвязанную. Эти матрицы линейного преобразования выражаются через углы Эйлера — Крылова (рис. 3):

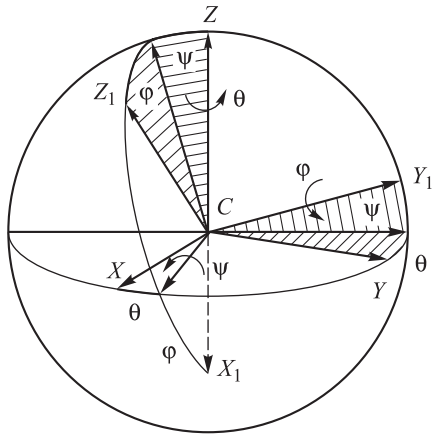


Рис. 3. Углы Эйлера — Крылова

$$\begin{bmatrix} V_{cX2} \\ V_{cY2} \\ V_{cZ2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{cX} \\ V_{cY} \\ V_{cZ} \end{bmatrix},$$

где V_{cX2}, V_{cY2}, V_{cZ2} — проекции мгновенной скорости движения на оси несвязанной системы координат; a_{ij} — направляющие косинусы; V_{cX}, V_{cY}, V_{cZ} — проекции мгновенной скорости движения центра масс на оси связанной системы координат.

В более простой форме матричные уравнения могут быть записаны следующим образом:

$$\left[V_{cX2}, V_{cY2}, V_{cZ2}\right]^{\mathrm{T}} = \left\|a_{ij}\right\| \left[V_{cX}, V_{cY}, V_{cZ}\right]^{\mathrm{T}} = \mathbf{B}\left[V_{cX}, V_{cY}, V_{cZ}\right]^{\mathrm{T}}, \ i, j = 1, 2, 3,$$

где **B** — квадратная матрица направляющих косинусов. Аналогичным образом получим проекции скорости центра масс машины на оси связанной системы координат:

$$\left[V_{cX}, V_{cY}, V_{cZ}\right]^{\mathrm{T}} = \mathrm{B}^{\mathrm{T}} \left[V_{cX2}, V_{cY2}, V_{cZ2}\right]^{\mathrm{T}}, \ i, j = 1, 2, 3.$$

Здесь

$$\mathbf{B}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad (3)$$

— транспонированная квадратная матрица направляющих косинусов. С помощью несложных преобразований можно получить сами значения направляющих косинусов:

$$
\begin{aligned}
\alpha_{11} &= \cos\theta\cos\varphi - \sin\psi\sin\varphi\sin\theta;\\
\alpha_{12} &= -\cos\psi\sin\theta;\\
\alpha_{13} &= \sin\varphi\cos\theta + \cos\varphi\sin\psi\sin\theta;\\
\alpha_{21} &= \sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi\sin\psi;\\
\alpha_{22} &= \cos\psi\cos\theta;\\
\alpha_{23} &= \sin\varphi\sin\theta - \sin\psi\cos\theta\cos\varphi;\\
\alpha_{31} &= -\cos\psi\sin\varphi;\\
\alpha_{32} &= \sin\psi;\\
\alpha_{33} &= \cos\varphi\cos\psi.
\end{aligned}
\qquad (4)
$$

Таким образом, имеем возможность определять проекции скорости движения центра масс МКМ в различных координатных системах, что значительно упрощает процесс моделирования движения объекта.

Определение взаимной ориентации микроподвижной и неподвижной координатных систем. Для определения сил, действующих на МКМ со стороны грунта, введем *микроподвижную систему координат*, под которой будем понимать систему $O_TX_TY_TZ_T$, центр которой O_T совпадает с геометрическим центром пятна контакта колеса, ось O_TX_T совпадает с проекцией продольной оси симметрии колеса на опорную поверхность, а ось O_TY_T — соответственно с проекцией оси колеса (рис. 4).

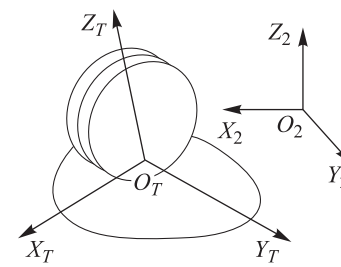


Рис. 4. Микроподвижная система координат

Для ориентации микроподвижной системы координат $O_TX_TY_TZ_T$ относительно неподвижной $O_2X_2Y_2Z_2$ используют направляющие косинусы осей микроподвижной координатной системы. Проекции любого вектора, определенные в микроподвижной системе координат, можно однозначно перевести в неподвижную и наоборот, используя матрицу преобразований с направляющими косинусами

$$
\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\alpha_x^{X_T} & \cos\alpha_x^{Y_T} & \cos\alpha_x^{Z_T} \\ \cos\alpha_y^{X_T} & \cos\alpha_y^{Y_T} & \cos\alpha_y^{Z_T} \\ \cos\alpha_z^{X_T} & \cos\alpha_z^{Y_T} & \cos\alpha_z^{Z_T} \end{vmatrix} \begin{bmatrix} x_T \\ y_T \\ z_T \end{bmatrix};
$$

$$
\left[x_2, y_2, z_2\right]^{\mathrm{T}} = \mathbf{V}\left[x_T, y_T, z_T\right]^{\mathrm{T}},
$$

где $\mathbf{V}$ — матрица преобразования.

Аналогичным образом осуществим переход из неподвижной в микроподвижную координатную систему:

$$\left[x_T, y_T, z_T\right]^{\mathrm{T}} = \mathbf{V}^{\mathrm{T}}\left[x_2, y_2, z_2\right]^{\mathrm{T}},$$
$$\mathbf{V}^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} \cos\alpha_x^{X_T} & \cos\alpha_y^{X_T} & \cos\alpha_z^{X_T} \\ \cos\alpha_x^{Y_T} & \cos\alpha_y^{Y_T} & \cos\alpha_z^{Y_T} \\ \cos\alpha_x^{Z_T} & \cos\alpha_z^{Z_T} & \cos\alpha_z^{Z_T} \end{vmatrix}. \qquad (5)$$

Представление несущей системы колесной машины как упругодеформируемого тела. При движении по неровностям многоосных колесных машин с достаточно длинной базой наблюдаются значительные перемещения крайних элементов рамы вследствие ее закручивания. Для учета данного фактора составлена модель несущей системы МКМ, представленная в виде упругодеформируемого тела, с податливостью на кручение.

