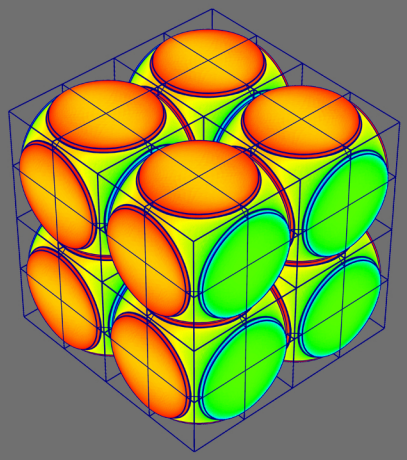
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Краснощеченко В. И. Стабилизация неустойчивого предельного цикла релейной хаотической системы. Математическое моделирование и численные методы, 2015, №2 (6), с. 87-104

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/50/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.216.140
11.11.2026 14:51:27

УДК 681.513.5

Стабилизация неустойчивого предельного цикла релейной хаотической системы

© В.И. Краснощеченко

Калужский филиал МГТУ им. Н.Э. Баумана, Калуга, 248000, Россия

В работе представлен алгоритм синтеза для стабилизации неустойчивого предельного цикла релейной хаотической системы. В алгоритме используется одномерное дискретное отображение Пуанкаре для нахождения неподвижных точек периода (предельных циклов исходной непрерывной системы). Показано, что классический метод OGY синтеза апериодического регулятора не решает поставленной задачи, так как учитывает только скорость выходной координаты, что недостаточно для стабилизации. Предложенный алгоритм основан на поиске необходимого коэффициента регулятора путем решения обратной задачи: сначала задается некоторый коэффициент, а затем осуществляется двухэтапная процедура (с коррекцией) перехода системы в следующую точку переключения. Задача коррекции осуществляется в полной окрестности (положения и скорости выходной координаты) и обеспечивает стабилизацию предельного цикла корректирующими импульсами малой амплитуды в выбранной области начальных условий (области стабилизации), о чем свидетельствуют приведенные результаты моделирования.

Ключевые слова: *хаос, отображение Пуанкаре, предельный цикл, стабилизация, релейная система, синтез регулятора, метод OGY.*

Введение. Известно, что в пространстве состояний хаотические колебания в непрерывной нелинейной системе могут возникать только в системах третьего и более высокого порядка. Самый известный пример такой системы – классический хаотический аттрактор Лоренца [1]. В системах второго порядка ограниченные устойчивые движения происходят только в виде состояния равновесия или предельного цикла (теорема Пуанкаре — Бендиксона) [2]. Рассматриваемая автором простая система с обратной связью представляет собой линейную неустойчивую колебательную систему второго порядка с гистерезисным реле в контуре (рис. 1), предложенную П. Куком [3]. Она при определенных значениях коэффициента $0 < \xi < \xi_{kp}$ может генерировать хаотические траектории, которые формируют хаотический аттрактор (рис. 2) с ограниченной областью притяжения. Причина такого отклонения от теоремы Пуанкаре — Бендиксона — неединственность вход-выходного соотношения $u = f(y)$, вводимого гистерезисом.

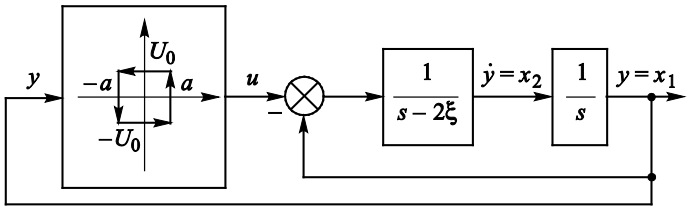


Рис. 1. Линейная система с реле в контуре:

$\xi = 0,05; U_0 = 1; a = 1$

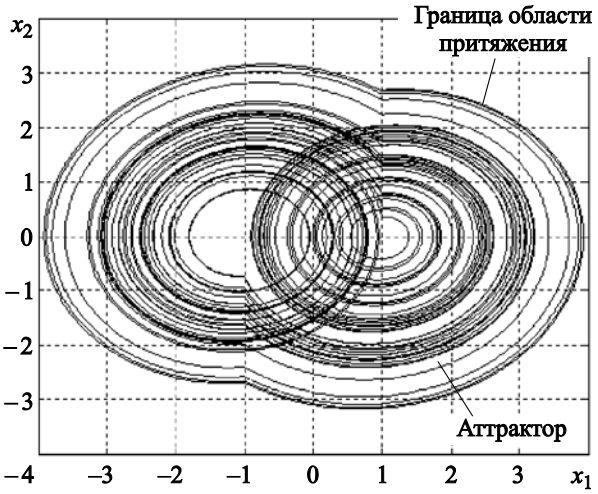


Рис. 2. Хаотический аттрактор релейной системы

Аттрактор имеет ограниченную область притяжения и характеризуется бесконечным числом неустойчивых предельных циклов. Если в хаотической системе присутствует неустойчивый предельный цикл с подходящими параметрами, его в принципе можно стабилизировать очень малыми корректирующими сигналами (управлениями), прикладываемыми в небольшой окрестности неподвижной точки отображения Пуанкаре. Этот факт принципиально отличает задачу стабилизации для хаотической системы от традиционной, т. е. системы с регулярным движением.

В настоящей работе для исследования хаотического движения и определения границы области притяжения аналитически определено точечное отображение Пуанкаре в параметрической форме. Для стабилизации неустойчивого предельного цикла (неподвижной точки периода 1 отображения Пуанкаре) в начале рассмотрен синтез регулятора с использованием метода OGY [4], уже ставшего классическим. Метод основан на линеаризации отображения Пуанкаре в небольшой окрестности неподвижной точки, где осуществляется коррекция траектории малыми импульсами. Теоретические исследования по стабилизации

неустойчивого предельного цикла данной системы методом OGY представлены в статьях [5, 6]. Однако в этих работах не были представлены результаты численного моделирования и значения коэффициента регулятора для стабилизации предельного цикла, корректирующие управляющие воздействия малой (или, возможно, не малой) амплитуды. Проведенное моделирование показало, что в результате линеаризации (с использованием численного дифференцирования, как в работе [6]) отображения Пуанкаре был найден коэффициент апериодического регулятора, который не позволил получать желаемый результат стабилизации.

