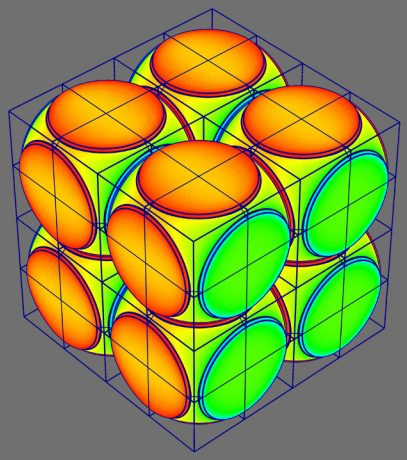
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Дубровин В. М., Бутина Т. А. Моделирование устойчивости сжатого и скрученного стержня в точной постановке задачи. Математическое моделирование и численные методы, 2015, №3 (7), с. 3-16

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/54/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.216.101
09.01.2026 04:48:03

УДК 539.384

Моделирование устойчивости сжатого и скрученного стержня в точной постановке задачи

© В.М. Дубровин, Т.А. Бутина

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Предложен метод расчета устойчивости стержня при одновременном действии осевой силы и крутящего момента, учитывающий изменение кручения стержня при его искривлениях и основанный на использовании полной системы уравнений. Рассмотрены случаи: стержень с заделанными концами, стержень с шарнирными опорами, стержень в виде сжатой и скрученной консоли. Получены графики зависимости критической осевой силы от критического крутящего момента, т. е. определена область устойчивости стержня для рассматриваемого случая нагружения.

Ключевые слова: *стержень, сжатие, кручение, устойчивость, изгибная жесткость, критическая сила, крутящий момент.*

Исследование устойчивости скрученного стержня произвольной формы поперечного сечения при различных граничных условиях показывает, что величина расхождения результатов точного и приближенного решений зависит не только от соотношения главных изгибных жесткостей стержня, но и от формы его поперечного сечения, характеризуемого параметром λ. В работах [1, 2] показано, что если A и B — главные изгибные жесткости стержня, то это расхождение не превышает 15 % при выполнении условий

$$\begin{gathered} 0,45 \le \frac{B}{A} \le 1 \ \text{ при } \ \lambda = 0,5; \quad 0,55 \le \frac{B}{A} \le 1 \ \text{ при } \ \lambda = 0,9; \\ 0,65 \le \frac{B}{A} \le 1 \ \text{ при } \ \lambda = 1,27; \quad 0,75 \le \frac{B}{A} \le 1 \ \text{ при } \ \lambda = 1,5. \end{gathered} \tag{1}$$

Следовательно, приближенная постановка задачи об устойчивости скрученного стержня практически возможна при значениях $\frac{B}{A}$, лежащих в пределах $0,65 \le \frac{B}{A} \le 1$.

В общем случае одновременного действия крутящего момента и осевой силы, приложенных к концам стержня с неравными изгибными жесткостями, необходимо оценить расхождение результатов точ-

ного и приближенного решений во всем диапазоне изменений соотношения критических нагрузок. При решении задачи в точной постановке следует использовать систему уравнений [3–7]:

$$
\begin{aligned}
&\frac{dV_x}{ds} - \tau V_y + \frac{M_y}{B} V_z = 0;\\
&\frac{dM_x}{ds} - \tau \frac{B-C}{B} M_y - V_y = 0;\\
&\frac{dV_y}{ds} + \tau V_x - \frac{M_x}{A} V_z = 0;\\
&\frac{dM_y}{ds} + \tau \frac{A-C}{A} M_x + V_x = 0;\\
&\frac{dM_x}{ds} - \tau \frac{B-C}{B} M_y - V_y = 0; \quad \frac{dV_z}{ds} = 0;\\
&\alpha = -\frac{d\vartheta}{ds} - \tau u; \quad \beta = \frac{du}{ds} - \tau\vartheta;\\
&M_x = A\left(\frac{d\alpha}{ds} - \tau\beta\right); \quad M_y = B\left(\frac{d\beta}{ds} + \tau\alpha\right);\\
&M_z = C\left(\tau + \frac{d\gamma}{ds}\right); \quad \frac{dw}{ds} = 0.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Здесь V_x, V_y — перерезывающие силы в направлении осей x и y; V_z — осевое усилие; M_x, M_y — изгибающие моменты в направлении осей x и y; M_z — крутящий момент; u, ϑ — прогибы по осям x и y; w — перемещение произвольного сечения стержня при осевой деформации; τ — кручение стержня; C — жесткость стержня при кручении; α, β, γ — углы поворота триэдра осей x, y, z вокруг осей x_0, y_0, z_0; ds — элемент длины стержня.

Полагаем, что $w = 0$ и $\frac{d\gamma}{ds} = 0$. Из уравнений $\frac{dM_x}{ds} - \tau \times \times \frac{B-C}{B} M_y - V_y = 0$, $\frac{dV_z}{ds} = 0$ и условий статики на концах стержня получаем $V_z = -P = \text{const}$, $M_z = M = \text{const}$, где P — осевая сила; M — крутящий момент, приложенные к концам стержня. Осевому сжатию стержня соответствует $P > 0$, растяжению — $P < 0$.