Разумеется, создать адекватную и в то же время простую математическую модель, учитывающую деформации несущей системы колесной машины, невозможно. Однако для данного исследования вполне достаточно оценить на качественном уровне влияние работы управляемой системы подрессоривания на упругие колебания рамы. Поэтому в первом приближении будем рассматривать несущую систему МКМ в виде длинного стрежня, имеющего практически бесконечное сопротивление изгибу и растяжению и податливому при кручении. При колебаниях стержень нагружается сосредоточенными моментами в местах крепления подвески. При этом приняты следующие основные допущения:

- после снятия нагрузки рассматриваемая конструкция полностью восстанавливает свою геометрию, т. е. рассматривается работа в зоне упругих деформаций;
- тело считается абсолютно жестким на изгиб во всех плоскостях и на растяжение-сжатие. Вектор, соединяющий любые две точки в нормальном сечении, имеет постоянную длину при любом значении внешних нагрузок, а расстояние между любыми нормальными сечениями неизменно;
- контур поперечного сечения несущей системы принимается недеформируемым. Этот метод расчета охватывает значительную часть конструктивных модификаций рам и имеет существенно более низкую степень статической неопределимости [3].

Указанные допущения позволяют представить несущую систему в виде тонкостенного призматического стержня с открытым контуром поперечного сечения, имеющего одну ось симметрии [3]. По

длине стержня установлены поперечные жесткие в своей плоскости диафрагмы. Такой стержень при его закручивании будет следовать схеме, разработанной В.З. Власовым [4], т. е. все сечения такого стержня будут поворачиваться как жесткое целое вокруг прямой линии, являющейся геометрическим центром кручения сечений.

Большинство рамных и корпусных конструкций имеют малую толщину стенок сравнительно с характерным размером поперечного сечения. Оставаясь в пределах гипотезы жесткого контура, за характерный размер сечения примем расстояние между бортами корпуса или между лонжеронами рамы. В результате толщина несущих элементов оказывается такой, что $\frac{\delta}{2b} < 0,02$, где δ — толщина контура поперечного сечения; $2b$ — расстояние между бортами или лонжеронами [3].

В этом случае, как показано В.З. Власовым, жесткость свободного кручения GJ_d, которая выступает в качестве сомножителя перед второй производной угла закручивания в полном дифференциальном уравнении стесненного кручения

$$EJ_\omega \theta^{IV} - GJ_d \theta^{II} = M$$

как величина, пропорциональная кубу толщины, без ощутимой погрешности может быть принята равной нулю.

Это допущение равносильно пренебрежению касательными напряжениями свободного сен-венановского кручения. В результате этого дифференциальное уравнение стесненного кручения приобретает вид $EJ_\omega \theta^{IV} = M$, решение которого является более простым.

Системы координат для случая упругодеформируемой несущей системы многоосной колесной машины. В дальнейшем будем предполагать, что рассматриваемое транспортное средство симметрично в силовом и геометрическом смыслах относительно вертикальной продольной плоскости, равноудаленной от бортов. В соответствии с допущением о жестком контуре для всякой рамы или всякого корпуса можно выделить линию центров кручения (ЛЦК), т.е. такую линию, вокруг которой происходит поворот поперечных сечений несущей конструкции при ее кручении. Все узлы и агрегаты машины, в том числе и полезный груз, будут обладать относительно ЛЦК некоторыми моментами инерции. Представим условно все узлы транспортного средства в виде конечного числа сосредоточенных моментов инерции I_{k1}, I_{k2}, ..., I_{kn+1}, расположенных в местах крепления осей мостов МКМ (рис. 5). При этом k-е сечение разместим в центре масс корпуса машины.

Будем считать, что вся угловая жесткость несущей системы сосредоточена на ЛЦК, а объемные силы несущей системы отнесены к сосредоточенным моментам инерции. Кроме того, полагаем, что ЛЦК является прямой, а жесткости участков ЛЦК между соседними сосредоточенными моментами постоянны и равны соответственно χ_{12}, χ_{23}, …, $\chi_{k-1,k}$.

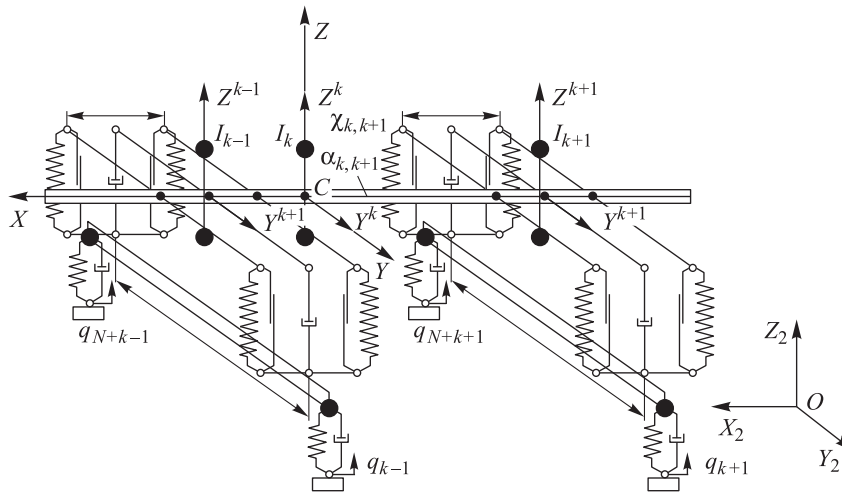


Рис. 5. Представление несущей системы МКМ в виде стержня, податливого на кручение

Ось *OX* связанной системы координат будем в дальнейшем совмещать с выделенной таким образом ЛЦК. Наряду с глобальной подвижной системой координат *OXYZ*, которая перемещается совместно с сечением, связанным с центром масс корпуса МКМ, введем $n + 1$ локальных подвижных систем координат (ЛПСК) $O^i X^i Y^i Z^i$, связанных с каждым сечением несущей системы, где приложены сосредоточенные моменты инерции. При этом ЛПСК $O^k X^k Y^k Z^k$, расположенная в центре масс МКМ, будет совпадать с ГПСК *OXYZ*.

Углы закручивания рамы в сечениях сосредоточенных моментов инерции будем рассматривать как обобщенные координаты и обозначать ψ_1, ψ_2, …, ψ_n. Кроме того, условимся считать, что производная угла закручивания $\psi'_{j,j+1}$ на участке j, $j + 1$ не зависит от производных угла закручивания на других участках. Это предположение несколько противоречит теории стесненного кручения. Однако для упрощения выкладок и получения численного результата в работе [3] рекомендовано ввести это упрощение.

При крутильных колебаниях несущей системы происходит рассеяние энергии за счет конструктивного и гистерезисного трения. Рассеяние энергии за счет конструктивного трения происходит в местах сочленения отдельных деталей и узлов как в самой несущей конструкции, так и в закрепленных агрегатах и оборудовании. Специ-

ально поставленные эксперименты [5] показали, что конструктивное трение в первом приближении можно считать пропорциональным скорости угла закручивания силовой конструкции, т. е. можно считать трение вязким. В работе [3] были получены ориентировочные данные по коэффициенту конструктивного трения, который для корпусных и рамных конструкций многоосных большегрузных автомобилей составляет $\alpha = 2{,}5 \cdot 10^4$ (Н · м · с)/рад.

