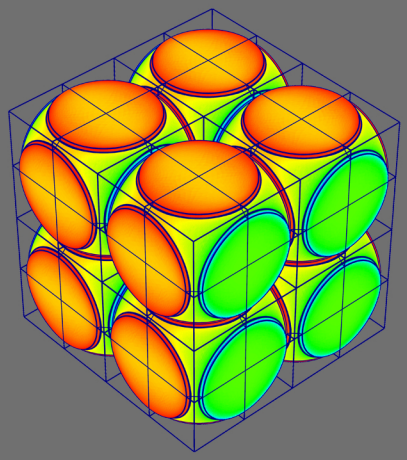
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Сидняев Н. И., Глушков П. А. Длиннопериодические колебания летательных аппаратов при гиперзвуковых скоростях. Математическое моделирование и численные методы, 2014, №1 (1), с. 99-114

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/5/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.216.38
06.03.2026 23:08:39

УДК 51-71:74

Длиннопериодические колебания летательных аппаратов при гиперзвуковых скоростях

© Н.И. Сидняев, П.А. Глушков

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Дан теоретический анализ длиннопериодических (фугоидных) колебаний летательного аппарата, обладающего подъемной силой и совершающего полет с гиперзвуковой скоростью в произвольной атмосфере. Причиной колебаний является взаимный переход кинетической энергии в потенциальную при полете по траектории, имеющей колебательный характер и определяемой в первую очередь регулируемым продольным моментом, равным нулю при установившемся полете. Показано, что с приближением скорости к первой космической уменьшение силы тяжести с высотой преобладает над уменьшением плотности атмосферы так, что с ростом скорости период фугоидных колебаний асимптотически стремится к соответствующему периоду обращения летательного аппарата. Получены аналитические выражения для короткопериодических колебаний, или колебаний по углу атаки. Показано, что эти выражения и выражения для длиннопериодических колебаний хорошо согласуются с результатами численного решения.

Ключевые слова: *фугоидные колебания, период, стабилизация, декремент затухания, гиперзвуковая скорость, демпфирование, угол атаки, число Маха.*

Введение. На структуру обтекания летательного аппарата (ЛА) и расположение скачков уплотнения при больших скоростях, а следовательно, и на его аэродинамические характеристики существенно влияют число Рейнольдса (Re), режим колебаний (число Струхаля (Sh)) и число Маха (M). При нестационарном обтекании аэродинамические характеристики ЛА зависят также от того, как он двигался в периоды, предшествующие измеренным мгновенным значениям газодинамических параметров, т. е. от закона движения в целом.

Современные методы нестационарной аэродинамики позволяют определить аэродинамические характеристики тел при неустановившихся движениях экспериментальным путем. Совокупности параметров определяют законы неустановившегося движения в целом, при этом представление коэффициентов аэродинамических сил и моментов возможно в виде зависимости от коэффициентов вращательных производных первого порядка (т. е. от коэффициентов в линейном разложении аэродинамических сил и моментов по безразмерным кинематическим параметрам движения и их производным [1]).

Динамические колебания летательного аппарата. Движение ЛА задается введением связанной с ним системы координат и проецированием на нее векторных газодинамических характеристик движения относительно неподвижной системы координат (абсолютной скорости u_0 и абсолютной угловой скорости Ω_0). Обозначая проекции Ω_0 на свя-

занные оси через Ω_x, Ω_y, Ω_z и представляя скорость u_0 в виде $u_0(t) = u + \Delta u(t)$, где средняя скорость u не зависит от времени t, можно с помощью средней поступательной скорости u и безразмерных газодинамических параметров полностью определить движение, т. е. мгновенные значения угла атаки α летательного аппарата. В этом случае газодинамические параметры определяются в виде

$$u = \frac{\Delta u}{u_\infty};\ \ \alpha = \alpha(t);\ \ \omega_y = \frac{\Omega_y L}{u};\ \ \omega_z = \frac{\Omega_z L}{u},$$

где u_∞ — скорость набегающего потока; L — характерный линейный размер ЛА; ω_y, ω_z — угловые скорости.

Аэродинамические силы и моменты, действующие на ЛА в неустановившемся движении, будут зависеть от мгновенных значений указанных параметров (их производных по времени):

$$\dot{u} = \frac{d\Delta u}{dt}\frac{L}{u^2},\ \ \dot{\alpha} = \frac{d\alpha}{dt}\frac{L}{u},\ \ \dot{\omega}_y = \frac{d\Omega_y}{dt}\frac{L^2}{u^2},\ \ \dot{\omega}_z = \frac{d\Omega_z}{dt}\frac{L^2}{u^2},$$

а также от совокупности факторов, характеризующих установившееся движение (сжимаемость, вязкость, плотность, число Маха).

Безразмерные коэффициенты сил и моментов в этом случае могут быть выражены через так называемые *вращательные производные*, которые показывают, сколь велико изменение силы или момента в зависимости от изменения (по времени) того или иного параметра [1]. Например, коэффициент подъемной силы

$$c_y = c_{y_0} + c_y^{\alpha}\alpha + c_y^{\dot{\alpha}}\dot{\alpha} + c_y^{\omega_z}\omega_z + c_y^{\dot{\omega}_z}\dot{\omega}_z$$

представляет собой, по существу, коэффициенты, учитывающие с достаточной для практики точностью основные факторы [1, 2], вызванные нестационарностью обтекания исследуемых тел. Параметры c_y^{α}, $c_y^{\omega_z}$ — это *статические производные устойчивости*, а $c_y^{\dot{\alpha}}$, $c_y^{\dot{\omega}_z}$ — *динамические производные устойчивости*.

Удобство введения вращательных производных состоит в том, что они позволяют исключать из рассмотрения время t, так как движение тела, имеющего шесть степеней свободы, вполне определяется значением указанных параметров и их производных по времени. При этом следует иметь в виду, что в наиболее важных для практики случаях задача нестационарного обтекания упрощается, так как многие параметры и их производные обращаются в нуль.