Совместное интегрирование уравнений (2) дает выражения перемещений u и ϑ, углов поворота α и β и изгибных моментов M_x и M_y.

Рассмотрим задачу устойчивости прямолинейной формы равновесия сжатого и скрученного стержня с заделанными концами. Для этого разместим начало координат в середине оси стержня и обозначим длину стержня через l. Тогда получим граничные условия: $u = 0$, $\vartheta = 0$, $\alpha = 0$, $\beta = 0$, при которых характеристические уравнения могут быть представлены в следующем виде:

$$\begin{aligned}
&(\mu_1 q_2 - \mu_2 q_1)(1+\cos\tau l)\sin m_1 l \sin m_2 l + \left[q_1 p_2 l - (\mu_1 p_2 - \lambda_2 q_1)\sin\tau l\right]\sin m_1 l \cos m_2 l - \\
&-\left[p_1 q_2 l - (p_1\mu_2 - q_2\lambda_1)\sin\tau l\right]\cos m_1 l \sin m_2 l + (\lambda_1 p_2 - \lambda_2 p_1)(1-\cos\tau l)\cos m_1 l \cos m_2 l = 0; \\
&-(p_1\lambda_2 - p_2\lambda_1)(1+\cos\tau l)\sin m_1 l \cos m_2 l + \left[p_1 q_2 l + (p_1\mu_2 - \lambda_1 q_2)\sin\tau l\right]\sin m_1 l \cos m_2 l - \\
&-\left[q_1 p_2 l + (\mu_1 p_2 - \lambda_2 q_1)\sin\tau l\right]\cos m_1 l \sin m_2 l + (\mu_1 q_2 - \mu_2 q_1)(1-\cos\tau l)\cos m_1 l \cos m_2 l = 0.
\end{aligned} \tag{3}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
&2m_{1,2} = \sqrt{\frac{c_0 + \left(\sqrt{a_0} - \sqrt{b_0}\right)^2}{2}} \pm \sqrt{\frac{c_0 + \left(\sqrt{a_0} - \sqrt{b_0}\right)^2}{2}}; \\
&p_1 = \frac{A\tau\chi_1 - 2m_1 B}{\left(\tau^2 - 4m_1^2\right)AB}; \quad p_2 = \frac{A\tau\chi_2 - 2m_2 B}{\left(\tau^2 - 4m_2^2\right)AB}; \\
&q_1 = \frac{2m_1 p_1 A - 1}{\tau A}; \quad q_2 = \frac{2m_2 p_2 A - 1}{\tau A};
\end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 = -\frac{2m_1 q_1 + \tau p_1}{\tau^2 - 4m_1^2}; \quad \lambda_2 = -\frac{2m_2 q_2 + \tau p_2}{\tau^2 - 4m_2^2}; \\
&\mu_1 = -\frac{2m_1 p_1 + \tau q_1}{\tau^2 - 4m_1^2}; \quad \mu_2 = -\frac{2m_1 p_2 + \tau q_2}{\tau^2 - 4m_2^2}; \\
&a_0 = \frac{P - (A-C)\tau^2}{2B}; \quad b_0 = \frac{P - (B-C)\tau^2}{2A}; \quad c_0 = \frac{(A+B-C)^2\tau^2}{2AB};
\end{aligned} \tag{5}$$

$$\sigma_1 = \frac{2B}{(2B-C)\tau}\left(\frac{a_0 B}{2m_1 A} - m_1\right); \quad \sigma_2 = \frac{2B}{(2B-C)\tau}\left(\frac{a_0 B}{2m_2 A} - m_2\right). \tag{6}$$

При решении уравнений (3) введены обозначения:

$$\varphi = m_1 l; \quad \Theta = \tau l, \tag{7}$$

а также

$$k = \frac{B}{A}; \quad m = \frac{m_2}{m_1}; \quad \omega = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}; \quad \lambda = C\left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B}\right). \tag{8}$$

Величины k, φ, λ и Θ могут быть только вещественными, а параметры m и ω — как вещественными, так и мнимыми, причем вещественным m соответствуют вещественные ω, мнимым m — мнимые ω.

Можно показать, что вещественные значения m и ω лежат в пределах $-1 < m < 1$, $-\infty < \omega < \infty$, при этом знаки m и ω всегда совпадают, и уравнения (3) достаточно решить при $m > 0$, $\omega > 0$, $0 \le k \le 1$, $0 \le \lambda \le 1{,}5$.