Данное рассмотрение во многом схоже с представлением корпуса в виде абсолютно жесткого твердого тела. Корпус участвует в свободном движении, имеет шесть степеней свободы, характерных для абсолютно жесткого твердого тела, плюс еще *n* углов закручивания по одной оси вдоль корпуса (для каждого сечения, где расположены сосредоточенные массы и нагрузки на несущую систему). Таким образом, для описания динамики движения любой точки корпуса достаточно $6 + n$ независимых дифференциальных уравнений динамики для $6 + n$ обобщенных координат.

Кинематические параметры и уравнения связи вращательного движения. Положение МКМ в пространстве в любой момент времени определяется взаимным расположением полусвязанной и локальных подвижных координатных систем, которые характеризуются тремя угловыми координатами. Эти угловые координаты являются углами Эйлера — Крылова [6]: угол рыскания θ, угол дифферента φ, угол крена ψ_i.

Связь углов Эйлера — Крылова с другими кинематическими параметрами вращательного движения — проекциями угловой скорости на связанные оси — устанавливается на основе кинематических соотношений, называемых уравнениями связи вращательного движения:

$$\begin{cases} \omega_{x_i} = \dot{\psi}_i \cos\varphi - \dot{\theta}\cos\psi_i \sin\varphi; \\ \omega_y = \dot{\varphi} + \dot{\theta}\sin\psi_i; \\ \omega_z = \dot{\theta}\cos\varphi\cos\psi_i + \dot{\psi}_i \sin\varphi. \end{cases} \tag{6}$$

Практический интерес для расчетов представляет соотношение, определяющее скорости изменения значения углов φ, ψ_i, θ. После несложных преобразований получаем

$$\begin{cases} \dot{\psi}_i = \omega_{Xi}\cos\varphi + \omega_Z \sin\varphi; \\ \dot{\theta} = \dfrac{\omega_Z \cos\varphi - \omega_X \sin\varphi}{\cos\psi_i}; \\ \dot{\varphi} = \omega_Y - \operatorname{tg}\psi_i(\omega_Z \cos\varphi - \omega_{Xi}\sin\varphi). \end{cases} \tag{7}$$

Матрица перехода из *i*-й ЛПСК в НСК имеет следующий вид:

$$\mathbf{B}_i = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi - \sin\psi_i \sin\phi\sin\theta & -\cos\psi_i \sin\theta & \sin\phi\cos\theta + \cos\phi\sin\psi_i \sin\theta \\ \sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\phi\sin\psi_i & \cos\psi_i \cos\theta & \sin\phi\sin\theta - \sin\psi_i \cos\theta\cos\varphi \\ -\cos\psi_i \sin\varphi & \sin\psi_i & \cos\phi\cos\psi_i \end{pmatrix}, \quad (8)$$

где ψ_i — угол крена *i*-й ЛПСК; φ — угол дифферента; θ — угол курса.

Общая форма уравнений движения колесной машины с упругодеформируемой несущей системой. Используя теоремы об изменении количества движения тела и момента количества движения в проекциях на оси подвижных систем координат, получим:

$$\begin{cases}
m\dot{V}_{cX} + m(\omega_Y V_{cZ} - \omega_Z V_{cY}) = G_X + F_X + \sum_{i=1}^{2N_{oc}} R_i^X; \\
m\dot{V}_{cY} + m(\omega_Z V_{cX} - \omega_{Xk}^c V_{cZ}) = G_Y + F_Y + \sum_{i=1}^{2N_{oc}} R_i^Y; \\
m\dot{V}_{cZ} + m(\omega_{Xk}^c V_{cY} - \omega_Y V_{cX}) = G_Z + F_Z + \sum_{i=1}^{2N_{oc}} (P_i^Z + R_i^Z); \\
I_{X1}\dot{\omega}_{X1} + \omega_Y\omega_Z(I_Z - I_Y) = M_X(P_1) + M_X(P_{N_{oc}+1}) + \alpha_{12}(\omega_{X2} - \omega_{X1}) + \chi_{12}(\psi_2 - \psi_1); \\
I_{X2}\dot{\omega}_{X2} + \omega_Y\omega_Z(I_Z - I_Y) = M_X(P_2) + M_X(P_{N_{oc}+2}) - \\
-\alpha_{12}(\omega_{X2} - \omega_{X1}) + \alpha_{23}(\omega_{X3} - \omega_{X2}) - \chi_{12}(\psi_2 - \psi_1) + \chi_{12}(\psi_3 - \psi_2); \\
\ldots\ldots\ldots

локальной подвижной системы координат $O^i X^i Y^i Z^i$; $\dot{\omega}_{Xi}$ — проекция вектора углового ускорения i-го сечения несущей системы на ось X локальной подвижной системы координат $O^i X^i Y^i Z^i$; V_{cX}, V_{cY}, V_{cZ} — проекции вектора линейной скорости точки C на оси глобальной подвижной системы координат $O^k X^k Y^k Z^k$; $\dot{V}_{cX}, \dot{V}_{cY}, \dot{V}_{cZ}$ — проекции вектора ускорения точки C на оси глобальной подвижной системы координат $O^k X^k Y^k Z^k$; G_X, G_Y, G_Z — проекции вектора силы тяжести на оси глобальной подвижной системы координат $O^k X^k Y^k Z^k$; F_X, F_Y, F_Z — проекции вектора силы внешнего воздействия на оси глобальной подвижной системы координат $O^k X^k Y^k Z^k$; R_i^X, R_i^Y, R_i^Z — проекции вектора сил взаимодействия колес с грунтом на оси локальной подвижной системы координат $O^i X^i Y^i Z^i$; P_i^Z — проекция сил в подвеске на ось Z^i локальной подвижной системы координат $O^i X^i Y^i Z^i$; $M_X(F)$, $M_Y(F)$, $M_Z(F)$ — проекции момента от силы внешнего воздействия на оси глобальной подвижной системы координат $O^k X^k Y^k Z^k$; $M_X(R_i)$, $M_Y(R_i)$, $M_Z(R_i)$ — проекции момента от сил взаимодействия колес с грунтом на оси локальной подвижной системы координат $O^i X^i Y^i Z^i$; $M_X(P_i)$, $M_Y(P_i)$ — проекции момента от сил в подвеске на оси локальной подвижной системы координат $O^i X^i Y^i Z^i$; I_Y, I_Z — моменты инерции МКМ относительно осей глобальной подвижной системы координат $O^k X^k Y^k Z^k$; I_{Xi} — момент инерции i-го сечения несущей системы МКМ относительно оси X локальной подвижной системы координат $O^i X^i Y^i Z^i$; α_{ij} — коэффициент конструктивного трения участка несущей системы МКМ между сечениями i и j; χ_{ij} — угловая жесткость участка несущей системы МКМ между сечениями i и j.