Кроме классического метода OGY, разработаны другие методы синтеза регуляторов для стабилизации неустойчивых предельных циклов хаотических систем, в первую очередь, метод Пирагаса [7], или метод управления хаосом с использованием обратной связи с задержкой (Delayed Feedback Control), который появился практически одновременно с методом OGY. Его главное достоинство: простота и возможность управлять хаосом по выходной координате. Недостаток: невозможность стабилизировать некоторые неустойчивые предельные циклы из-за негативного влияния введенной задержки [8, 9], в том числе из-за существенной зависимости времени задержки от периода стабилизируемого предельного цикла. При этом управление проводится непрерывно, как в классической системе управления, и малыми управлениями (что выгодно отличает управление хаосом по методу OGY) здесь не обойтись.

Для управления хаосом можно также использовать методы робастного управления. Хорошо известный метод линейного H_∞-управления [10] является некоторым мостом между обычным методом управления и методом OGY. Управление также ведется в окрестности стабилизируемой орбиты с использованием γ-субоптимального управления, но основная трудность здесь — поиск необходимых матриц для формирования обобщенного объекта, обоснование аддитивного возмущения для компенсации нелинейной динамики объекта управления.

Несмотря на то что имеется положительный опыт использования алгоритмов и методов адаптивного управления [2, 11] и скользящих режимов [12] при решении задач стабилизации хаотических систем, в настоящей работе они не рассматриваются. Во-первых, в связи с тем, что необходимо сформировать эталонную модель для адаптивного управления, а это в поставленной задаче сделать достаточно сложно. Во-вторых, вследствие так называемого дребезжания (chattering effect) управления при движении по поверхности скольжения, что может привести к потере устойчивости.

В представленной статье разработан простой алгоритм стабилизации неустойчивого предельного цикла релейной системы с ис-

пользованием отображения Пуанкаре и малых корректирующих импульсов. Коррекция проведена в окрестности $U_y \times U_{\dot{y}}$, т. е. учитывается локальная окрестность стабилизируемого предельного цикла (неподвижной точки отображения Пуанкаре) по всем координатам системы. Для нахождения коэффициента регулятора *решена обратная задача*: задан коэффициент регулятора и определен результат его локальной работы при переходе системы из точки переключения $(a, p)^{\mathrm{T}}$ в точку $(-a, q)^{\mathrm{T}}$, где a — положение, а p, q — скорость системы в соответствующей точке переключения. При этом размер окрестности выхода U_y точки переключения $(a, p)^{\mathrm{T}}$ играет существенную роль.

Предлагаемая методика нахождения коэффициента одномерного регулятора и алгоритма коррекции позволяет не только решить задачу стабилизации неустойчивого предельного цикла, но и объяснить причину неудачных результатов моделирования при синтезе регулятора по методу OGY.

Аналитическое определение отображения Пуанкаре. Как известно, точечное отображение Пуанкаре дает возможность преобразовать исходную непрерывную систему в дискретную с размерностью на единицу меньше. При этом исследование периодических, нерегулярных, в том числе хаотических, движений намного упрощается. Неподвижные точки отображения Пуанкаре определяют предельные циклы (устойчивые или неустойчивые) непрерывной системы.

Представим исходную релейную систему в пространстве состояний

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2; \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + 2\xi x_2 + 1; \\ y &= x_1. \end{aligned} \qquad (1)$$

Для построения точечного отображения Пуанкаре зададим параметры реле: $U_0 = 1;\ a = 1$. В качестве секущей Пуанкаре (поверхность, которая трансверсально пересекается траекторией с соответствующей регистрацией точки сечения Пуанкаре) используем линию (одномерную поверхность) $x_1 = a = 1$, на которой будем фиксировать текущее значение скорости $x_2 = p \geq 0$ при переключении с –1 на +1. Следующая точка переключения для линии $x_1 = a = -1$ и скорости $x_2 = -q,\ q \geq 0$ определяется для момента переключения с +1 на –1 (рис. 3).

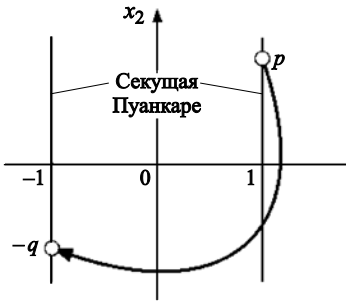


Рис. 3. Секущая Пуанкаре релейной системы

Отображение Пуанкаре определяет дискретное отображение $q = \phi(p)$ между последовательными точками пересечения траекторией линий $x_1 = 1,\ x_2 = p \geq 0$ и $x_1 = -1,\ x_2 = -q,\ q \geq 0$ соответственно при произвольных, но допустимых значениях скорости $p \geq 0,\ q \geq 0$. Эти точки формируют так называемое сечение Пуанкаре. Построим отображение для нахождения только неподвижных точек периода 1, т. е. неустойчивые предельные циклы будут иметь одинаковые, симметричные точки $p^*(k) = q^*(k)$, где

$$k = k_c + 1 \tag{2}$$

— число пересечений (раскручивающейся спиральной) траектории с секущей Пуанкаре до следующего переключения (далее — число пересечений), равное числу пересечений без переключения k_c (эти пересечения не формируют точки сечения Пуанкаре) плюс единица (учитывается первое пересечение при переключении), с линиями $x_1 = 1,\ x_2 = p \geq 0$ и $x_1 = -1,\ x_2 = -q,\ q \geq 0$, при вращении вокруг точек $(1 \quad 0)^{\mathrm{T}}$, $(-1 \quad 0)^{\mathrm{T}}$ соответственно. На секущей Пуанкаре это будет одна точка. Очевидно, что при одном пересечении $k = 1,\ k_c = 0$, переход из точки $\left(1 \quad p^*(1)\right)^{\mathrm{T}}$ в точку $\left(-1 \quad -q^*(1)\right)^{\mathrm{T}}$ происходит менее чем за один оборот.