Экспериментальное определение вращательных производных в большинстве случаев связано с изучением сил и моментов, действующих на поверхность ЛА. При этом, чтобы определить коэффици-

енты параметров u, $\dot{u}$, α, $\dot{\alpha}$, необходимо измерить силы и моменты, действующие на поверхность тела при $u = \text{const}$ и колебаниях ЛА.

Особый интерес представляет *движение тангажа*, которое называют главным видом движения. Обычно при таком движении возникают продольные колебания, которые хорошо описываются синусоидальными зависимостями для производных $\dot{\alpha}$ или $\dot{\vartheta}$:

$$\dot{\alpha} = A\sin\omega t, \quad \dot{\vartheta} = \Omega_z = D\sin\varphi t,$$

где A, D — амплитуды колебаний; ω, φ — частоты колебаний.

Эти зависимости определяют гармонический закон изменения производных $\dot{\alpha}$ и $\dot{\vartheta}$. Можно рассмотреть три вида движения (рис. 1), каждый из которых описывается таким законом [1, 3–5].

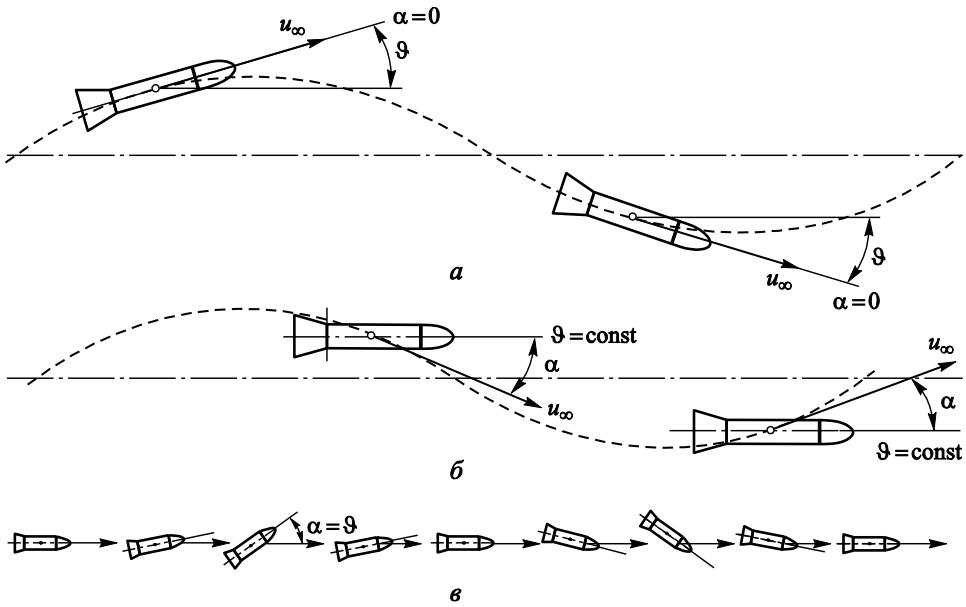


Рис. 1. Частные случаи движения ЛА

Первый вид фугоидного движения (см. рис. 1, *а*) соответствует условию $\alpha = 0$, $\dot{\vartheta} = \Omega_z = D\sin\varphi t$. В этом виде движения ось тела, совпадая с направлением полета $(\alpha = 0)$, совершает вдоль траектории колебания в соответствии с гармоническим законом. Второй вид движения (см. рис. 1, *б*) характеризуется тем, что ось тела сохраняет свою ориентировку вдоль траектории, так что $\dot{\vartheta} = \Omega_z = 0$. При этом однако меняется угол атаки в соответствии с гармоническим законом изменения производной угла атаки $\dot{\alpha}$. Третий вид движения (см. рис. 1, *в*) характеризуется прямолинейной траекторией, вдоль которой ось аппарата изменяет свое положение по синусоидальному закону. В этом случае

углы ϑ и α равны и совпадают по фазе, так что $\dot{\alpha} = \dot{\vartheta} = \Omega_z$. При таком движении существенными производными являются коэффициенты подъемной силы и момента демпфирования, соответственно $c_y^{\dot{\bar{\alpha}}} + c_y^{\omega_z}$ и $m_y^{\dot{\bar{\alpha}}} + m_y^{\omega_z}$.

Состояние *статического равновесия* гиперзвукового летательного аппарата (ГЛА) определяется условиями полета, а именно силовым воздействием, при котором суммарный аэродинамический момент относительно центра масс равен нулю $(\bar{M} = 0)$ в случае отсутствия вращения $(\bar{\Omega} = 0)$, а также изменения углов атаки $(\dot{\alpha} = 0)$. Такое равновесие соответствует *режиму установившегося прямолинейного движения ЛА*, при котором параметры движения не зависят от времени. Очевидно, что для осесимметричных конфигураций, обтекаемых в продольном направлении, равенство $\bar{M} = 0$ достигается при нулевых углах атаки. Таким образом, в этом случае равновесие, называемое *балансировкой аппарата*, возникает при балансировочных углах атаки и скольжения, равных нулю $(\alpha_{бал} = 0)$. Для того чтобы сбалансировать полет при других углах атаки $(\alpha \neq \alpha_{бал})$, требуются дополнительные управляющие усилия.

Характер равновесия ЛА определяется его статической устойчивостью или неустойчивостью. Для выявления сущности статической устойчивости можно рассмотреть обтекание потоком воздуха в аэродинамической трубе летательного аппарата, закрепленного в центре масс (ц. м.) и имеющего возможность поворачиваться вокруг него (рис. 2). Возможная зависимость между α и M_z показана на рис. 2, где положениям равновесия соответствуют точки 1, 2, 3, определяющие балансировочные углы $\alpha_{1бал}$, $\alpha_{2бал}$, $\alpha_{3бал}$, при которых достигается равенство нулю аэродинамического момента.