Процесс передвижения колесной машины при моделировании. В математической модели движения МКМ скорость машины задается не принудительным изменением координаты центра масс кузова, а формируется моделированием процесса взаимодействия ведущих колес с опорным основанием. Это позволяет не только более адекватно представлять движение МКМ по неровностям, но и моделировать трогание машины, разгон, торможение, преодоление препятствий, процессы буксования и юза с учетом характеристик шины и сцепных свойств грунта.

В математической модели сделано допущение, что при прямолинейном движении все ведущие колеса МКМ вращаются с одинаковой постоянной угловой скоростью $\omega_к = V/r_{к0}$, где V — требуемая скорость движения МКМ; $r_{к0}$ — статический радиус колеса. При этом формируются реакции в пятне контакта колеса с грунтом (рис. 6).

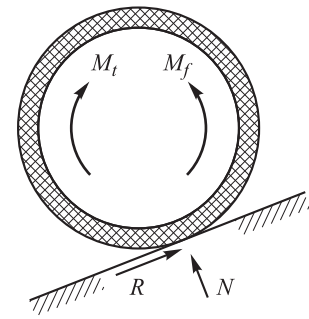


Рис. 6. Силы взаимодействия колеса с грунтом

Уравнения вращательного движения колеса:

$$J_k\dot{\omega}_k = M_t - M_f - Rr_{k0};$$

$$M_f = f_{gr}Nr_{k\partial},\ r_{k\partial} = r_{k0} - r_{\text{ш}},$$

где M_t — тяговый момент на колесе; M_f — момент сопротивления качению колеса; R — сила взаимодействия колеса с грунтом; f_{gr} — коэффициент сопротивления качению; $r_{\text{ш}}$ — прогиб шины. Поскольку рассматривается равномерное движение, то $\dot{\omega}_k = 0$, тогда

$$M_t = M_f + Rr_{k0}.$$

Величина силы взаимодействия колеса с грунтом в соответствии с [7] составит

$$R = \mu_s N, \tag{10}$$

где N — нормальная реакция; μ_s — коэффициент трения частичного скольжения,

$$\mu_s = \mu_{s\alpha\max}\left(1 - e^{-\frac{S_k}{s_0}}\right), \tag{11}$$

где $\mu_{s\alpha\max}$ — коэффициент трения полного скольжения для данного угла α поворота вектора скорости скольжения относительно оси x''; S_k — коэффициент скольжения; s_0 — константа. Данное выражение справедливо для несвязных грунтов.

Величина $\mu_{s\alpha\max}$ определяет максимальное значение функции $\mu_s(S_k)$, а в совокупности с константой s_0 — градиент функции $\mu_s(S_k)$ в начале координат. Выражение для производной от функции $\mu_s(S_k)$ в начале координат имеет вид

$$\left.\frac{d\mu_s(S_k)}{dS_k}\right|_{S_k=0} = \frac{\mu_{s\alpha\max}}{s_0}. \tag{12}$$

На рис. 7 представлены графики функции $\mu_s(S_k)$ при различных значениях $\mu_{s\alpha\max}$ и s_0 для несвязных грунтов.

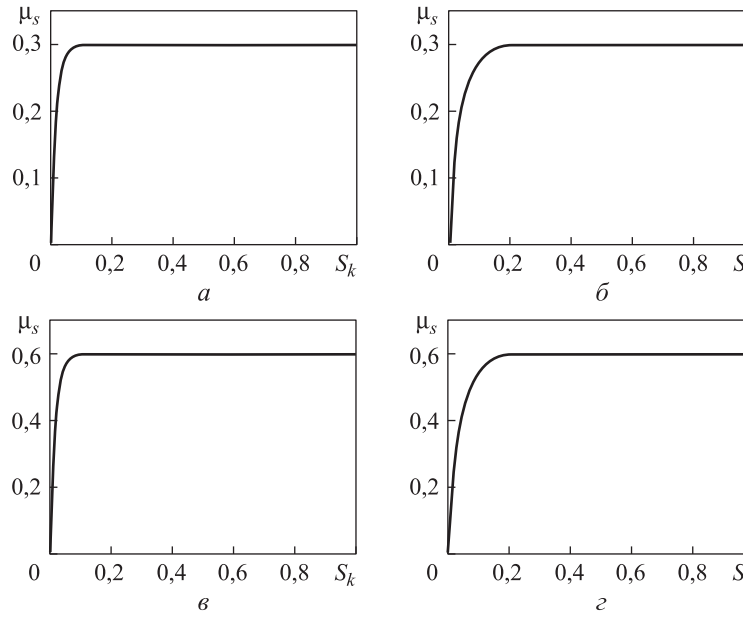


Рис. 7. Графики функции $\mu_s\left(S_k\right)$ для несвязных грунтов:

а — $\mu_{s\alpha\max} = 0{,}3$; $s_0 = 0{,}015$; *б* — $\mu_{s\alpha\max} = 0{,}3$; $s_0 = 0{,}04$;
в — $\mu_{s\alpha\max} = 0{,}6$; $s_0 = 0{,}015$; *г* — $\mu_{s\alpha\max} = 0{,}6$; $s_0 = 0{,}04$

Для связных грунтов может быть принято следующее выражение для μ_s:

$$\mu_s = \mu_{s\alpha\max}\left(1 - e^{-\frac{S_k}{s_0}}\right)\left(1 + e^{-\frac{S_k}{s_1}}\right), \tag{13}$$

где $\mu_{s\alpha\max}$ — коэффициент трения полного скольжения для данного угла α поворота вектора скорости скольжения относительно оси x''; S_k — коэффициент буксования; s_0 и s_1 — константы.

Величина $\mu_{s\alpha\max}$ определяет значение функции $\mu_s\left(S_k\right)$ при $S_k \to \infty$, а в совокупности с константами s_0 и s_1 — координаты точки экстремума функции $\mu_s\left(S_k\right)$ (s_{ex}, μ_{ex}).