При каждой комбинации значений k, λ, m можно вычислить соответствующие значения ω, σ_1, σ_2 и решением уравнений (3) найти наименьший положительный корень φ_k, которому будет соответствовать определенное сочетание критических значений осевой силы P_k и крутящего момента M_k, определяемых по формулам [8–11]:

$$P_k = f_q \left(\frac{\varphi_k}{\varphi_p} \right)^2 P_0; \; M_k = f_m \left(\frac{\varphi_k}{\varphi_p} \right)^2 M_0, \tag{9}$$

где

$$f_q = \frac{1 + m^2 - (1-\varepsilon)T}{1+k}; \quad f_m = \frac{(1+k)\sqrt{kT}}{(1+k)^2 - \lambda k}; \tag{10}$$

P_0 — критическая сила при чистом сжатии стержня; M_0 — критический крутящий момент при чистом кручении стержня; φ_p — наименьший положительный корень характеристических уравнений при чистом сжатии; φ_k — наименьший положительный корень характеристических уравнений при чистом кручении;

$$\varepsilon = \frac{(1 + k^2 - k\lambda)(1+k)^2}{\left[(1+k)^2 - k\lambda \right]^2}; \tag{11}$$

$$T = 1 + m^2 + \frac{m(\omega - m)}{k(1 - m\omega)} + \frac{km(1 - m\omega)}{\omega - m}. \tag{12}$$

При мнимых m и ω, полагая $m = i\mu$, $\omega = i\eta$, вводим в уравнения (3) и в формулы (10) и (12) вещественные величины μ и η. При этом уравнения (3) видоизменяются, а формулы (10) сохраняют свой вид неизменным, за исключением выражений для f_q и T, которые принимают форму

$$f_q = \frac{1 - \mu^2 - (1-\varepsilon)T_1}{1+k}; \; T_1 = 1 - \mu^2 - \frac{\mu(\eta - \mu)}{k(1 + \mu\eta)} + \frac{k\mu(1 + \mu\eta)}{\eta - \mu}.$$

Можно показать, что значения μ лежат в пределах

$$\sqrt{n-1}-\sqrt{n} \le \mu \le \sqrt{n}-\sqrt{n-1},$$

где $n = F + \dfrac{kF^2}{(1-k)^2}$; $F = \left(2 - \dfrac{\lambda}{1+k}\right)\left(2 - \dfrac{k\lambda}{1+k}\right)$.

Характеристические уравнения (3) достаточно решать при положительных значениях μ, лежащих в пределах $0 \le \mu \le \sqrt{n}-\sqrt{n-1}$.

Как и в случае вещественных m, при каждой комбинации значений k, λ, m решением характеристических уравнений можно найти наименьший корень φ_k, которому будет соответствовать определенное сочетание критических значений P_k и M_k, отличное от всех возможных их сочетаний, найденных при вещественных значениях m.

При каждом значении k по совокупности найденных и мнимых m и заданных λ сочетаний P_k и M_k можно построить семейство кривых, характеризующих изменение величины критической силы P_k в зависимости от величины M_k и формы поперечного сечения стержня. Характер изменения величин P_k и M_k при некоторых значениях k и λ представлен на рис. 1, где по оси абсцисс отложены величины отношений критического крутящего момента M_k к его значению при чистом кручении M_0, по оси ординат — величины отношения критической осевой силы P_k к ее значению при чистом осевом сжатии. Это позволяет определить область устойчивости стержня при рассматриваемом нагружении [12–14].

Из графиков видно, что на начальных участках кривых критическая сила возрастает с увеличением величины момента, оставаясь больше критической силы при чистом осевом сжатии. При этом экстремальное значение приращения критической силы тем больше, чем меньше величина параметра λ и отношение главных изгибных жесткостей стержня $k = \dfrac{A}{B}$, и наступает тем позже, чем больше λ и k. С увеличением растягивающей силы величина критического крутящего момента M_k возрастает.

Следует иметь в виду, что в случае сжатого и скрученного стержня с заделанными концами максимальное значение критической силы при всех $k < 1$ и рассмотренных значениях λ больше критической силы при чистом сжатии, тогда как в случаях стержня с шарнирными опорами это имеет место только при малых значениях k и λ. Указанные свойства скрученного стержня могут быть использованы при проектировании конструкций, работающих при совместном действии осевой силы и крутящего момента.