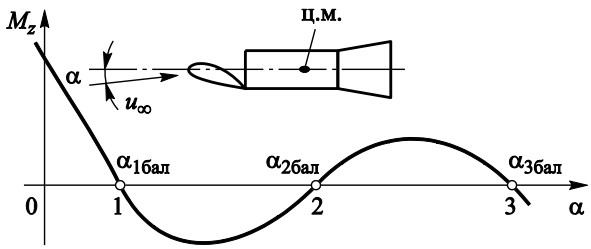


Рис. 2. Зависимость аэродинамического момента от угла α

Рассмотрим равновесие в точке 1. Если отклонить ГЛА на угол, меньший или больший $\alpha_{1бал}$, и предоставить аппарат самому себе, то возникший соответственно положительный или отрицательный момент вызовет увеличение (уменьшение) этого угла до прежнего зна-

чения $\alpha_{1\,бал}$, т. е. эти моменты окажутся стабилизирующими. Таким образом, положение равновесия в точке 1 устойчиво (ГЛА *статически устойчив*). Аналогично можно показать, что такое положение устойчивого равновесия будет соответствовать точке 3. В первом случае вращение ГЛА будет продолжаться до тех пор, пока он не займет положение равновесия в точке 1, а во втором случае — в точке 3. Что же касается точки 2 ($\alpha_{2\,бал}$), то в ней положение равновесия будет неустойчиво. Действительно, как видно из рис. 2, при значениях α, больших или меньших балансировочных углов, возникает соответственно положительный или отрицательный момент, который стремится увеличить (или уменьшить) α. Таким образом, эти моменты являются дестабилизирующими и ГЛА будет *статически неустойчивым*.

Аналитические выражения для длиннопериодических (фугоидных) и короткопериодических (по углу атаки) колебаний невращающегося ЛА получены в собственной плоскости симметрии. По фугоидным колебаниям проведены классические исследования для относительно медленного движения ЛА по тангажу при постоянном угле атаки и нулевом продольном моменте [6–10]. При рассмотрении таких длиннопериодических колебаний предполагалось, что сила тяги равна силе сопротивления, так что фугоидные колебания характеризуют взаимный обмен между кинетической и потенциальной энергиями при постоянном коэффициенте подъемной силы и незначительном демпфировании. С другой стороны, короткопериодические колебания обычно представляют собой колебания по углу атаки относительно высокой частоты, затухающие так быстро, что скорость полета (или кинетическая энергия) не успевает измениться, в то время как высота (или потенциальная энергия) изменяется незначительно.

В работе [2] показано, что при полете с гиперзвуковыми скоростями период так называемых короткопериодических колебаний может превышать период фугоидных колебаний, если высота полета столь велика, что восстанавливающий аэродинамический момент становится незначительным. Таким образом, короткопериодические колебания — это колебания по углу атаки в противоположность фугоидным колебаниям, которые совершаются при почти постоянном значении угла атаки.

В работе [1] при условиях, что разность сил тяги и лобового сопротивления близка к нулю, коэффициент подъемной силы постоянен, момент инерции относительно поперечной оси незначителен и плотность атмосферы постоянна, получено выражение для периода незатухающих фугоидных колебаний вида

$$T = \frac{\sqrt{2}\,u}{g}\pi. \tag{1}$$

Выражение (1) справедливо для любого ЛА, обладающего подъемной силой и совершающего полет с нулевым продольным моментом на постоянной высоте или с постоянной горизонтальной скоростью u при малых демпфирующих силах или моментах.

В работе [6] показано, что изменение плотности воздуха с высотой, имеющее место в действительности, приводит к уменьшению периода фугоидных колебаний, особенно в том случае, когда скорость возрастает. В работах [1] и [3] при определенных допущениях получено выражение для периода незатухающих фугоидных колебаний в стратосфере

$$T = \frac{\sqrt{2}u}{g}\pi\left[1+\frac{u^2}{2g}\left(-\frac{\rho'}{\rho}\right)\right]^{-1/2}, \tag{2}$$

где ρ — плотность атмосферы; $\rho' = \dfrac{\partial\rho}{\partial r}$ — производная плотности атмосферы.

Для земной атмосферы

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial r} \approx -6{,}71\cdot 10^{-3}\,\text{м}^{-1}. \tag{3}$$

Период фугоидных колебаний при достижении трансзвуковых скоростей уменьшается приблизительно на 30 %, а при сверхзвуковых скоростях становится еще меньше.

В работах [9–15] отмечено, что необходимо учитывать эффект сжимаемости. В этих работах получены линеаризованные уравнения движения для возмущенного горизонтального полета над Землей и выведены уравнения пятого порядка для собственных значений комбинированных уравнений движения, в которых выражения для аэродинамических сил и моментов учитывали эффект сжимаемости. Эти уравнения и их приближенные решения, полученные в работе [4], дают возможность определить все необходимые аэродинамические характеристики сверхзвукового ЛА. В работе [4] получено выражение для затухающих длиннопериодических колебаний при сверхзвуковых скоростях:

$$T = \frac{\sqrt{2}u}{g}\pi\left\{1+\frac{u^2}{2g}\left(-\frac{\rho'}{\rho}\right)+\left[1-\frac{u^2}{2g}\left(-\frac{a'}{a}\right)\zeta\right]\right\}^{-1/2}, \tag{4}$$

$$\frac{a'}{a} = \frac{1}{a}\frac{\partial a}{\partial r} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\rho'}{\rho}+\frac{2g}{u^2}\right),\ \zeta = \frac{\mathrm{M}}{2C_L}\left(\frac{\partial C_L}{\partial \mathrm{M}}\right)_\alpha \approx -\frac{1}{2}\frac{\mathrm{M}^2}{\mathrm{M}^2-1},$$

где a — скорость звука; $a' = \dfrac{\partial a}{\partial r}$ — производная скорости звука; C_L — коэффициенты подъемной силы.