Константы s_0 и s_1 можно найти из решения следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} \mu_{s\alpha\max}\left(1 - e^{-\frac{s_{ex}}{s_0}}\right)\left(1 + e^{-\frac{s_{ex}}{s_1}}\right) = \mu_{ex}; \\ \dfrac{e^{-\frac{s_{ex}}{s_0}}\left(1 + e^{-\frac{s_{ex}}{s_1}}\right)}{s_0} - \dfrac{e^{-\frac{s_{ex}}{s_1}}\left(1 - e^{-\frac{s_{ex}}{s_0}}\right)}{s_1} = 0. \end{cases} \tag{14}$$

На рис. 8 представлены графики функции $\mu_s(S_k)$ при различных значениях $\mu_{s\alpha\max}$, s_0 и s_1 для связных грунтов.

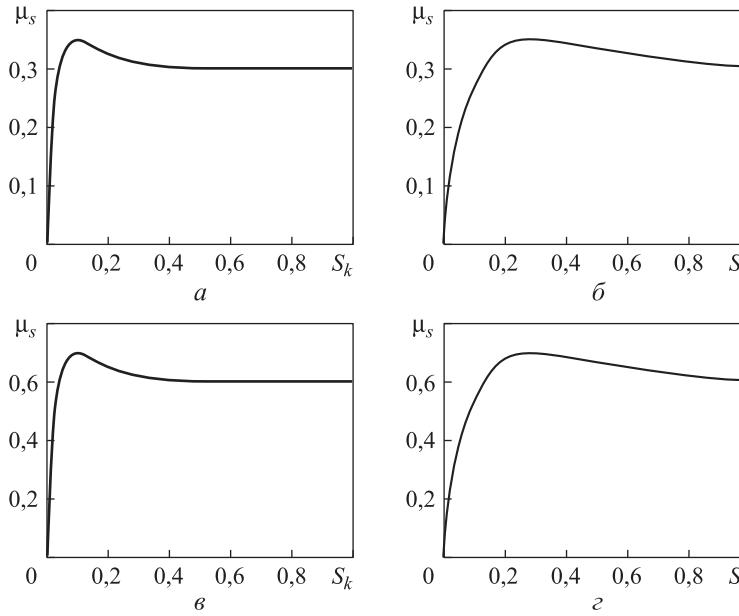


Рис. 8. Графики функции $\mu_s\left(S_k\right)$ для связных грунтов:

а — $\mu_{s\alpha\max} = 0{,}3$; $s_0 = 0{,}0458$; $s_1 = 0{,}0864$; *б* — $\mu_{s\alpha\max} = 0{,}3$; $s_0 = 0{,}1373$; $s_1 = 0{,}2593$; *в* — $\mu_{s\alpha\max} = 0{,}6$; $s_0 = 0{,}0458$; $s_1 = 0{,}0864$; *г* — $\mu_{s\alpha\max} = 0{,}6$; $s_0 = 0{,}1373$; $s_1 = 0{,}2593$

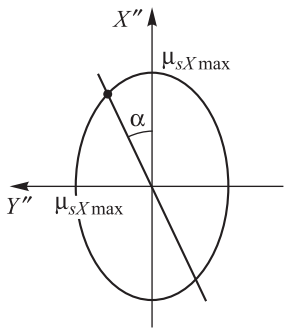


Рис. 9. Эллипс трения

Коэффициент трения полного скольжения в соответствии с представлениями об эллипсе трения [8] может быть представлен в виде

$$\mu_{s\alpha\max} = \frac{\mu_{sX\max}\mu_{sY\max}}{\sqrt{\mu_{sX\max}^2 \sin^2\alpha + \mu_{sY\max}^2 \cos^2\alpha}}, \quad (15)$$

где $\mu_{sX\max}$, $\mu_{sY\max}$ — параметры эллипса трения (рис. 9).

Коэффициент буксования

$$S_k = \frac{V_{\text{ск}}}{\omega_{\text{к}} r_{\text{к}0}}, \quad (16)$$

где $V_{\text{ск}}$ — скорость скольжения.

При прямолинейном движении $V_{ск} = V_к - \omega_к r_{к0}$, где $V_к$ — скорость оси колеса, параллельная плоскости опорной поверхности.

При моделировании движения машины могут возникнуть случаи положения колес на грунте, когда определение значения силы в шине $P_ш$ и направление α ее действия представляет отдельную задачу. Процедура решения может существенно замедлить вычислительный процесс. В связи с этим для определения $P_ш$ и α воспользуемся способом, предложенным Г.О. Котиевым [9], который позволяет избежать громоздких вычислений, а в качестве силовой характеристики амортизационного элемента колеса использовать экспериментальные зависимости вертикальной силы нагружения от вертикального прогиба и скорости прогиба шины колеса, стоящего на жесткой горизонтальной поверхности (рис. 10).

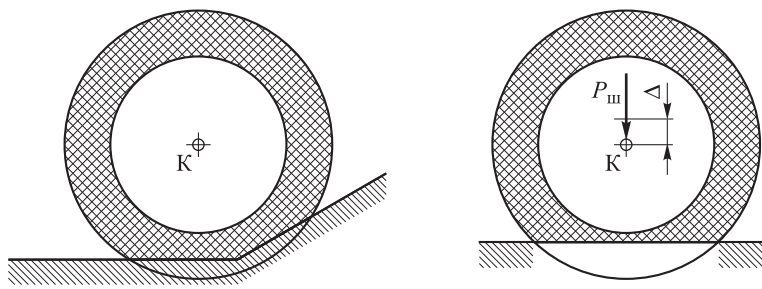


Рис. 10. Варианты положения колес на грунте

Полагая, что на вибронагруженность МКМ влияет не столько тип амортизационного элемента колеса, сколько его характеристика $P_ш = P_ш(r, \dot{r})$, при моделировании будем считать, что колеса имеют внутреннюю амортизацию, наружный контур колес радиусом $r_{к0}$ недеформируемый, а амортизирующий элемент податлив только в радиальном направлении по нормали к опорной поверхности.

Перед началом процесса моделирования кусочно-линейный профиль трассы в вертикальной плоскости под обоими бортами разбивается на зоны по специальному алгоритму [9] (рис. 11). В результате обкатывания профиля трассы колесом радиусом $r_{к0}$ без отрыва от опорного основания получаем три типа зон: I — прямоугольные, II — секторные на вершине, III — секторные во впадине.

Тогда $P_ш$ и $\alpha_{гр}$ при моделировании определяются положением и радиальной скоростью оси колеса К в зонах (см. рис. 11). В случае если ось колеса оказалась вне зон, колесо находится в отрыве: $P_ш = 0$ и $\alpha_{гр} = 0$ и при этом считается жестким целым.

На основании приведенной на рис. 11 схемы можно определить направляющие косинусы $\cos\alpha_{Xi}^{гр}$, $\cos\alpha_{Yi}^{гр}$, $\cos\alpha_{Zi}^{гр}$ нормальной реакции

N_i к плоскости опорного основания для i-го колеса, $i = 1…2N_{\text{ос}}$ ($N_{\text{ос}}$ — количество осей МКМ) [9].