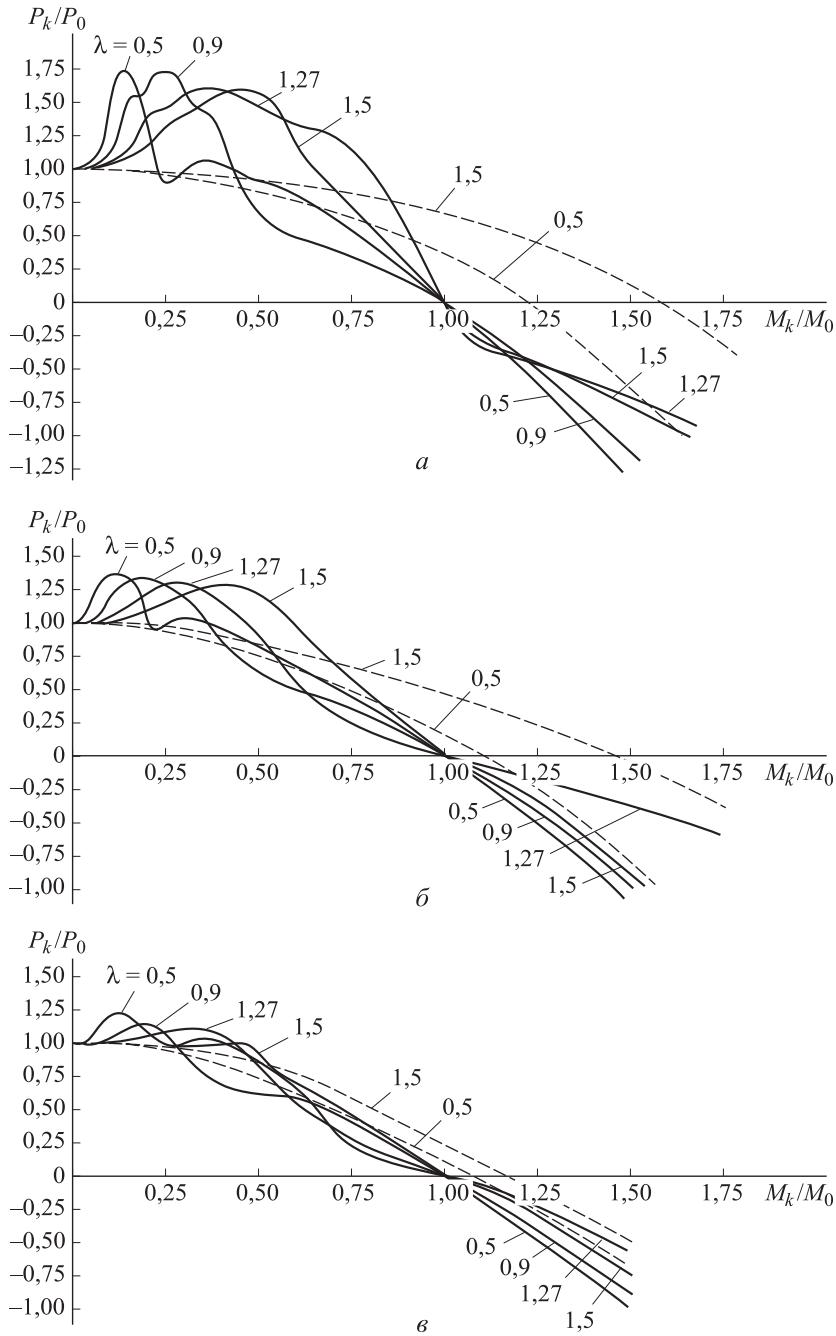


Рис. 1. Графики изменения критических нагрузок при совместном действии осевой силы и крутящего момента для стержня с заделанными концами при $k = 0{,}3$ (*а*); $k = 0{,}5$ (*б*); $k = 0{,}7$ (*в*)

На рис. 2 представлены графики изменения критического угла закручивания Θ_k в зависимости от отношения $\dfrac{M_k}{M_0}$ при различных λ.

Эти данные позволяют оценить влияние угла закручивания на работоспособность конструкции.

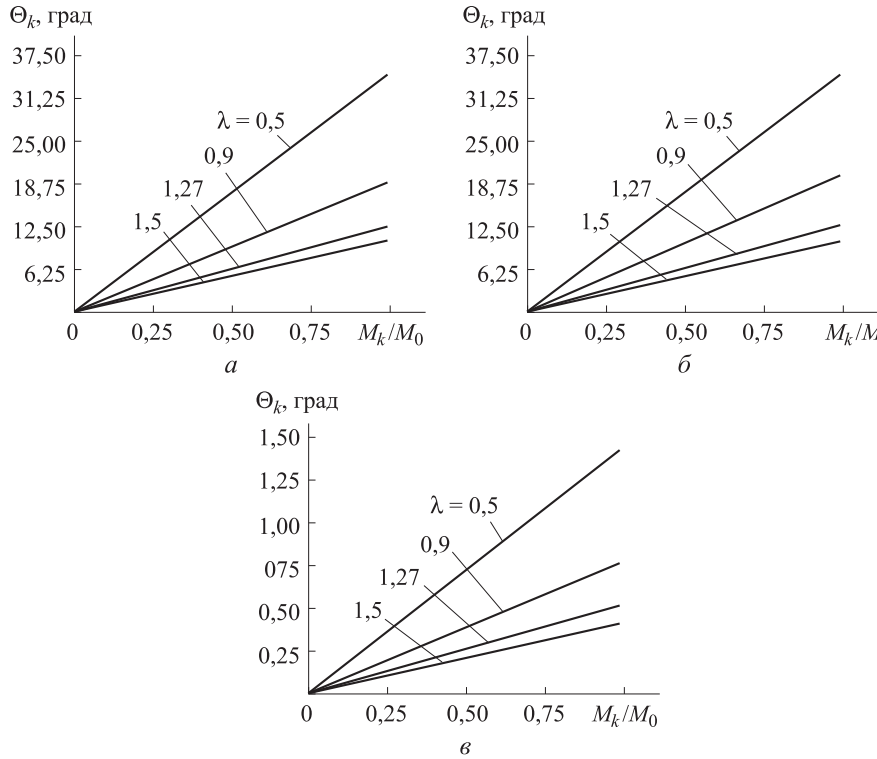


Рис. 2. Графики изменения критического угла закручивания стержня с заделанными концами при $k = 0{,}3$ (*а*); $k = 0{,}5$ (*б*); $k = 0{,}7$ (*в*)