В работе [2] с помощью численного анализа показано, что при гиперзвуковых скоростях необходимо также учитывать центробежную силу, обусловленную кривизной траектории полета на постоянной высоте над Землей. Кроме того, с приближением к первой космической скорости на ЛА начинает влиять изменение силы тяжести с высотой, т. е. все аэродинамические коэффициенты перестают зависеть от числа Маха. При этих условиях показано, что период фугоидных колебаний при постоянном малом угле атаки и нулевой разности сил тяги и лобового сопротивления определяется выражением

$$T = \frac{\sqrt{2}\,u}{g}\pi\left\{1 + \frac{u^2}{2g}\left[-\frac{\rho'}{\rho}(1-F^2) - \frac{2-F^2}{R}\right]\right\}^{-1/2}, \qquad (5)$$

$$F^2 = u^2/(gR) < 1,\ \ R > 6{,}4\cdot 10^6\,\text{м},$$

где R — расстояние от центра Земли до траектории установившегося полета на постоянной высоте.

Как показывает рис. 3, влиянием кривизны траектории нельзя пренебрегать, если $F > 0{,}4$, или $u > 3230$ м/с.

Период фугоидных колебаний при отсутствии лобового сопротивления и демпфирования. Если предположить, что коэффициент подъемной силы постоянен, сила тяги равна суммарной силе лобового сопротивления и угловое ускорение по тангажу равно нулю, то в таком случае удобно воспользоваться системой осей, одна из которых все время совпадает с касательной к траектории, как показано на рис. 4. При этом

$$m\frac{dV}{dt} = -mg\left(\frac{R}{r}\right)^2 \sin\gamma \approx -mg\left(\frac{R}{r}\right)^2 \gamma,$$

$$mV\frac{d\gamma}{dt} = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L - m\left[g\left(\frac{R}{r}\right)^2 - \frac{V^2}{r}\right]\cos\gamma, \qquad (6)$$

$$I_Y\frac{d^2(\gamma+\alpha-\Phi)}{dt^2} = \frac{1}{2}\rho V^2 S L C_m \approx 0,$$

где m, L — масса и длина летательного аппарата; V — результирующая скорость; S — площадь миделевого сечения; C_m, C_L — коэффициенты момента тангажа и подъемной силы; I_Y — момент инерции относительно оси Y.

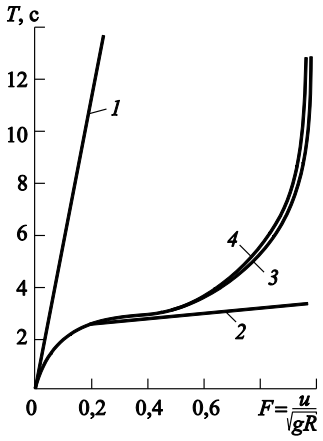


Рис. 3. Зависимость периода фугоидных колебаний от параметра F:

1 — $T = \frac{\sqrt{2}\,u}{g}\pi$; *2* — уравнение (2); *3* — уравнение (5); *4* — уравнение (13)

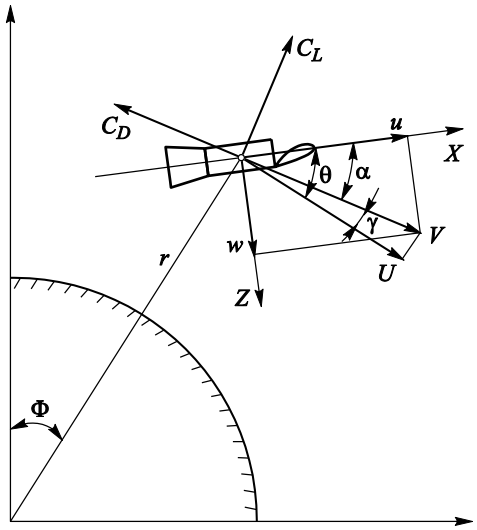


Рис. 4. Система осей, одна из которых касательная к траектории

Тогда для случая медленных колебаний, соответствующего полету с фугоидными колебаниями по траектории, эквидистантной поверхности Земли, уравнения (6) можно линеаризовать посредством выражений:

$$\frac{1}{V}\frac{dr}{dt} = \sin\gamma \approx \gamma, \quad \frac{d\gamma}{dt} \approx \frac{1}{V}\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{1}{V^2}\frac{dr}{dt}\frac{dV}{dt}, \quad r(t) = R\left[1 + e(t)\right],$$

$$V(t) = u\left[1 + \eta(t)\right], \ \rho(r) = \rho(R)\left[1 + (\rho'/\rho)\,e(t)R\right],$$

$$u\frac{d\eta}{dt} \approx -\frac{gR}{u}\frac{de}{dt}, \ \eta \approx -\frac{gR}{u^2}e + o(e^2),$$

$$\frac{d^2e}{dt^2} + \left[\frac{\rho(R)u^2SC_L}{2mR}\left(-\frac{\rho'}{\rho(R)}R + \frac{2gR}{u^2}\right) + \frac{u^2}{R^2}\right]e = 0,$$

где $e(t)$ — логарифмический декремент затухания.

Период фугоидных колебаний при этом определяется формулой

$$T = \frac{2\pi R}{u}\left\{1 + \frac{L_0}{mg}\left(\frac{gR}{u^2}\right)\left(-\frac{\rho'}{\rho}R + \frac{2gR}{u^2}\right)\right\}^{-1/2}, \qquad (7)$$

которая может быть сведена к уравнению (5), поскольку

$$\frac{\rho u^2 S C_L}{2mg} = \frac{L_0}{mg} = 1 - \frac{u^2}{gR} = 1 - F^2, \tag{8}$$

где L_0 — подъемная сила в установившемся полете.