Процедура построения отображения Пуанкаре. Начнем движение с точки $(1 \quad p \geq 0)^{\mathrm{T}}$. На вход линейной системы (1) до очередного переключения поступает сигнал $u = +1$. Найдем ее решение для начальных условий $\mathbf{x}(0) = (1 \quad p)^{\mathrm{T}}$. Имеем

$$x_1(t) = 1 + \frac{p}{\omega}\exp(\xi t)\sin\omega t;$$

$$x_2(t) = \frac{p}{\omega}\exp(\xi t)\left(\xi\sin\omega t + \omega\cos\omega t\right),$$

где $\omega = \sqrt{1-\xi^2}$ — угловая скорость раскручивания спирали. Пусть в момент времени $t = \tau > 0$ траектория достигает точки переключения $\mathbf{x}(\tau) = (-1 \quad -q)^{\mathrm{T}}$, т. е.

$$\begin{aligned} -1 &= 1 + \frac{p}{\omega}\exp(\xi t)\sin\omega\tau; \\ -q &= \frac{p}{\omega}\exp(\xi t)\left(\xi\sin\omega\tau + \omega\cos\omega\tau\right). \end{aligned} \tag{3}$$

Из уравнений (3) получим

$$p = -\frac{2\omega \exp(\xi t)}{\sin \omega\tau}, \qquad q = 2\xi - p \exp(\xi t)\cos \omega\tau. \tag{4}$$

Строго говоря, из уравнений (4) можно в параметрической форме (параметр τ) определить некоторую зависимость $q = q(p)$. Однако в этом случае невозможно выполнить требование неотрицательности $p \geq 0$, $q \geq 0$ и, соответственно, получить отображение Пуанкаре. Учитывая, что в соотношениях (4) присутствуют периодические функции, для обеспечения условия $p \geq 0$ перейдем к угловому аргументу θ:

$$\omega\tau = (2k-1)\pi + \theta, \quad k = 1, 2, ...; \ 0 < \theta < \pi, \tag{5}$$

где k — число пересечений траектории с линией $x_1 = 1$, $x_2 = p \geq 0$ до переключения (см. формулу (2)). Определяя из соотношения (5) переменную τ

$$\tau = \frac{1}{\omega}\big((2k-1)\pi + \theta\big) \tag{6}$$

и подставляя выражение (6) в уравнение (4), получаем

$$p = p\big(\xi, k, \theta\big) = \frac{2\omega \exp\left[-\frac{\xi}{\omega}\big((2k-1)\pi + \theta\big)\right]}{\sin\theta}; \tag{7}$$

$$q = q(\xi, \theta) = 2(\xi + \omega \operatorname{ctg}\theta). \tag{8}$$

Согласно формуле (8), точка q не зависит от числа пересечений k траектории с линией $x_1 = 1$, $x_2 = p \geq 0$ до переключения: важен сам факт переключения, а как двигалась траектория до точки переключения, определяется формулой (7). Ясно, в что интервале $0 < \theta < \pi$ выполняется условие $p \geq 0$, но для обеспечения требования $q \geq 0$ необходимо уточнить верхнюю границу $\theta_{\max}$. Из уравнения

$$q(\theta_{\max}) = 2(\xi + \omega \operatorname{ctg}\theta_{\max}) = 0 \tag{9}$$

найдем

$$\operatorname{ctg}\theta_{\max} = \frac{\cos\theta_{\max}}{\sin\theta_{\max}} = -\frac{\xi}{\omega} = \frac{-\xi}{\omega} = \frac{-\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}.$$

Из выражения (9) (с учетом того, что $\sin\theta_{\max} > 0$) определим максимальный угол

$$\theta_{\max} = \pi - \arcsin\omega.$$

Обе параметрические функции $p(\theta)$, $q(\theta)$ являются убывающими. Производная $\frac{dp}{d\theta} = -\frac{p}{\omega}(\xi + \omega \operatorname{ctg}\theta) < 0$. Производная $\frac{dq}{d\theta} = -\frac{2\omega}{\sin^2\theta} < 0$ также определяет убывающую функцию и при максимальном угле $\theta = \theta_{\max}$ траектория попадает в критическую точку неустойчивого состояния $q(\theta_{\max}) = 2(\xi + \omega \operatorname{ctg}\theta_{\max}) = 0$. Пусть в начальный момент система стартует из точки A — точки переключения реле на уровень $+1$ (рис. 4) при максимальном угле $\theta = \theta_{\max}$. В этом случае малейшее отклонение от точки переключения $(-1_{0^-} \quad 0)^{\mathrm{T}}$ (точка B на рис. 4) приводит к дополнительному обороту (точка C на рис. 4). При этом система приходит в точку переключения с одним и тем же значением скорости ($q = \nu$), так как этот виток определяется одинаковыми начальными условиями последнего витка (точка *B*, см. рис. 4) и его конечная точка не зависит от того, сколько до этого система сделала витков с пересечениями с переключения $(k \geq 2)$.

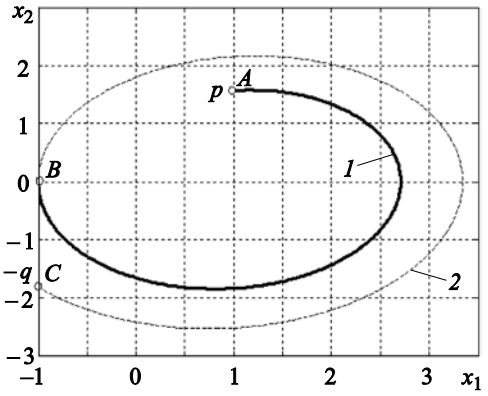


Рис. 4. Траектории релейной системы при прохождении критической точки (переход от $k = 1$ к $k = 2$, $\xi = 0,05$)

На рис. 5 представлено одномерное отображение Пуанкаре для различных значений k при $\xi = 0,05$. Очевидно, что равенство

$$p(\xi, k, \theta_{\max}) = p(\xi, k+1, \theta_\nu) \tag{10}$$

определяет начальное значение θ_ν для нахождения зависимости $q = \phi(p)$ при числе пересечений $k \geq 2$ (напомним, что функция $q = \phi(p)$ — убывающая). Подставляя соответствующие выражения в равенство (10), получаем уравнение для нахождения начального угла θ_ν:

$$\exp\left[\frac{\xi}{\omega}\left(\pi+\arcsin\omega+\theta_\nu\right)\right]\sin\theta_\nu=\omega. \qquad (11)$$

При этом уровень ν определяется выражением (8).
Для коэффициента $\xi=0,05$ угол $\theta_\nu=0,860$, уровень $\nu=1,821$ (см. рис. 5).