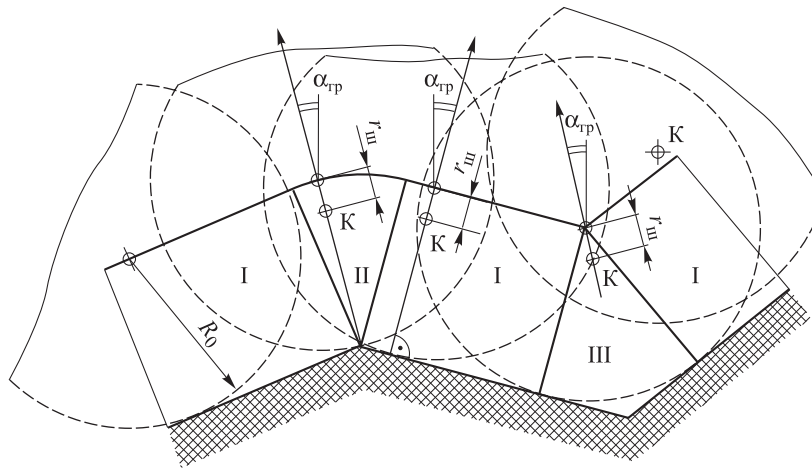


Рис. 11. Положение колеса в зонах

Направляющие косинусы оси O_TX_T микроподвижной системы координат в НСК $\cos\alpha_X^{X_T}, \cos\alpha_Y^{X_T}, \cos\alpha_Z^{X_T}$, $i = 1…2N_{\text{ос}}$, определяются следующим образом:

$$K1_i = \cos\alpha_{Yi}^{\text{гр}} B[3,2] - \cos\alpha_{Zi}^{\text{гр}} B[2,2];$$

$$L1_i = \cos\alpha_{Zi}^{\text{гр}} B[1,2] - \cos\alpha_{Xi}^{\text{гр}} B[3,2];$$

$$M1_i = \cos\alpha_{Xi}^{\text{гр}} B[2,2] - \cos\alpha_{Yi}^{\text{гр}} B[1,2];$$

$$\cos\alpha_X^{X_T} = \frac{K1_i}{\sqrt{(K1_i)^2 + (L1_i)^2 + (M1_i)^2}};$$

$$\cos\alpha_Y^{X_T} = \frac{L1_i}{\sqrt{(K1_i)^2 + (L1_i)^2 + (M1_i)^2}};$$

$$\cos\alpha_Z^{X_T} = \frac{M1_i}{\sqrt{(K1_i)^2 + (L1_i)^2 + (M1_i)^2}}.$$

Если $\left(\cos\alpha_X^{X_T} B[1,1] + \cos\alpha_Y^{X_T} B[2,1] + \cos\alpha_Z^{X_T} B[3,1]\right) < 0$, то $\cos\alpha_X^{X_T} = -\cos\alpha_X^{X_T}$; $\cos\alpha_Y^{X_T} = -\cos\alpha_Y^{X_T}$; $\cos\alpha_Z^{X_T} = -\cos\alpha_Z^{X_T}$. Здесь $B[i, j]$ — элемент матрицы **B** (см. (8)), стоящий на пересечении i-й строки и j-го столбца.

Направляющие косинусы оси O_TY_T микроподвижной системы координат в НСК $\cos\alpha_X^{Y_T}, \cos\alpha_Y^{Y_T}, \cos\alpha_Z^{Y_T}$, $i = 1…2N_{\text{ос}}$, определяются следующим образом:

$$K2_i = \cos\alpha_{yi}^{\text{гр}} \cos\alpha_Z^{X_T} - \cos\alpha_{zi}^{\text{гр}} \cos\alpha_Y^{X_T};$$
$$L2_i = \cos\alpha_{zi}^{\text{гр}} \cos\alpha_X^{X_T} - \cos\alpha_{xi}^{\text{гр}} \cos\alpha_Z^{X_T};$$
$$M2_i = \cos\alpha_{xi}^{\text{гр}} \cos\alpha_Y^{X_T} - \cos\alpha_{yi}^{\text{гр}} \cos\alpha_X^{X_T};$$

$$\cos\alpha_X^{Y_T} = \frac{K2_i}{\sqrt{(K2_i)^2 + (L2_i)^2 + (M2_i)^2}};$$
$$\cos\alpha_Y^{Y_T} = \frac{L1_i}{\sqrt{(K2_i)^2 + (L2_i)^2 + (M2_i)^2}};$$
$$\cos\alpha_Z^{Y_T} = \frac{M1_i}{\sqrt{(K2_i)^2 + (L2_i)^2 + (M2_i)^2}}.$$

Радиус-вектор точки контакта *i*-го колеса с опорной поверхностью в ПСК

$$\mathbf{R}_{mki}^{(0)} = \mathbf{B}^{\text{т}} \left(\mathbf{R}_{mki}^{(2)} - \mathbf{P}_c^{(2)} \right), \quad i = 1...2N_{\text{ос}}.$$

Радиус-вектор центра масс *i*-го колеса в ГНСК

$$\mathbf{R}_{\text{к}i}^{(2)} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{R}_{\text{к}i}^{(0)} + \mathbf{P}_c^{(2)}, \quad i = 1...2N_{\text{ос}},$$

где $\mathbf{R}_{\text{к}i}^{(0)}$ — радиус-вектор центра масс *i*-го колеса в ГПСК; $\mathbf{P}_c^{(2)}$ — радиус-вектор центра масс машины в ГНСК.

Вектор переносной скорости *i*-го колеса в ГПСК

$$\mathbf{V}_{\text{пер}i}^{(0)} = \mathbf{V}_c^{(0)} + \boldsymbol{\omega}_c^{(0)} \times \mathbf{R}_{mki}^{(0)}, \quad i = 1...2N_{\text{ос}},$$

где $\boldsymbol{\omega}_c^{(0)}$ — вектор угловой скорости вращения машины вокруг центра масс в ГПСК.

Вектор переносной скорости *i*-го колеса в НСК

$$\mathbf{V}_{\text{пер}i}^{(2)} = \mathbf{B}\mathbf{V}_{\text{пер}i}^{(0)}, \quad i = 1...2N_{\text{ос}}.$$

Вектор переносной скорости *i*-го колеса в *i*-й микроподвижной системе координат

$$\mathbf{V}_{\text{пер}i}^{\text{т}} = \left(V_i\right)^{\text{т}} \mathbf{V}_{\text{пер}i}^{(2)}, \quad i = 1...2N_{\text{ос}}.$$

Вектор относительной скорости *i*-го колеса в *i*-й микроподвижной системе координат

$$\mathbf{V}^{\text{т}}_{\text{отн}i} = \begin{pmatrix} -\omega_{\text{вкл}} r_{\text{к}14} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1...2N_{\text{ос}},$$

где $\omega_{\text{вкл}}$ — угловая скорость вращения i-го колеса, $i = 1\ldots2N_{\text{ос}}$.