Для оценки величин расхождения результатов точного и приближенного решений при совместном действии осевой силы и крутящего момента формулы критических нагрузок точного и упрощенного решений представим в следующем виде:

$$P_k = \chi_q P_0; \;\; M_k = \chi_m M_0; \tag{13}$$

$$Q_k = \eta_q P_0; \;\; K_\eta = \eta_m M_0, \tag{14}$$

где

$$\chi_q = f_q \left(\frac{\varphi_k}{\kappa_p} \right)^2; \;\; \chi_m = f_m \frac{\varphi_k}{\varphi_M}; \tag{15}$$

$$\eta_q = \frac{c}{\sqrt{k}} \left(\frac{\psi_k}{\varphi_p} \right)^2; \;\; \eta_m = \frac{(1-c)(1+k)\psi_k}{\lambda \varphi_M \sqrt{k}} \sqrt{1 - \frac{c\left(1-\sqrt{k}\right)^2}{(1-c)^2 \sqrt{k}}}; \tag{16}$$

φ_k — наименьший положительный корень характеристических уравнений приближенного решения при совместном действии осевой силы Q и крутящего момента K;

$$c = -\frac{r_2}{r_1},\ 2r_{1,2} = \sqrt{\frac{K^2 + Q\left(\sqrt{A} - \sqrt{B}\right)^2}{4AB}} \pm \sqrt{\frac{K^2 + Q\left(\sqrt{A} + \sqrt{B}\right)^2}{4AB}}; \quad (17)$$

f_q и f_m определяются по формулам (10).

Искомые расхождения результатов определяются по критической длине стержня при использовании соотношения

$$\frac{l_k - l_1}{l_k} = \frac{1-\nu}{\nu} - \frac{\sqrt{\chi_m^2 + \chi_q} - \sqrt{\eta_m^2 + \eta_q}}{\sqrt{\chi_m^2 + \chi_q}}, \quad (18)$$

где l_k, l_1 — критические длины стержня соответственно при точном и приближенном решениях.

Расчеты по формуле (18) показывают, что при k = 0,7 наибольшие расхождения результатов составляют 8 % при λ = 0,5 и 12,7 % при λ = 1,5.

Расхождения результатов по осевой силе и крутящему моменту представлены на рис. 1, где пунктирные линии характеризуют изменение критических нагрузок Q_k и K_k, найденных приближенным решением задачи при λ = 0,5 и λ = 1,5. Как следует из этих графиков, расхождение результатов точного и приближенного решений уменьшается с приближением отношения $\frac{B}{A}$ к единице.

Расчеты по формулам $\frac{P_k - Q_k}{P_k} = \frac{\chi_q - \eta_q}{\chi_q}$ для осевой силы и $\frac{M_k - K_k}{M_k} = \frac{\chi_m - \eta_m}{\chi_m}$ для крутящего момента показывают, что при $\frac{B}{A} = 0,7$ наибольшие расхождения результатов составляют: по максимуму осевой силы — 15,5 % при λ=0,5 и 20 % при λ = 1,5; по максимуму крутящего момента — 4,6 % при λ = 0,5 и 20 % при λ = 1,5. Таким образом, учитывая, что в практических задачах λ = 1,2…1,3, приближенная постановка задачи при совместном действии осевой силы и крутящего момента приводит к результату с точностью 10…15 % при выполнении условия $0,65 \le \frac{B}{A} \le 1$.

При осевом и следящем моментах исследование устойчивости сжатого и скрученного стержня с шарнирными опорами в приближенной постановке задачи приводит к одному и тому же результату. Представляет интерес, сохранится ли такое же совпадение результатов при решении в точной постановке. В случае следящего момента задача рассмотрена в работах [1, 2]. Рассмотрим ее в случае осевого направления вектора момента.

Подставим выражения для перемещений u и ϑ, изгибающих моментов M_x и M_y и углов поворота α и β, полученных интегрированием уравнений (2), в граничные условия

$$u = 0;\ \ \vartheta = 0;\ \ M_x = -\beta M;\ M_y = \alpha M \ \text{ при } \ s = \pm\frac{l}{2}.$$