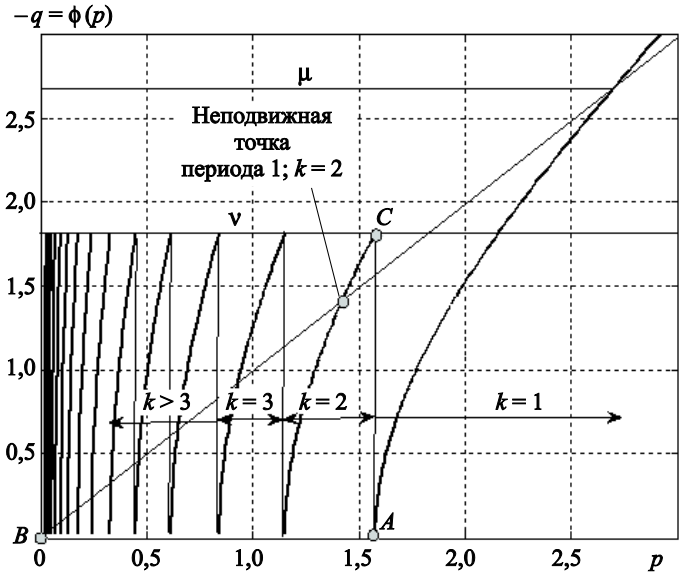


Рис. 5. Отображения Пуанкаре для релейной системы (аналитическое решение) при $\xi=0,05$

И наконец, найдем предельно допустимый уровень начальной скорости $p_{\max}(\xi,1,\theta_\mu)=\mu$, определяющий границу области притяжения. Ясно, что $\mu\geq\nu$, и, следовательно, имеем следующие варианты расположения аттрактора и области притяжения:

в случае строгого неравенства $\mu>\nu$ аттрактор находится внутри области притяжения;

при $\mu=\nu$ граница аттрактора совпадает с границей области притяжения;

при $\mu<\nu$ процесс расходится, аттрактора и области притяжения нет.

Граничная точка $p_{\max}(\xi,1,\theta_\mu)=\mu$ определяет неустойчивый предельный цикл периода 1 для числа пересечений $k=1$ (неподвижная точка отображения Пуанкаре), т. е.

$$q(\xi,\theta_\mu)=\mu=2(\xi+\omega\operatorname{ctg}\theta_\mu).$$

Необходимый угол θ_μ позволяет найти граничную (начальную) точку $p_{\max}(\xi,1,\theta_\mu)=\mu$ для траектории с одним пересечением $k=1$, которая обеспечивает сходимость к аттрактору. Раскрывая левую часть уравнения

$$p_{\max}(\xi,1,\theta_\mu)=\mu=2(\xi+\omega\operatorname{ctg}\theta_\mu)$$

с использованием выражения (7), получаем уравнение для определения угла θ_μ:

$$\xi\sin\theta_\mu+\omega\cos\theta_\mu=\omega\exp\left[-\frac{\xi}{\omega}(\pi+\theta_\mu)\right]. \qquad (12)$$

Для рассматриваемого коэффициента $\xi=0,05$ угол $\theta_\mu=0,649$, уровень $\mu=2,736$.

Критическое значение коэффициента ξ_{kp} определяется граничным условием формирования аттрактора: $\mu=\nu$ или $\theta_\nu=\theta_\mu=\theta_{\nu,\mu}$. Из выражений (1), (2) составим систему уравнений:

$$\exp\left[\frac{\xi_{kp}}{\omega}\left(\pi+\arcsin\omega+\theta_{\nu,\mu}\right)\right]\sin\theta_{\nu,\mu}=\omega;$$

$$\xi_{kp}\sin\theta_{\nu,\mu}+\omega\cos\theta_{\nu,\mu}=\omega\exp\left[-\frac{\xi_{kp}}{\omega}\left(\pi+\theta_{\nu,\mu}\right)\right],$$

решая которую, находим: $\xi_{kp}=0,0674$; $\theta_{\nu,\mu}=0,765$; $\mu=\nu=2,216$.

Полученное отображение Пуанкаре используем для синтеза регулятора, стабилизирующего выбранный неустойчивый предельный цикл.

Метод OGY синтеза регулятора. Рассмотрим классический метод синтеза регулятора, так называемый метод OGY (от первых букв фамилий авторов [4]). Для синтеза линейного регулятора и стабилизации неподвижной неустойчивой точки периода 1 (p^*,U_0) отображения Пуанкаре линеаризуем это отображение в окрестности данной точки и получим

$$\phi(p,U)=\phi(p^*,U_0)+\left.\frac{\partial\phi(p,U)}{\partial p}\right|_{\substack{U=U_0\\p=p^*}}(p-p^*)+\left.\frac{\partial\phi(p,U)}{\partial U}\right|_{\substack{U=U_0\\p=p^*}}U-U_0=$$
$$=\phi(p^*,U_0)+A(p-p^*)+B(U-U_0),$$

где для определения коэффициентов линейного разложения A, B используем численное дифференцирование [6]:

$$A=\left.\frac{\partial\phi(p,U)}{\partial p}\right|_{\substack{U=U_0\\ p=p^*}}\approx\frac{\phi(p_2,U_0)-\phi(p_1,U_0)}{p_2-p_1},$$

$$B=\left.\frac{\partial\phi(p,U)}{\partial U}\right|_{\substack{U=U_0\\ p=p^*}}\approx\frac{\phi(p^*,u_2)-\phi(p^*,u_1)}{u_2-u_1},$$

$$p_2=p^*+\frac{\varepsilon_p}{2};\ p_1=p^*-\frac{\varepsilon_p}{2};\ u_2=U_0+\frac{\varepsilon_u}{2};\ u_1=U_0-\frac{\varepsilon_u}{2}.$$

Синтезируем линейный регулятор, действующий в окрестности $U_{\dot y}=\left\{\dot y=p\in R:\left|p-p^*\right|\le\varepsilon_{\dot y}\right\}$:

$$U-U_0=\Delta u=K(p-p^*):p\in U_{\dot y}.$$

В этом случае линеаризация одномерного отображения Пуанкаре имеет вид

$$\phi(p,U)=\phi(p^*,U_0)+A(p-p^*)+B(U-U_0)=\phi(p^*,U_0)+(A+BK)(p-p^*).$$

Используем апериодический регулятор, т. е. потребуем, чтобы в точке переключения выполнялось равенство

$$-q=\phi(p,U)=\phi(p^*,U_0).$$

Для этого решим уравнение

$$A+BK=0,$$

из которого определим необходимый коэффициент апериодического регулятора

$$K_{\mathrm{OGY}}=-\frac{A}{B}. \tag{13}$$

Коэффициент K_{OGY} при различных вариациях скорости ε_p и управления ε_u в момент переключения рассчитан по формуле (13) (таблица).