Вектор скорости скольжения i-го колеса в i-й микроподвижной системе координат

$$\mathbf{V}^{\text{т}}_{\text{ск}i} = \begin{pmatrix} \mathbf{V}^{\text{т}}_{\text{пер}i}[1] + \mathbf{V}^{\text{т}}_{\text{отн}i}[1] \\ \mathbf{V}^{\text{т}}_{\text{пер}i}[2] \\ 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1...2N_{\text{ос}}.$$

Угол поворота вектора скорости скольжения $\mathbf{V}^{\text{т}}_{\text{отн}i}$ относительно оси $O_m X_m$ i-й микроподвижной системы координат α_i, $i = 1\ldots2N_{\text{ос}}$, можно описать следующим образом:

если

$$\sqrt{\left(\mathbf{V}^{\text{т}}_{\text{ск}i}[1]\right)^2 + \left(\mathbf{V}^{\text{т}}_{\text{ск}i}[2]\right)^2} \neq 0,$$

тогда

$$\cos\alpha_i = \frac{\mathbf{V}^{\text{т}}_{\text{ск}i}[1]}{\sqrt{\left(\mathbf{V}^{\text{т}}_{\text{ск}i}[1]\right)^2 + \left(\mathbf{V}^{\text{т}}_{\text{ск}i}[2]\right)^2}}; \quad \sin\alpha_i = \frac{\mathbf{V}^{\text{т}}_{\text{ск}i}[2]}{\sqrt{\left(\mathbf{V}^{\text{т}}_{\text{ск}i}[1]\right)^2 + \left(\mathbf{V}^{\text{т}}_{\text{ск}i}[2]\right)^2}},$$

иначе $\cos\alpha_i = \dfrac{\mathbf{V}^{\text{т}}_{\text{ск}i}[1]}{\sqrt{\left(\mathbf{V}^{\text{т}}_{\text{ск}i}[1]\right)^2 + \left(\mathbf{V}^{\text{т}}_{\text{ск}i}[2]\right)^2}}$; $\sin\alpha_i = 0$.

Коэффициент трения частичного скольжения i-го колеса μ_i, $i = 1\ldots2N_{\text{ос}}$:

если $\left|\mathbf{V}^{\text{т}}_{\text{отн}i}[1]\right| \neq 0$, тогда

$$\mu_i = \frac{\mu_{x\max}\mu_{y\max}}{\sqrt{\left(\mu_{x\max}\sin\alpha_i\right)^2 + \left(\mu_{y\max}\cos\alpha_i\right)^2}} \left(1 - \exp\left(-\frac{\sqrt{\left(\mathbf{V}^{\text{т}}_{\text{ск}i}[1]\right)^2 + \left(\mathbf{V}^{\text{т}}_{\text{ск}i}[2]\right)^2}}{\left|\mathbf{V}^{\text{т}}_{\text{отн}i}[1]\right| s_0}\right)\right),$$

иначе

$$\mu_i = \frac{\mu_{x\max}\mu_{y\max}}{\sqrt{\left(\mu_{x\max}\sin\alpha_i\right)^2 + \left(\mu_{y\max}\cos\alpha_i\right)^2}} \left(1 - \exp\left(-\frac{\sqrt{\left(\mathbf{V}^{\text{т}}_{\text{ск}i}[1]\right)^2 + \left(\mathbf{V}^{\text{т}}_{\text{ск}i}[2]\right)^2}}{0{,}001 s_0}\right)\right),$$

где $\mu_{x\max}$, $\mu_{y\max}$ — параметры эллипса трения; s_0 — характеристика опорного основания.

Если $\sqrt{\left(\mathbf{V}^{\text{т}}_{\text{ск}i}[1]\right)^2 + \left(\mathbf{V}^{\text{т}}_{\text{ск}i}[2]\right)^2} = 0$, тогда $\mu_i = 0$.

Уравнения динамики движения колеса относительно корпуса многоосной колесной машины. Ряд силовых факторов, определяющих движение МКМ, являются функциями нормальной реакции грунта N_i под колесами. Для определения на каждом шаге интегрирования самой нормальной реакции грунта используем математическую модель движения колеса относительно корпуса.

В процессе моделирования движения МКМ определяется деформация шины колеса. Величина усилия в шине $P_{\text{ш}i}$ определяет нормальную реакцию грунта N_i (рис. 12). Если колесо на грунте, то $N_i = P_{\text{ш}i}$, если колесо в отрыве от грунта, то $N_i = 0$.

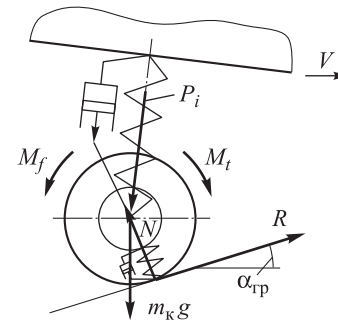


Рис. 12. Схема сил, действующих на колесо в вертикальной плоскости

Поскольку при движении относительно корпуса колеса совершают практически вертикальные перемещения, в модели примем допущение, что колеса перемещаются вертикально вдоль оси CZ_1. Процесс определения величины деформации шины непосредственно связан с моделированием перемещения колеса относительно корпуса (хода подвески), которое определяет положение колеса на грунте и, как следствие, деформацию шины. Моделирование хода подвески и определение усилия в шине вписывается в процесс общего математического моделирования динамики движения МКМ.

Чтобы моделировать движение колеса в вертикальной плоскости, необходимо располагать информацией о силовых факторах, действующих на него в каждый момент времени. В общем случае на *i*-е колесо действуют (см. рис. 12): сила со стороны подвески P_i, вес колеса $m_{\text{к}}g$ и сила инерции, сила в шине колеса (или внутреннем амортизирующем элементе) $P_{\text{ш}i}$.