Из уравнения (7) и рис. 3 следует, что при $F \to 1$ период фугоидных колебаний асимптотически стремится к периоду обращения по круговой орбите.

Период и декремент затухания фугоидных колебаний при гиперзвуковых скоростях. При сравнительно медленных фугоидных колебаниях угол атаки и коэффициент подъемной силы можно считать малыми и постоянными, а угловое ускорение — пренебрежимо малым. При этих условиях уравнения [2] для Земли сводятся к следующим:

$$\begin{gathered} X_u \Delta u + X_r \Delta r - mg\Delta\theta = m\frac{d\Delta u}{dt}, \\ Z_u \Delta u + Z_r \Delta r - 2mg\frac{\Delta r}{R} = -mq_0\Delta u - mu\left(\frac{d\Delta\theta}{dt} - \frac{\Delta u}{R} - q_0\frac{\Delta r}{R}\right), \\ \frac{d\Delta r}{dt} = u\Delta\theta,\ g(r) = g(R)\frac{R^2}{r^2},\ q = \frac{d\Delta\theta}{dt} - \frac{\Delta u}{R} - q_0\frac{\Delta r}{R}, \end{gathered} \tag{9}$$

где оси координат связаны с ЛА, как показано на рис. 5.

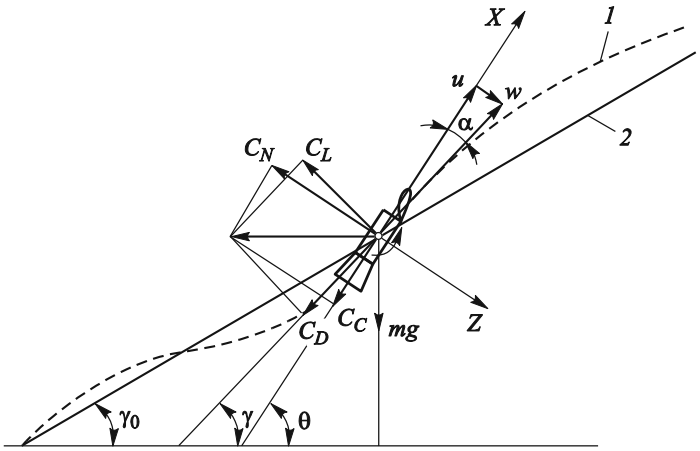


Рис. 5. Система связанных осей:
1 — возмущенная траектория полета; *2* — средняя линия траектории полета

В матричной форме уравнения (9) запишутся в виде

$$\begin{pmatrix} m\dfrac{d}{dt}-X_u & mg & -X_r \\ -Z_u-mq_0+\dfrac{mu}{R} & -mu\dfrac{d}{dt} & -Z_r+\dfrac{2mg}{R}+\dfrac{mu}{R}q_0 \\ 0 & -u & \dfrac{d}{dt} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta u\\ \Delta\theta\\ \Delta r\end{pmatrix}=0. \quad (10)$$

Необходимо отметить, что произведение проекций сил на соответствующие оси $X_rZ_u = X_uZ_r$, а $q_0 = -u/R$. Тогда корни λ характеристического уравнения этой матрицы определяются уравнением

$$\lambda^3-\frac{X_u}{m}\lambda^2+\left(\frac{Z_r}{m}-\frac{g}{u}\frac{Z_u}{m}+\frac{u^2}{R^2}\right)\lambda+\frac{X_u}{m}\left(\frac{2g}{R}-\frac{u^2}{R^2}\right)+\frac{X_r}{m}\left(-\frac{2u}{R}\right)=0, \quad (11)$$

где последние члены, не содержащие λ, характеризуют изменение силы сопротивления.

Поскольку изменение силы сопротивления может сказаться на периоде фугоидных колебаний лишь по истечении многих циклов [2, 4] , то период колебаний можно определить из уравнения (11) как мнимую часть величины λ_∞. В упрощенном уравнении

$$\lambda_\infty^2-\frac{X_u}{m}\lambda_\infty+\left(\frac{Z_r}{m}-\frac{g}{u}\frac{Z_u}{m}+\frac{u^2}{R^2}\right)=0, \quad (12)$$

так что

$$T=\frac{\sqrt{2}\,u}{g}\pi\left\{1+\frac{u^2}{2g}\left[-\frac{\rho'}{\rho}\left(1-F^2\right)-\frac{2-F^2}{R}-\frac{1}{2}\left(\frac{Q}{mg}\right)^2\right]\right\}^{-1/2}, \quad (13)$$

$$F^2=u^2/(gR),\ \ Q=\frac{1}{2}\rho u^2SC_D.$$

На рис. 3 представлены изменения периода фугоидных колебаний при совместном влиянии факторов, учтенных в уравнении (13), в то время как рис. 6 показывает, насколько хорошо уравнение (13) согласуется с численным решением для периода фугоидных колебаний, полученным в работе [2].

Производные параметров аэродинамических характеристик для продольных колебаний на гиперзвуковых скоростях при постоянной тяге и $\alpha\approx 0$ получены из следующих соотношений:

$$-X=0{,}5\rho V^2SC_C=0{,}5\rho V^2S\left(C_D\cos\alpha-C_L\sin\alpha\right),$$

$$-X_u = \rho u S C_D \left(1 + \frac{u}{2}\frac{\rho'}{\rho}\frac{dr}{du}\right) \approx \rho u S C_{D_j}, \quad -X_\omega = 0{,}5\rho u S\left(C_{D_\alpha} - C_L\right),$$

$$-X_q = 0{,}5\rho u S L \frac{\partial C_D}{\partial\left(Lq/u\right)}, \quad -X_r = 0{,}5\rho u^2 S C_D\left(\rho'/\rho\right),$$

$$-Z = 0{,}5\rho V^2 S C_N = 0{,}5\rho V^2 S\left(C_L\cos\alpha + C_D\sin\alpha\right),$$