Из анализа полученных значений коэффициента апериодического регулятора следует, что размер окрестности слабо влияет на значение коэффициента K_{OGY}. При моделировании принято, что $\varepsilon_{\dot y}=\varepsilon_p=0,05$ и $K_{\mathrm{OGY}}=-2,78$ (в таблице эти значения выделены серым фоном). Результаты моделирования для параметров $\varepsilon_{\dot y}=0,05;\ T=100$ с; $\mathbf{x}(0)=(1,001;\ 1,38)^{\mathrm{T}}$ изображены на рис. 6. Ясно, что предельный цикл не стабилизирован.

Значения коэффициента апериодического регулятора $-K_{\mathrm{OGY}}$ линеаризованного отображения Пуанкаре при различных вариациях параметров $\varepsilon_p, \varepsilon_u$

$\varepsilon_p = \varepsilon_{\dot{y}(0)} = p_2 - p_1,$ $p_2 = p^* + \varepsilon_p / 2,$ $p_1 = p^* - \varepsilon_p / 2$	$\varepsilon_u = u_2 - u_1,$ $u_2 = U_0 + \varepsilon_u / 2,$ $u_1 = U_0 - \varepsilon_u / 2$	$-K_{\mathrm{OGY}}$
0,1	0,1	2,786
0,1	0,05	2,785
0,05	0,05	2,777
0,2	0,2	2,824
0,05	0,1	2,778
0,3	0,3	2,895

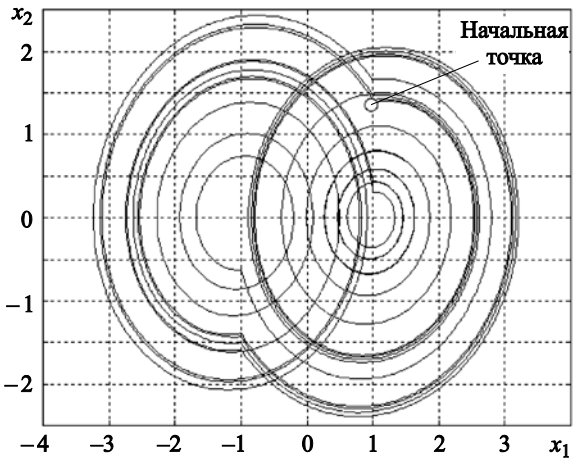


Рис. 6. Фазовая траектория: решение задачи стабилизации неустойчивого предельного цикла по методу OGY:
$\varepsilon_{\dot{y}} = 0,05;\ T = 100$ с; $\mathbf{x}(0) = (1,001;\ 1,38)^{\mathrm{T}}$

Исследуем причину отсутствия стабилизации предельного цикла методом OGY. В соответствии с теорией, апериодический регулятор должен за один шаг до очередного переключения обеспечить переход из точки $(1, p)^{\mathrm{T}}, p \in \left[p^-, p^+ \right]$ в точку $(-1, -q^*), -q^* = 1,4226.$

Сформулируем основное условие стабилизации неустойчивого предельного цикла: при заданной области коррекции процесс стабилизации обеспечивается, если $-q^- < p^-,\ -q^+ < p^+$. При моделировании с коэффициентом $K_{\mathrm{OGY}} = -2,78$ и окрестностью коррекции $\varepsilon_{\dot{y}} = \varepsilon_p = 0,05$ получены следующие результаты:

$$(1, p^-)^{\mathrm{T}} \overset{\substack{t=\tau_s(\varepsilon_{\dot y})\\ u=U_0+K_{\mathrm{OGY}}(\dot y-p^*)}}{\longrightarrow} (1,496;1,3726)^{\mathrm{T}} \overset{u=U_0}{\longrightarrow} (-1;-q^- = 1,391)^{\mathrm{T}};$$

$$(1, p^+)^{\mathrm{T}} \overset{\substack{t=\tau_s(\varepsilon_{\dot y})\\ u=U_0+K_{\mathrm{OGY}}(\dot y-p^*)}}{\longrightarrow} (1,645;\ 1,3726)^{\mathrm{T}} \overset{u=U_0}{\longrightarrow} (-1;\ -q^+ = 1,510)^{\mathrm{T}},$$

где $-q^-$ — терминальная точка (переключения реле с +1 на –1) для начальной точки $p^- = 1,38$ нижней границы области притяжения предельного цикла; $-q^+$ — терминальная точка (переключения реле с +1 на –1) для начальной точки $p^+ = 1,47$ верхней границы области притяжения предельного цикла; $\tau_s(\varepsilon_{\dot y})$ — момент окончания коррекции (выход на границу $U_{\dot y}$).

Следовательно, поскольку $-q^- > p^-$, $-q^+ > p^+$, процесс стабилизации отсутствует, т. е. не выполнено основное условие стабилизации предельного цикла.

Предлагаемый метод синтеза регулятора. Для нахождения коэффициента регулятора *решена обратная задача*: задан коэффициент регулятора и определен результат его локальной работы при переходе системы из точки переключения $(1, p)^{\mathrm{T}}$ в точку $(-1, q)^{\mathrm{T}}$, где $p,\ q$ — скорость системы в соответствующей точке переключения. Коррекция траектории с помощью регулятора ($u = U_0 + \Delta u$, $\Delta u = K(\dot y - p^*)$) проведена в окрестностях точек переключения: $(y, \dot y)^{\mathrm{T}} = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}} \in U_y \times U_{\dot y}$, где $U_{\dot y} = \left\{\dot y \in R : \left|\dot y - p^*\right| \le \varepsilon_{\dot y}\right\}$ — окрестность переменной $\dot y = x_2$ при переключении; $p^* = -q^* = 1,4226$; $k = 2$ — неподвижная точка цикла периода 1 отображения Пуанкаре стабилизируемого предельного цикла; принято $\varepsilon_{\dot y} = 0,05$; $U_y = \left\{y \in R : \left|y - 1\right| \le \varepsilon_y\right\}$ – окрестность выходной переменной $y = x_1$ в точке переключения.

Алгоритм расчета необходимого коэффициента регулятора.

1. Итерационно с некоторым шагом задан коэффициент регулятора.