После некоторых преобразований приходим к характеристическим уравнениям

$$\begin{aligned}
&\frac{l}{2}\left(p_1M-\sigma_1\right)\left(1+q_2M\right)\sin m_1l\cos m_2l-\frac{l}{2}\left(1+q_1M\right)\left(p_2M-\sigma_2\right)\cos m_1l\sin m_2l+\\
&+M\left(\lambda_2\sin m_2l\cos\frac{\tau l}{2}-\mu_2\cos m_2l\sin\frac{\tau l}{2}\right)\left[\left(1+q_1M\right)\cos m_1l\sin\frac{\tau l}{2}-\left(p_1M-\sigma_1\right)\sin m_1l\cos\frac{\tau l}{2}\right]-\\
&-M\left(\lambda_1\sin m_1l\cos\frac{\tau l}{2}-\mu_1\cos m_1l\sin\frac{\tau l}{2}\right)\left[\left(1+q_2M\right)\cos m_2l\sin\frac{\tau l}{2}-\left(p_2M-\sigma_2\right)\sin m_2l\cos\frac{\tau l}{2}\right]=0;\\
&-\frac{l}{2}\left(1+q_1M\right)\left(p_2M-\sigma_2\right)\sin m_1l\cos m_2l+\frac{l}{2}\left(1+q_2M\right)\left(p_1M-\sigma_1\right)\cos m_1l\sin m_2l+\\
&+M\left(\lambda_2\cos m_2l\sin\frac{\tau l}{2}-\mu_2\sin m_2l\cos\frac{\tau l}{2}\right)\left[\left(p_1M-\sigma_1\right)\cos m_1l\sin\frac{\tau l}{2}-\left(1+q_2M\right)\sin m_1l\cos\frac{\tau l}{2}\right]-\\
&-M\left(\lambda_1\cos m_1l\sin\frac{\tau l}{2}-\mu_1\sin m_1l\sin\frac{\tau l}{2}\right)\left[\left(p_2M-\sigma_2\right)\cos m_2l\sin\frac{\tau l}{2}-\left(1+q_2M\right)\sin m_2l\cos\frac{\tau l}{2}\right]=0.
\end{aligned}\tag{19}$$

Здесь обозначения те же, что и в формулах (4)–(6).

Расчеты показывают, что при решении задачи в точной постановке при осевом и следящем моментах результаты отличаются незначительно, особенно вблизи наибольших значений критических осевых сил и при растяжении стержня, а при чистом кручении и чистом сжатии совпадают.

На рис. 3 приведены графики зависимости отношений $\dfrac{M_k}{M_0}$ и $\dfrac{P_k}{P_0}$ при $\lambda = 0{,}5$ и $\lambda = 1{,}5$ для $k = 0{,}1$ и $k = 0{,}3$. На этих графиках сплошные линии соответствуют осевым моментам, пунктирные — следящим моментам. Как следует из представленных графиков, с приближением отношения $\dfrac{B}{A}$ к единице расхождение результатов уменьшается. Отсюда следует, что в случае стержня с шарнирными опорами при

решении задачи в точной постановке можно ограничиться рассмотрением или осевого, или тангенциального направления момента. Как показано в работах [1–3], при следящем моменте характеристические уравнения имеют более простой вид и поэтому целесообразно решать задачу, используя эти уравнения. В случае сжатой и скрученной консоли с неравными изгибными жесткостями можно использовать метод малых колебаний.

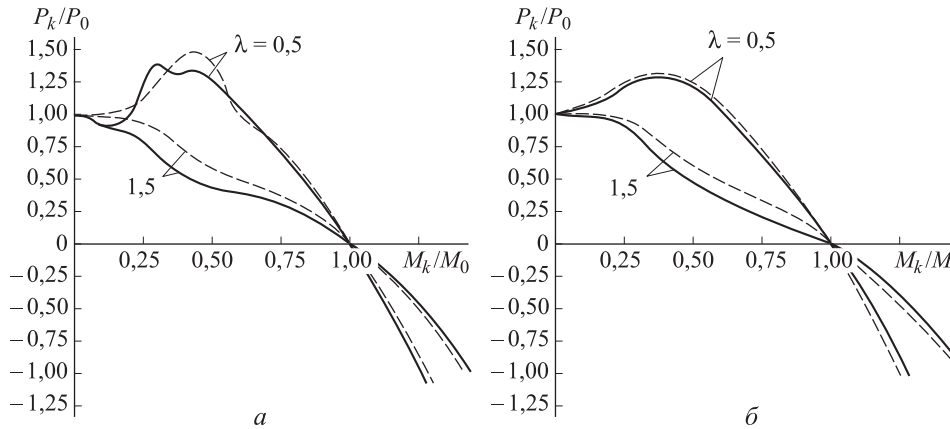


Рис. 3. Графики изменения критических нагрузок при совместном действии осевой силы и крутящего момента для стержня с шарнирными опорами при $k = 0{,}1$ (*а*); $k = 0{,}3$ (*б*)

С учетом массы стержня эта задача в случае консоли решается без ограничения соотношений главных изгибных жесткостей с помощью следующих уравнений [1]:

$$A\frac{\partial^4 \vartheta}{\partial s^4} - M\frac{\partial^3 u}{\partial s^3} + P\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial s^2} + \rho F\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2} = 0;$$
$$B\frac{\partial^4 u}{\partial s^4} + M\frac{\partial^3 \vartheta}{\partial s^3} + P\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \rho F\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \qquad (20)$$

где ρF — масса стержня.