$$-Z_u = \rho u S C_L\left(1 + \frac{u}{2}\frac{\rho'}{\rho}\frac{dr}{du}\right) \approx \rho u S C_{L_j},$$

$$-Z_\omega = 0{,}5\rho u S\left(C_{L_\alpha} - C_D\right), \quad -Z_q = 0{,}5\rho u S L \frac{\partial C_L}{\partial\left(Lq/u\right)},$$

$$-Z_r = 0{,}5\rho u^2 S C_L\left(\rho'/\rho\right),$$

$$M = 0{,}5\rho V^2 S L C_m, \quad M_u = M_r = 0, \quad M_{\dot\omega} \approx 0,$$

$$M_\omega = 0{,}5\rho u S L \frac{\partial C_m}{\partial\alpha}, \quad M_q = 0{,}5\rho u S L^2 \frac{\partial C_m}{\partial\left(Lq/u\right)}.$$

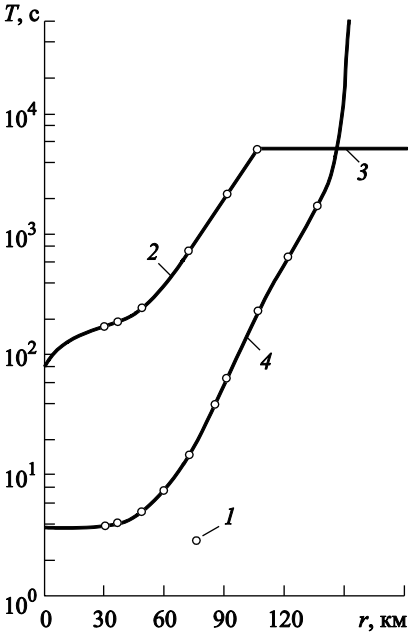


Рис. 6. Зависимость периода колебаний от высоты:

1 — численное решение; *2* — фугоидные колебания (13); *3* — период обращения; *4* — короткопериодические колебания (25)

Если сила тяги равна силе сопротивления, то соответствующий $C_D = 0$ и уравнение (13) сводится к уравнению (5). В то же время затухание фугоидных колебаний отсутствует, если не выполняется условие $C_D > 0$. Если сила сопротивления конечна, то коэффициент демпфирования можно определить из действительной части λ в уравнении (11). Так как численный анализ работы [2] показал, что затухание фугоидных колебаний незначительно, можно предположить, что

$$\lambda = \lambda_\infty + \delta, \qquad (14)$$

где $\delta \ll |\lambda|$ — малая действительная величина; λ_∞ — комплексный корень уравнения (12). Тогда, подставляя уравнение (14) в (11), отбрасывая члены порядка δ^2 и оставляя только главные члены,

получаем следующее приближение первого порядка при $C_D^2 \ll C_L$:

$$\delta = \frac{(X_u/m)\left[(2g/R)-\left(u^2/R^2\right)\right]+(X_r/m)\left[-(2u/R)\right]}{2\left\{\left(u^2/R^2\right)+\left[\rho u^2 SC_L/(2m)\right]\left[-(\rho'/\rho)+\left(2g/u^2\right)\right]\right\}}. \qquad (15)$$

Действительная часть λ дает декремент затухания в виде

$$\exp\left\{-\frac{\rho uSC_D}{2m}-\left[\frac{-(\rho'/\rho)u+(2g/u)-(u/R)}{-(\rho'/\rho)R+\left(2/F^2\right)+2m/(\rho SRC_L)}\right]\frac{C_D}{C_L}\right\}t, \qquad (16)$$

или с учетом уравнения (8)

$$\exp\left\{-\frac{g}{u}\frac{Q}{mg}-\left[\frac{-(\rho'/\rho)u+(2g/u)-(u/R)}{-(\rho'/\rho)R+\left(2/F^2\right)+\left(mgF^2/L_0\right)}\right]\frac{Q}{L_0}\right\}t. \qquad (17)$$

Колебания по углу атаки. Высокочастотные колебания по углу атаки при $V \approx u = \text{const}$ обычно являются быстрозатухающими и имеют малый период на высотах ниже 60 км [2]. При гиперзвуковых скоростях они могут быть описаны следующими уравнениями [3] в связанной системе координат (см. рис. 5):

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2}+b\frac{d\alpha}{dt}+c\alpha=0, \qquad (18)$$

$$b=\mu\frac{u}{L}\left(C_{N_\alpha}-\sigma C_{m_g}\right)+\frac{1}{u}\frac{du}{dt}, \qquad (19)$$

$$c=\mu\left(\frac{u}{L}\right)^2\sigma\left(-C_{m_\alpha}-\mu C_{m_g}C_{N_\alpha}\right)+\frac{u}{L}C_{N_\alpha}\frac{d\mu}{dt}+$$

$$+\frac{\mu}{L}\left(C_{N_\alpha}-\sigma C_{m_g}\right)\frac{du}{dt}-\left(\frac{1}{u}\frac{du}{dt}\right)^2+\frac{d^2u}{dt^2}\frac{1}{u}, \qquad (20)$$

где

$$\mu=\frac{\rho SL}{2m}<10^{-3},\ \ \sigma=\frac{mL^2}{b}\geq 6,\ \ C_{N_\alpha}=C_{L_\alpha}+C_D,\ \ C_{m_g}=\frac{\partial C_m}{\partial(Lq/u)}.$$

Известно, что члены уравнения, содержащие ускорения, играют важную роль лишь в задачах входа в атмосферу с гиперзвуковыми скоростями, для которого характерны большие значения отрицательного ускорения. Поэтому в случае установившегося гиперзвукового полета по траектории, параллельной земной поверхности ($\gamma_0 = 0$), уравнения (19) и (20) можно свести к следующим:

$$b \approx \mu\left(\frac{u}{L}\right)\left(C_{L_\alpha} + C_D - \sigma C_{m_g}\right), \tag{21}$$

$$c \approx \mu\left(\frac{u}{L}\right)^2 \sigma\left(-C_{m_\alpha}\right), \tag{22}$$