2. Для двух начальных значений $(1, p^-)^{\mathrm{T}}, (1, p^+)^{\mathrm{T}}$ на интервале коррекции $(y, \dot y)^{\mathrm{T}} = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}} \in U_y \times U_{\dot y}$, $t \in [0, \tau_s]$ рассчитаны управление $u = U_0 + K(\dot y - p^*)$ и траектория

$$y(t) = x_1(t) = b + \frac{\mathrm{sh}\left(\frac{\beta t}{2}\right)e^{\frac{at}{2}}(x_{10} + ab + 2c)}{\beta} + \frac{\mathrm{ch}\left(\frac{\beta t}{2}\right)e^{\frac{at}{2}}(x_{10} - b)}{\beta}; \qquad (14)$$

$$\dot{y}(t) = x_2(t) = \frac{\mathrm{sh}\left(\frac{\beta t}{2}\right)e^{\frac{at}{2}}(x_{10}a + ab + 2c)}{2\beta} + \frac{\mathrm{ch}\left(\frac{\beta t}{2}\right)e^{\frac{at}{2}}(x_{10}a + ab + 2c)}{2} +$$

$$+ \frac{\mathrm{sh}\left(\frac{\beta t}{2}\right)e^{\frac{at}{2}}\beta(x_{10} - b)}{2} + \frac{\mathrm{ch}\left(\frac{\beta t}{2}\right)e^{\frac{at}{2}}a(x_{10} - b)}{2}, \qquad (15)$$

где $\beta = \sqrt{a^2 - 4}$; $a = 2\xi + K$; $b = -Kp^* + U_0$; $c = x_{20} - ax_{10} = p^{\pm} - a$; $\xi = 0,05$; $x_{10} = 1$.

По окончании коррекции на интервале $t \in \left(\tau_s, t_{-1}\right]$ (t_{-1} — момент переключения выхода реле на -1) по формулам (14), (15) найдена траектория с коэффициентом регулятора $K = 0$. Зафиксирован результат перехода от одного переключения до другого.

На рис. 7 представлены результаты расчета двухэтапного перехода траектории из начальной точки $(+1,\ p)^{\mathrm{T}}$, $p \in \left[\, p^-,\ p^+ \right]$ в конечную $(-1,\ -q)^{\mathrm{T}}$ при различных размерах области U_y. На первом этапе в окрестности точки переключения, $(y, \dot{y})^{\mathrm{T}} = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}} \in U_y \times U_{\dot{y}}$, использовали линейный регулятор, формирующий корректирующие импульсы. После выхода траектории из этой окрестности на вход объекта подается только сигнал выхода реле $u = U_0 = 1$, т. е. коррекция (управление неустойчивым предельным циклом, проводится в локальной окрестности неподвижной точки отображения Пуанкаре), как в методе OGY.

Из данных, приведенных на рис. 7, следует, что для области коррекции $U_y \times U_{\dot{y}}$ со значением $\varepsilon_y = 0,3$ минимальный коэффициент регулятора $-K_{\min}$, который обеспечит стабилизацию предельного цикла, должен быть не менее 7, т. е. $-K_{\min}(\varepsilon_y = 0,3) > 7$.

Только в этом случае граничная точка $p = p^- = 1,38$ приближается с течением времени к циклу периода 1 (предельному циклу) для отображения Пуанкаре ($-q^* = p^*$). На рис. 7 выделена область выбора коэффициентов регулятора, обеспечивающих стабилизацию неустойчивого предельного цикла для $\varepsilon_{\dot{y}} = 0,05$; $\varepsilon_y = 0,3$. На рис. 8, *а*, *б* представлены фазовые траектории для коэффициентов $-K = 5$ (вне

выделенной зоны, стабилизация отсутствует) и $-K = 8$ (внутри области, стабилизация осуществляется) соответственно.

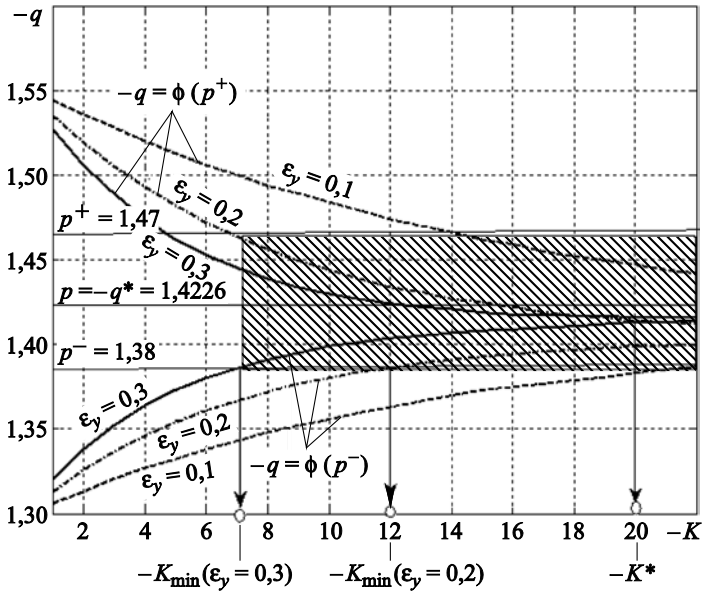


Рис. 7. Зависимость для определения коэффициента регулятора при различных размерах области коррекции по положению ε_y

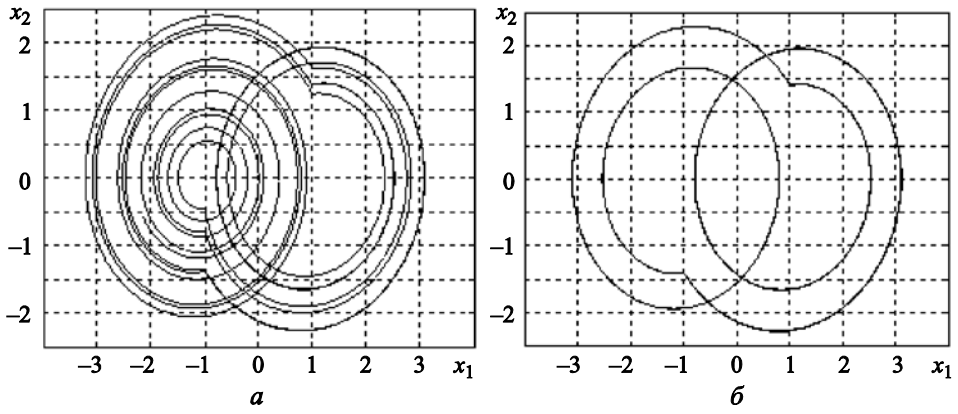


Рис. 8. Фазовые траектории при коэффициенте регулятора ($\varepsilon_{\dot{y}} = 0,05$; $\varepsilon_y = 0,3$): $-K = 5$ (*а*); $-K = 8$ (*б*)

Отметим, что для окрестности $\varepsilon_y = 0,2$ необходимо обеспечить минимальный коэффициент $-K_{\min}(\varepsilon_y = 0,2) > 13$, а для окрестности $\varepsilon_y = 0,1$ регулятор для стабилизации рассматриваемого предельного цикла при $-K \in [1,22]$ отсутствует.