Как показано в работе [2], уравнениями (20) можно пользоваться для решения поставленной задачи только при выполнении условия $0{,}65 \le \frac{B}{A} \le 1$ и малых значениях кручения τ.

В общем случае при произвольных соотношениях главных изгибных жесткостей стержня уравнения колебаний могут быть получены на основании уравнений (2). При этом будем иметь следующие соотношения [1]:

$$
\begin{aligned}
&A\frac{\partial^4\vartheta}{\partial s^4}+\tau\left[2(A+B)-C\right]\frac{\partial^3 u}{\partial s^3}+\left[P-\tau^2(2A+4B-3C)\right]\frac{\partial^2\vartheta}{\partial s^2}+\\
&+\tau\left(2P-\tau^2\left[2(A+B)-3C\right]\right)\frac{\partial u}{\partial s}-\tau^2\left[P-(A-C)\tau^2\right]\vartheta+\rho F\frac{\partial^2\vartheta}{\partial t^2}=0;\\
&B\frac{\partial^4\vartheta}{\partial s^4}+\tau\left[2(A+B)-C\right]\frac{\partial^3\vartheta}{\partial s^3}+\left[P-\tau^2(2B+4A-3C)\right]\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\\
&-\tau\left(2P-\tau^2\left[2(A+B)-3C\right]\right)\frac{\partial\vartheta}{\partial s}-\tau^2\left[P-\tau^2(B-C)\right]u+\rho F\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0.
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Здесь обозначения те же, что и в формулах (2).

При решении уравнений (21) необходимо использовать соотношения (7) и (8).

Предложенная методика оценки устойчивости сжатого и скрученного стержня позволяет получать точную оценку для различных способов закрепления стержня: с заделанными концами, с шарнирными опорами, в виде консоли.

Использование полной системы уравнений, выражающих компоненты деформаций стержня в соответствии с действующими на него нагрузками, дает возможность получить как точную, так и приближенную оценку устойчивости стержня для различных соотношений его главных изгибных жесткостей.

В случае стержня с заделанными концами расхождение результатов точного и приближенного решений уменьшается с приближением отношения главных изгибных жесткостей стержня к единице. Наибольшие расхождения результатов составляют: по экстремуму осевой силы — 15,5 % при $\lambda = 0{,}5$ и 20 % при $\lambda = 1{,}5$; по крутящему моменту — 4,6 % при $\lambda = 0{,}5$ и 20 % при $\lambda = 1{,}5$. С учетом того, что в практических задачах $\lambda = 1{,}2\ldots1{,}3$, приближенное решение при совместном действии осевой силы и крутящего момента приводит к результату с точностью 10…15 % при условии, что отношение главных изгибных жесткостей находится в диапазоне 0,65…1,0.

В случае стержня с шарнирными опорами результаты точного решения при осевом и следящем моментах различаются незначительно, особенно вблизи наибольших значений критических осевых сил и при растяжении стержня, а при чистом кручении и чистом сжатии полностью совпадают.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Шашков И.Е. К вопросу об устойчивости сжатого и скрученного стержня с неравными изгибными жесткостями. *Прикладная механика*, Киев, 1976, т. XII, № 1, с. 71–76.

[2] Дубровин В.М., Бутина Т.А. Моделирование устойчивости сжатого и скрученного стержня. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2014, вып. 9 (21). URL: http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/solid/44.html

[3] Феодосьев В.И. *Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов*. Москва, Наука, 1993, 400 с.
[4] Пономарев С.Д., ред. *Расчеты на прочность в машиностроении. Т. 3*. Москва, Машгиз, 1959, 861 с.
[5] Работнов Ю.Н. *Проблемы механики деформируемого твердого тела*. Москва, Наука, 1991, 194 с.
[6] Фролов К.В. *Избранные труды*. Москва, Наука, 2007, 526 с.
[7] Димитриенко Ю.И. *Универсальные законы механики и электродинамики сплошной среды. Т. 2: Механика сплошной среды*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011, 560 с.
[8] Димитриенко Ю.И. Обобщенная трехмерная теория устойчивости упругих тел. Ч. 2: Малые деформации. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2014, № 1, с. 17−26.
[9] Димитриенко Ю.И. Обобщенная трехмерная теория устойчивости упругих тел. Ч. 3: Теория оболочек. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2014, № 2, с. 77−89.
[10] Гаврюшин С.С. Численное моделирование процессов нелинейного деформирования тонких упругих оболочек. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 1, с. 115–130.
[11] Жилин П.А. *Актуальные проблемы механики*. Санкт-Петербург, Институт проблем машиноведения РАН, 2006, 306 с.
[12] Пиковский А., Розенблюм Н., Куртс Ю. *Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явлен*ие. Москва, Техносфера, 2003, 493 с.
[13] Вольмир А.С. *Устойчивость деформируемых систем*. Москва, Наука, 1967, 987 с.
[14] Бутина Т.А., Дубровин В.М. Устойчивость цилиндрической оболочки при комбинированном нагружении. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2012, вып. 2. URL: http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/solid/44.html

Статья поступила в редакцию 19.08.2015

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Дубровин В.М., Бутина Т.А. Моделирование устойчивости сжатого и скрученного стержня в точной постановке задачи. *Математическое моделирование и численные методы*, 2015, № 3, с. 3–16.