Сила в подвеске складывается из упругой $\text{P}_{\text{у}i}$ и демпфирующей $P_{\text{д}i}$ составляющих сил подвески. Упругая сила подвески зависит только от относительного хода колеса f:

$$P_{\text{у}} = P_{\text{у}}(f).$$

Эта зависимость в общем случае носит нелинейный характер. Демпфирующая сила подвески, приведенная к колесу, в общем случае зависит от скорости колеса относительно корпуса и его хода:

$$P_{\text{д}} = P_{\text{д}}(f, \dot{f}).$$

Сила в шине колеса $P_{\text{ш}}$ складывается из двух составляющих — упругой $P_{\text{ш у}}$ и диссипативной $P_{\text{ш д}}$. Обе они могут быть вычислены через величину и скорость деформации шины:

$$P_{\text{ш у}} = P_{\text{ш у}}(r_{\text{ш}}); \quad P_{\text{ш д}} = P_{\text{ш д}}(\dot{r}_{\text{ш}}).$$

Упругая и диссипативная характеристики шины колеса задаются также в кусочно-линейном виде.

В итоге уравнение движения колеса относительно корпуса МКМ в проекции на ось CZ_1 имеет следующий вид:

$$m_{\text{к}} \ddot{f}_i^{Z_1} = -m_{\text{к}} g - P_i^{Z_1} + P_{\text{ш}i}^{Z_1}.$$

Разработанная математическая модель реализована в программном комплексе MATLAB/SIMULINK.

Заключение. Разработана математическая модель движения многоосной колесной машины, учитывающая упругие крутильные колебания податливой несущей системы.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Особенности математического моделирования технических устройств. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 1, с. 5–17.

[2] Димитриенко Ю.И. *Основы механики твердого тела. Т. 4: Механика сплошной среды.* Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013, 624 с.

[3] Проскуряков В.Б. *Динамика и прочность рам и корпусов транспортных машин.* Ленинград, Машиностроение, 1972, 232 с.

[4] Власов В.З. *Тонкостенные упругие стержни*. Москва, Физматгиз, 1959, 128 с.

[5] Хачатуров А.А., Афанасьев В.Л., Васильев В.С. *Расчет эксплуатационных параметров движения автомобиля и автопоезда*. Москва, Транспорт, 1982, 264 с.

[6] Котиев Г.О., Сарач Е.Б. *Комплексное подрессоривание высокоподвижных двухзвенных гусеничных машин*. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010, 184 с.

[7] Рождественский Ю.Л., Машков К.Ю. О формировании реакций при качении упругого колеса по недеформируемому основанию. *Труды МВТУ*, 1982, № 390, с. 56–64.

[8] Эллис Д.Р. *Управляемость автомобиля*. Москва, Машиностроение, 1975, 216 с.

[9] Котиев Г.О. *Прогнозирование эксплуатационных свойств систем подрессоривания военных гусеничных машин*. Дисс. … д-ра техн. наук. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. 265 с.

Статья поступила в редакцию 19.08.2015

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Жилейкин М.М., Сарач Е.Б. Математическая модель движения многоосной колесной машины с податливой на кручение несущей системой. *Математическое моделирование и численные методы*, 2015, № 3, с. 17–40.

Жилейкин Михаил Михайлович — д-р техн. наук, профессор кафедры «Колесные машины» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: jileykin_m@mail.ru

Сарач Евгений Борисович — д-р техн. наук, профессор кафедры «Гусеничные машины» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: sarach@yandex.ru

Mathematical model of movement of the multi-wheeled vehicles with torsional flexible bearing system

© M.M. Zhileykin, E.B. Sarach

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

Within the framework of solving the problem of active control of the elastic and damping elements of multi-wheeled vehicle (MWV) suspension brackets investigating the properties of suspension bracket families designed both for different travels and for different loading is of great importance. Their kinematic schemes can be also rather various. It is not feasible to collect the required amount of information for families of vehicles of different design and operating characteristics. Performing a full analytical study to determine the appropriate characteristics is not possible. This problem could be successfully solved only by simulation. A mathematical model of the MWV motion is developed. The characteristic feature of the model is that the vehicle speed is not set forcedly, but it is generated by the interaction of the rotating wheeled propellers with the supporting base. It results in high accuracy in modeling real processes of MWV moving along an uneven road. The developed model can be applied to research various laws of multi-wheeled vehicle suspension bracket control.

Keywords: *mathematical model, rectilinear motion of multi-wheeled vehicle, differential equations, simulation, dynamics equations, equations of kinematic relations.*

REFERENCES

[1] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye menody – Mathematical Modeling and Numerical Methods*, 2014, no. 1, pp. 5–17.

[2] Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika sploshnoi sredy. Tom 4* [Continuum Mechanics. Vol. 4]. *Osnovy mekhaniki tverdogo tela* [Fundamentals of Solid Mechanics]. Moscow, BMSTU Publ., 2013, 624 p.

[3] Proskuryakov V.B. *Dinamika i prochnost ram i korpusov transportnykh mashin* [Dynamics and Strength of the Frames and Enclosures of Transport Vehicles]. Leningrad, Mashinostroenie Publ., 1972, 232 p.

[4] Vlasov C.H. *Tonkostennye uprugie sterzhni* [Thin-Walled Elastic Rods]. Moscow, Fismatlit Publ., 1959, 128 p.

[5] Khachaturov A.A., Afanasyev V.L., Vasilyev V.C. *Raschet ekspluatatsionnykh parametrov dvizheniya avtomobilya i avtopoezda* [Calculation of Operational Parameters of the Vehicle and Road Train]. Moscow, Transport Publ., 1982, 264 p.

[6] Kotiev G.O., Sarach E.B. *Kompleksnoe podressorivanie vysokopodvizhnykh dvukhzvennykh gusenichnykh mashin* [Integrated Cushioning Highly Mobile Double-Link Tracked Vehicle]. Moscow, BMSTU Publ., 2010, 184 p.

[7] Rozhdestvenskiy Yu.L., Mashkov K.Yu. O formirovanii reaktsiy pri kachenii uprugogo kolesa po nedeformiruemomu osnovaniyu [On the Formation of the Reactions When Rolling an Elastic Wheel on a Rigid Base]. *Trudy MVTU — Proceedings of the Bauman Higher Technical School*, 1982, no. 390, pp. 56–64.

[8] Ellis J.R. *Upravlyaemost avtomobilya* [Controllability of the Car]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1975, 216 p. [In Russian].

[9] Kotiev G.O. *Prognozirovanie ekspluatatsionnykh svoystv system podressorivaniya voennykh gusenechnykh mashin* [Predicting Performance of the Suspension Systems of Military Tracked Vehicles]. Doctor of Engineering Sciences Thesis. Moscow, Bauman Moscow State Technical University, 2000, 265 p.

Zhileykin M.M., Dr. Sci. (Eng.), Professor of Engineering, Department of Wheeled Vehicles at Bauman Moscow State Technical University. e-mail: jileykin_m@mail.ru

Sarach E.B., Dr. Sci. (Eng.), Professor of Engineering, Department of Caterpillar Vehicles at Bauman Moscow State Technical University. e-mail: sarach@yandex.ru