так как

$$-C_{m_\alpha} \gg \left|\mu C_{m_g}\left(C_{L_\alpha} + C_D\right)\right|.$$

Тогда период колебаний аппарата по углу атаки на гиперзвуковых скоростях

$$T \approx 2\pi\left(\frac{L}{u}\right)\left(-\mu\sigma C_{m_\alpha}\right)^{-1/2}, \tag{23}$$

а декремент затухания определится выражением

$$\exp\left\{-\left(\frac{\mu}{2}\right)\left(\frac{u}{L}\right)\left(C_{L_\alpha} + C_D - \sigma C_{m_g}\right)\right\}t. \tag{24}$$

Выражение для члена, учитывающего влияние высоты, получено в работе [2] и имеет вид

$$\alpha\frac{\partial C_m}{\partial\theta} \approx \frac{1,41mgL}{0,5\rho V^2 SR} = \frac{1,41}{\mu}\frac{gL^2}{Ru^2} \geq \frac{1,41}{\mu}\left(\frac{L}{R}\right)^2,$$

где

$$\left|\frac{\partial C_m}{\partial\theta}\right| < \frac{3\left(\frac{u}{R}\right)^2 I_Y}{0,5\rho u^2 SR} = \frac{3}{\mu\sigma}\left(\frac{L}{R}\right)^2.$$

Отсюда следует, что выражение (23) можно заменить выражением вида

$$T \approx 2\pi\frac{L}{u}\left[\mu\sigma\left(-C_{m_\alpha}\right) - 3\left(\frac{L}{R}\right)^2\right]^{-1/2}. \tag{25}$$

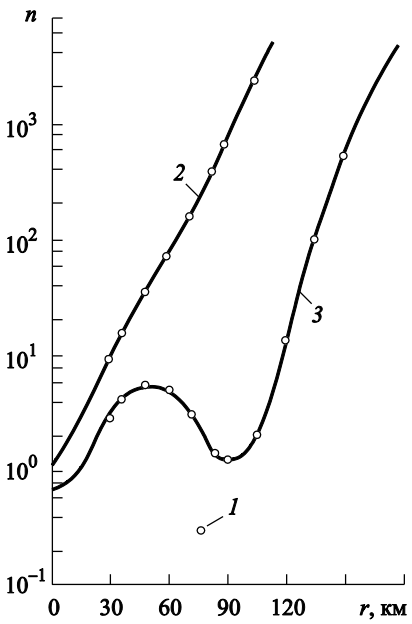


Рис. 7. Кривые демпфирования: *1* — численное решение; *2* — короткопериодические колебания (24); *3* — фугоидные колебания (17)

Графики на рис. 7, где n — число циклов, за которое амплитуда колебаний уменьшается вдвое, демонстрируют удовлетворительное совпадение аналитической зависимости (17) с численным результатом работы [2] для затухания фугоидных колебаний при постоянной тяге и гиперзвуковых скоростях полета.

Зависимость (17) показывает, что демпфирование, обусловленное наличием градиента плотности атмосферы, становится преобладающим при полете с большими скоростями и на больших высотах.

Заключение. Сравнение аналитических решений с численным решением работы [2] показывает, что зависимость (24) дает удовлетворительное приближение для декремента затухания колебаний по углу атаки при гиперзвуковых скоростях, а уравнение (23) для периода этих колебаний дает удовлетворительные результаты для высот, меньших 120 км. Однако на больших высотах аэродинамические силы и моменты практически не учитываются, поэтому в таких случаях следует учитывать влияние незначительного градиента поля тяготения на распределение масс в пределах самого ЛА. Необходимо отметить, что уравнение (25) можно рассматривать как частный случай уравнения (18) и что оно дает результаты, согласующиеся для всех высот с результатами численного анализа. Полученные в настоящей работе выражения для периода и декремента затухания колебаний показывают, что при всех скоростях, близких к скорости звука или превышающих ее, большую роль играет градиент плотности атмосферы, уменьшающий период и увеличивающий декремент затухания длиннопериодических колебаний.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Колесников К.С. *Динамика ракет*. Москва, Машиностроение, 2003, 520 с.

[2] Etkin B. Longitudinal dynamics of a lifting vehicle in orbital flight. *J. Aerospace Sci*, 1961, vol. 28, pp. 779–788.

[3] Рабинович Б.И. *Введение в динамику ракет-носителей космических аппаратов*. Москва, Машиностроение, 1975, 416 с.

[4] Микишев Г.Н. *Экспериментальные методы в динамике космических аппаратов*. Москва, Машиностроение, 1978, 247 с.

[5] Булавкин В.В., ред. *Ракетно-космические технологии*. Москва, Славянская школа, 2003, с. 416–422.

[6] Краснов Н.Ф., ред. *Управление и стабилизация в аэродинамике*. Москва, Высшая школа, 1978, 480 с.

[7] Краснов Н.Ф., ред. *Аэродинамика ракет*. Москва, Высшая школа, 1968, 772 с.

[8] Халид М., Ист Р.А. Устойчивость острых конусов при гиперзвуковых скоростях на малых углах атаки. *РТиК*, 1980, т. 18, № 10, с. 140–142.

[9] Белоцерковский С.М., Скрипач Б.К., Табачников В.Г. *Крыло в нестационарном потоке газа*. Москва, Наука, 1971, 754 с.

[10] Сидняев Н.И. О вращательных производных ступенчатых конусов с разрушающимся покрытием. *Тезисы докл. Второй Всерос. конф. «Необратимые процессы в природе и технике»*. МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002, с. 96, 97.