Дубровин Виктор Митрофанович родился в 1935 г., окончил Саратовский государственный университет в 1958 г. Канд. техн. наук, доцент МГТУ им. Н.Э. Баумана. Специалист в области прочности и устойчивости деформируемых систем. Автор пяти изобретений. e-mail: dubrovinvm1934@yandex.ru

Бутина Татьяна Александровна родилась в 1950 г., окончила Московский физико-технический институт в 1974 г. Канд. физ.-мат. наук, доцент МГТУ им. Н.Э. Баумана. Специалист в области прочности и устойчивости деформируемых систем. e-mail: butina_ta@mail.ru

Modeling the stability of compressed and twisted rods in precise problem statement

© V.M. Dubrovin, T.A. Butina

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

The article describes the method for calculating the stability of a rod under simultaneous action of axial force and torque, considering changing the torsion of the rod when it's bent. The method is based on the use of the complete system of equations. The following cases are considered: end clamped rod, rod with a hinged support, the rod in the form of compressed and twisted console. Diagrams of dependence of the critical axial force versus the critical torque are obtained, i.e., the range of rod stability for the case of loading is determined.

Keywords: *rod, compression, torsion, stability, flexural stiffness, critical force, torque.*

REFERENCES

[1] Shashkov I.E. *Prikladnaya mekhanika – Applied Mechanics*, 1976, vol. XII, no. 1, pp. 71−76.

[2] Dubrovin V.M., Butina T.A. *Inzhenernyi zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovations*, 2014, no. 9 (21). Available at: http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/solid/44.html

[3] Feodosyev V.I. *Izbrannye zadachi i voprosy po soprotivleniyu materialov* [Selected Problems and Questions about the Strength of Materials]. Moscow, Nauka Publ., 1993, 400 p.

[4] Ponomarev S.D., ed. *Raschety na prochnost v mashinostroenii* [Calculations of Strength in Mechanical Engineering]. *Vol. 3.* Moscow, Mashgiz Publ., 1959, 861 p.

[5] Rabotnov Yu.N. *Problemy mekhaniki deformiruemogo tela* [The Problems of Deformable Solid Body Mechanics]. Moscow, Nauka Publ., 1991, 194 p.

[6] Frolov K.V. *Izbrannye Trudy* [Selected Works]. Moscow, Nauka Publ., 2007, 526 p.

[7] Dimitrienko Yu. I. *Universalnye zakony mekhaniki i elektrodinamiki sploshnoy sredy. Tom 2. Mekhanika sploshnoy sredy* [Universal Laws of Mechanics and Electrodynamics of Continuum. Vol. 2. Continuum Mechanics]. Moscow, BMSTU Publ., 2011, 560 p.

[8] Dimitrienko Yu.I. *Vestnic MGTU im. N.E. Baumana. Seria Estestvennye nauki – Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series: Natural Sciences,* 2014, no. 1, pp. 17−26.

[9] Dimitrienko Yu.I. *Vestnic MGTU im. N.E. Baumana. Seria Estestvennye nauki – Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series: Natural Sciences,* 2014, no. 2, pp. 77−89.

[10] Gavryushin S.S. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye menody – Mathematical Modeling and Numerical Methods,* 2014, no. 1, pp. 115–130.

[11] Zhilin P.A. *Aktualnye problem y mekhaniki* [Topical Problems in Mechanics]. St. Petersburg, Institute of Problems of Mechanical Engineering, RAS Publ., 2006, 306 p.

[12] Pikovskiy A., Rozenblum N. Kurts Yu. *Sinkhronizatsiya. Fundamentalnoe nelineynoe yavlenie* [Synchronization. The Fundamental Nonlinear Phenomenon]. Moscow, Tekhnosfera Publ., 2003, 493 p.

[13] Volmir A.S. *Ustoychivost deformiruemykh system* [Stability of Deformable Systems]. Moscow, Nauka Publ., 1967, 987 p.
[14] Butina T.A., Dubrovin V.M. *Inzhenernyi zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovations,* 2012, no. 2. Available at: http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/solid/44.html.

Dubrovin V.M. (b. 1935) graduated from Saratov State University in 1958. Cand. Sci. (Eng.), associate professor of Engineering, Bauman Moscow State Technical University. A specialist in the field of strength and stability of deformable systems. Author of 5 inventions. e-mail: dubrovinvm1934@yandex.ru

Butina T.A. (b. 1950) graduated from Moscow Institute of Physics and Technology in 1974. Cand. Sci. (Phys.-Math.), associate professor of Engineering, Bauman Moscow State Technical University. A specialist in the field of strength and stability of deformable systems. e-mail: butina_ta@mail.ru