Согласно рис. 7, при коэффициенте регулятора $-K = 20$ и размерах области коррекции $\varepsilon_y = 0,3$ имеем небольшое отклонение от желаемого терминального значения $-q^* = 1,4226$, как для верхней $p = p^+$, так и для нижней $p = p^-$ границ скорости p:

$$\max\left(\left|-q^- + q^*\right|, \left|-q^+ + q^*\right|\right) = \max\left(\left|1,413 - 1,4226\right|, \left|1,416 - 1,4226\right|\right) = 0,0096.$$

Это дает возможность на каждом интервале коррекции (кроме первого, компенсирующего начальное рассогласование) использовать очень малые дополнительные управления (корректирующие импульсы) для стабилизации неустойчивого предельного цикла. Принимаем $-K^* = 20$. В этом случае после второго переключения корректирующие добавки управления Δu не превысят следующих значений:

$$\Delta u \in \left[-(p^* - 1,416)20,\ (p^* - 1,416)20\right] = \left[-0,132\ ,\ 0,132\right].$$

На рис. 9, 10 представлены результаты моделирования при $-K^* = 20;\quad \dot{y}(0) = p(0) = p^- = 1,38;\ y(0) = x_1(0) = 1,001,\ \ T = 300$ с. На рис. 9, *а* изображен фрагмент входного сигнала объекта, где буквой A отмечен один из корректирующих импульсов, на рис. 9, *б* этот фрагмент представлен в увеличенном виде. Отметим, что уровень корректирующих импульсов весьма мал. На рис. 10, *а*, *б* показаны фазовая траектория и ее увеличенный фрагмент B в окрестности точки $(1,\ p^*)$. Стабилизация обеспечивается в полной мере.

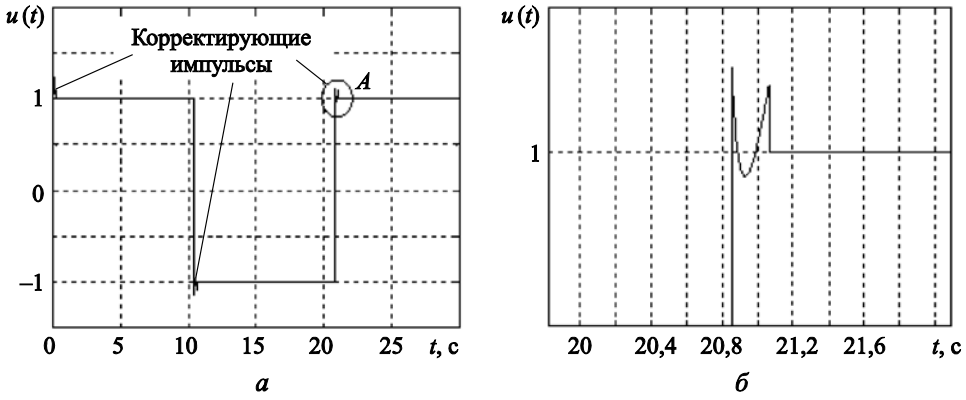


Рис. 9. Управление (*а*) и увеличенный фрагмент (*б*) его корректирующей добавки A при $-K^* = 20$, $\dot{y}(0) = p(0) = p^- = 1,38;\ y(0) = x_1(0) = 1,001$, $T = 300$ с; $\varepsilon_{\dot{y}} = 0,05;\ \varepsilon_y = 0,3$

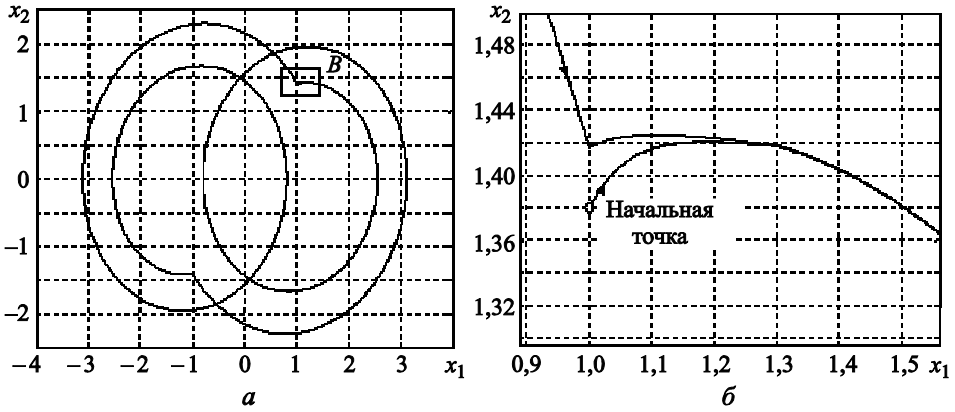


Рис. 10. Фазовая траектория (*а*) и ее увеличенный начальный фрагмент B (*б*) для $-K^* = 20$; $\dot{y}(0) = p(0) = p^- = 1,38$; $y(0) = x_1(0) = 1,001$; $T = 300$ с; $\varepsilon_{\dot{y}} = 0,05$; $\varepsilon_y = 0,3$

Заключение. В настоящей работе предложен алгоритм стабилизации неустойчивого предельного цикла релейной хаотической системы. Показано, что классический метод OGY не обеспечивает необходимую коррекцию данной системы. Основная причина: коррекция траектории апериодическим регулятором с использованием одномерного отображения Пуанкаре по скорости является недостаточной. Кроме того, необходимо учитывать и состояние (положение) системы. Этот факт отражен в полной мере в предлагаемом алгоритме и обеспечивает требуемое качество стабилизации локальными импульсами малой амплитуды, что подтверждено моделированием.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Lorenz E.N. Deterministic Nonperiodic Flow. *J. Atmosferic Sci.*, 1963, vol. 20, no. 2, pp. 130–141.

[2] Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л. Управление хаосом: методы и приложения, части I, II. *Автоматика и телемеханика*, 2003, № 5, с. 3–45; 2004, № 4, с. 3–34.