[11] Сидняев Н.И. Методика численного расчета сверхзвукового обтекания колеблющегося осесимметричного тела вращения в условиях интенсивного поверхностного массообмена. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2003, № 1(10), с. 71–87.

[12] Сидняев Н.И. Метод расчета нестационарного обтекания тела вращения с поверхностным массообменом в рамках параболизированных уравнений Навье — Стокса. *Математическое моделирование*, 2004, т. 16, № 5, с. 55–65.

[13] Сидняев Н.И. О методике исследования коэффициентов вращательных производных аэродинамического момента конуса с поверхностным массообменом. *Известия вузов. Авиационная техника*, 2004, № 2, с. 30–33.

[14] Сидняев Н.И. О задаче колебательного движения конуса в сверхзвуковом потоке с учетом предыстории. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение*, 2006, № 1(62), с. 3–14.

[15] Сидняев Н.И. Исследование аэродинамических характеристик тел вращения с проницаемым наконечником при обтекании гиперзвуковым потоком. *Прикладная механика и техническая физика*, 2007, т. 48, № 2, с. 12–20.

Статья поступила в редакцию 06.03.2014

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Сидняев Н.И., Глушков П.А. Длиннопериодические колебания летательных аппаратов при гиперзвуковых скоростях. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 1, с. 99–114.

Сидняев Николай Иванович родился в 1955 г., окончил МВТУ им. Н.Э. Баумана в 1981 г. и МГУ им. М.В. Ломоносова в 1985 г. Д-р техн. наук, профессор, зав. кафедрой «Высшая математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор около 220 научных работ в области прикладной математики и механики. e-mail: sidnyaev@yandex.ru

Глушков Павел Андреевич родился в 1991 г. Студент кафедры «Высшая математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Long-period oscillations of aircraft at hypersonic speeds

© N.I. Sidnyaev, P.A. Glushkov

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

The article presents the theoretical analysis of the long-period (phugoid) aircraft oscillations, which has a lifting force and performs a flight at hypersonic speeds in any atmosphere. Oscillations are caused by mutual transition of kinetic energy into potential energy during the flight along the path having an oscillatory character and being determined primarily by controlled longitudinal zero momentum in steady flight. The study shows that with the speed approximating to the first cosmic speed, the decrease in gravity at height dominates the decrease in density of the atmosphere, so that with increasing speed the period of phugoid oscillations tends asymptotically to the corresponding period of the satellite. During the research there were obtained analytical expressions for the short-period oscillations or vibrations at the angle of attack. The study demonstrates that these expressions, as well as the expressions for the long-period oscillations are in good agreement with numerical solutions.

Keywords: *phugoid oscillations, period, stabilization, damping rate, hypersonic speed, damping, angle of attack, Mach number.*

REFERENCES

[1] Kolesnikov K.S. *Dinamika raket* [Rocket dynamics]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 2003, 520 p.

[2] Etkin, B. J. Aerospace Sci., no. 28, October 1961, pp.779–788.

[3] Rabinovich B.I. *Vvedenie v dinamiku raket-nositelei kosmicheskikh apparatov* [Introduction into spacecraft carrier rocket dynamics]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1975, 416 p.

[4] Mikishev G.N. *Eksperimental'nye metody v dinamike kosmicheskikh apparatov* [Experimental methods in spacecraft dynamics]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1978, 247 p.

[5] Bulavkin V.V., ed. *Raketno-kosmicheskie tekhnologii* [Space-rocket technologies]. Moscow, Slavyanskaya shkola Publ., 2003, pp. 416–422.

[6] Krasnov N.F., ed. *Upravlenie i stabilizatsiya v aerodinamike* [Control and stabilization in aerodynamics]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1978, 480 p.

[7] Krasnov N.F., ed. *Aerodinamika raket* [Rocket aerodynamics]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1968, 772 p.

[8] Khalid M., Ist R.A. *RTiK*, 1980, vol. 18, no. 10, pp.140–142.

[9] Belotserkovsky S.M., Skripach B.K., Tabachnikov V.G. *Krylo v nestatsionarnom potoke gaza* [The wing in non-stationary gas flow]. Moscow, Nauka Publ., 1971, 754 p.

[10] Sidnyaev N.I. O vrashchatel'nykh proizvodnykh stupenchatykh konusov s razrushayushchimsya pokrytiem [On rotary derivative step cones with disintegrating coating]. *Tezisy dokladov Vtoroi Vserossiyskoi konferentsii «Neobratimye protsessy v prirode i tekhnike», MGTU im. N.E. Baumana* [Brief outline reports of the 2nd Russian conference "Irreversible processes in nature and technologies"]. Moscow, 2002, pp. 96–97.

[11] Sidnyaev N.I. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Seriya Estestvennye nauki — Herald of Bauman Moscow State Technical University, Natural Science Series*, 2003, no. 1(10), pp. 71–87.

[12] Sidnyaev N.I. *Matematicheskoe modelirovanie — Mathematical modeling*, 2004, vol. 16, no. 5, pp. 55–65.

[13] Sidnyaev N.I. *Izvestiya vuzov. Aviatsionnaya tekhnika — Univ. Proc. Aeronautic engineering*, 2004, no. 2, pp. 30–33.

[14] Sidnyaev N.I. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Seriya Mashinostroenie — Herald of Bauman Moscow State Technical University, Engineering Series*, 2006, no. 1(62), pp. 3–14.

[15] Sydniaev N.I. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika — Applied mechanics and technical physics*, 2007, vol. 48, no. 2, pp. 12–20.

Sidnyaev N.I. (b. 1955) graduated from Bauman Moscow Higher Technical School in Dr. Sci. (Eng.), professor of the Higher Mathematics Department of Bauman Moscow State Technical University. Author of about 220 publications in the field of applied mathematics and mechanics. e-mail: sidnyaev@yandex.ru

Glushkov P.A. (b. 1991), a student at the Higher Mathematics Department of Bauman Moscow State Technical University.