[3] Cook P.A. Simple feedback systems with chaotic behavior. *Syst. & Cont. Letters*, 1985, no. 6, pp. 223–227.

[4] Ott E., Grebogi C., Yorke J. Controlling Chaos. *Phys. Rev. Letters*, 1990, vol. 64, no. 11, pp. 1196–1199.

[5] Holzhuter T., Klinker T. Ein einfaches Relais-System mit chaotischem Verhalten. *Nichtlineare Dynimik, Chaos und Strukturbildung*. Meyer-Spasche R., Rast M. und Zenger C., eds. Munchen, Akademicher Verlag, 1997, pp. 83–96.

[6] Holzhuter T., Klinker T. Control of a chaotic relay system using the OGY method. *Z. Naturforsch*, 1998, vol. 53a, pp. 1029–1036.

[7] PyragasV.K. Continuos Control of Chaos by Self-Controlling Feedback. *Phys. Letters*. A, 1992, vol. 170, pp. 421–428.

[8] Morgil O. On the Stability of Delayed Feedback Controllers for Discrete Time Systems. *Phys. Letters*. A, 2005, vol. 335, pp. 31–42.
[9] Ushio T. Limitation of Delayed Feedback Control in Nonlinear Discrete Time Systems. *IEEE Trans. Circ. Syst.* I, 1996, vol. 43, pp. 815–816.
[10] Bhajekar S., Joncheere E.A., Hammad A. Hinf Control of Chaos. *Proceedings of 33d Conf*. Decision Control, Lake Buena Vista, FL, 1994, pp. 3285–3286.
[11] Boccletti S., Arecchi F.T. Adaptive Control of Chaos. *Europhys. Letters*, 1995, vol. 31, pp. 127–132.
[12] Yau H.T., Chen C.K., Chen C.L. Sliding Mode Control of Chaotic Systems with Uncertainties. *Int. J. Bifurcat. Chaos*, 2000, vol. 10, no. 5, pp. 1139–1147.

Статья поступила в редакцию 30.10.2014

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:
Краснощеченко В.И. Стабилизация неустойчивого предельного цикла релейной хаотической системы. *Математическое моделирование и численные методы*, 2015, № 2(6), с. 87–104.

Краснощеченко Владимир Иванович родился в 1953 г., окончил МВТУ им. Н.Э. Баумана в 1981 г. Канд. техн. наук, доцент Калужского филиала МГТУ им. Н.Э. Баумана, кафедра систем автоматического управления. Область научных интересов: синтез регуляторов; нелинейные системы; дифференциальная геометрия, топология и теория непрерывных групп в задачах управления; оптимальное управление; синтез наблюдателей. e-mail: kviip@yandex.ru

Stabilization of an unstable limit cycle of relay chaotic system

© V.I. Krasnoschechenko

Bauman Moscow State Technical University, Kaluga Branch, Kaluga, 248000, Russia

The article presents an algorithm of synthesis for stabilization of an unstable limit cycle of relay chaotic system. One-dimensional discrete Poincare map is used in algorithm for finding fixed points of the period one (limit cycles of initial continuous system). It is shown, that classical OGY method of dead beat regulator synthesis does not solve the problem as it takes into account only speed of the target coordinate what is not sufficient for stabilizing. The proposed algorithm is based on search of the necessary regulator factor by solving an inverse problem: at first some factor is assigned and then two-step procedure of system transition to the following switching point (with correction) is carried out. The task of correction is performed in a complete neighborhood of target coordinate position and speed, and it provides stabilization of a limit cycle by adjusting small amplitude pulses in the chosen area of entry conditions (area of stabilization) as evidenced by the simulation results.

Keywords: *chaos, Poincare map, limit cycle, stabilization, relay system, regulator synthesis, OGY method.*

REFERENCES

[1] Lorenz E.N. Deterministic Nonperiodic Flow. *J. Atmosferic Sci*., 1963, vol. 20 (2), pp. 130–148.
[2] Andrievskiy B.R., Fradkov A.L. *Avtomatika i telemekhanika – Automatics and Remote Control*, 2003, no. 5, pp. 3–45; 2004, no. 4, pp. 3–34.
[3] Cook P.A. Simple feedback systems with chaotic behavior. *Syst. & Cont. Letters*, 1985, no. 6, pp. 223–227.
[4] Ott E., Grebogi C., Yorke J. Controlling Chaos. *Phys. Rev. Letters*, 1990, vol. 64, no. 11, pp. 1196–1199.
[5] Holzhuter T., Klinker T. Ein einfaches Relais-System mit chaotischem Verhalten. *Nichtlineare Dynimik, Chaos und Strukturbildung*. Meyer-Spasche R., Rast M. und Zenger C., eds. Munchen, Akademicher Verlag, 1997, pp. 83–96.
[6] Holzhuter T., Klinker T. Control of a chaotic relay system using the OGY method. *Z. Naturforsch*, 1998, vol. 53a, pp. 1029–1036.
[7] PyragasV.K. Continuos Control of Chaos by Self-Controlling Feedback. *Phys. Letters*. A, 1992, vol. 170, pp. 421–428.
[8] Morgil O. On the Stability of Delayed Feedback Controllers for Discrete Time Systems. *Phys. Letters*. A, 2005, vol. 335, pp. 31–42.
[9] Ushio T. Limitation of Delayed Feedback Control in Nonlinear Discrete Time Systems. *IEEE Trans. Circ. Syst.* I, 1996, vol. 43, pp. 815–816.
[10] Bhajekar S., Joncheere E.A., Hammad A. Hinf Control of Chaos. *Proceedings of 33d Conf*. Decision Control, Lake Buena Vista, FL, 1994, pp. 3285–3286.
[11] Boccletti S., Arecchi F.T. Adaptive Control of Chaos. *Europhys. Letters*, 1995, vol. 31, pp. 127–132.
[12] Yau H.T., Chen C.K., Chen C.L. Sliding Mode Control of Chaotic Systems with Uncertainties. *Int. J. Bifurcat. Chaos*, 2000, vol. 10, no. 5, pp. 1139–1147.

Krasnoschechenko V.I. (b. 1953) graduated from Bauman Moscow Higher Technical School in 1981. Candidate of engineering sciences, associate professor at the Automatic Control Systems Department at Bauman Moscow State Technical University, Kaluga branch. Research interests: synthesis of regulators, nonlinear systems, differential geometry, topology and the theory of continuous groups in control problems, optimal control, synthesis of observers. e-mail: kviip@yandex.ru