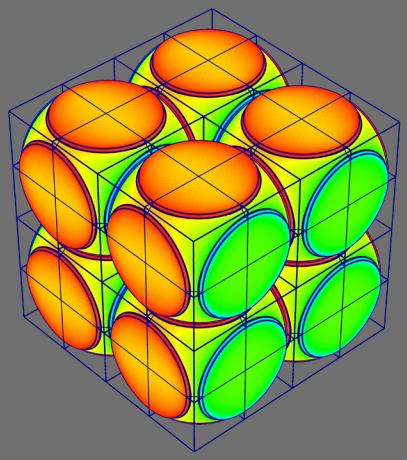
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Дубровин В. М., Бутина Т. А. Моделирование динамической устойчивости цилиндрической оболочки при действии осевой сжимающей нагрузки. Математическое моделирование и численные методы, 2015, №2 (6), с. 46-57

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/47/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.216.182
31.01.2026 07:53:48

УДК 539.3

Моделирование динамической устойчивости цилиндрической оболочки при действии осевой сжимающей нагрузки

© В.М. Дубровин, Т.А. Бутина

Предложен метод расчета динамической устойчивости цилиндрической оболочки при нагружении осевой сжимающей нагрузкой, изменяющейся во времени. В качестве примера рассмотрен случай, когда нагрузка меняется по линейному закону.

Ключевые слова: *цилиндрическая оболочка, прогиб, равновесное положение, диаграмма, коэффициент динамичности.*

Исследуем динамическую устойчивость цилиндрической оболочки, находящейся под действием внешнего избыточного давления, изменяющегося во времени. Если при этом рассматривать прогибы, сравнимые с толщиной оболочки, то задачу следует решать в нелинейной постановке. Диаграмма «стрела прогиба – нагрузка» для оболочки имеет вид, представленный на рис. 1 [1−5]. Исследуя равновесные формы при статическом нагружении, получаем на диаграмме линию с верхней и нижней критическими точками $P_в$ и $P_н$. Если нагрузка быстро возрастает во времени, то параметр внешних сил может пробежать уровни как нижней, так и верхней критических нагрузок, (участок $0K$), причем на начальном участке ($P > P_в$) будут происходить колебания вокруг равновесных форм, характеризующихся малыми прогибами. Затем происходит скачкообразное перемещение оболочки к равновесным положениям с большими прогибами (участок KN). После этого начинаются колебания вокруг этих новых равновесных форм, имеющих ярко выраженный нелинейный характер. В дальнейшем этот процесс «хлопка» оболочки при быстро возрастающей нагрузке будем называть динамическим выпучиванием, или динамической потерей устойчивости, а нагрузку, соответствующую моменту хлопка, — динамической критической нагрузкой P_D. Условно она определяется как абсцисса точки перегиба M кривой $P(f)$, т. е. точки, соответствующей наибольшей скорости выпучивания оболочки.

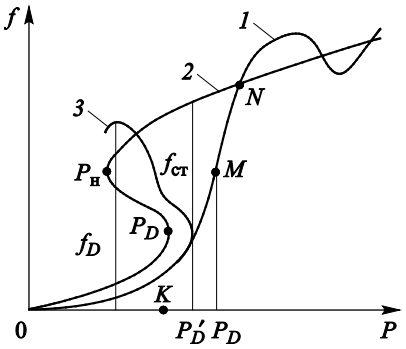


Рис. 1. Диаграмма «стрела прогиба − нагрузка» для цилиндрической оболочки:
1 − статическое нагружение; *2* − динамическое нагружение (восходящая ветвь); *3* − динамическое нагружение (нисходящая ветвь)

До сих пор предполагалось, что приложенная к оболочке нагрузка возрастает во времени, а прощелкивание оболочки происходит на восходящей ветви нагружения. Если нагрузка возрастает до некоторой величины ($P'_D < P_D$) и затем уменьшается по некоторому закону, то в зависимости от скорости падения нагрузки может быть либо возвращение оболочки в исходное состояние, либо прощелкивание оболочки на нисходящей ветви нагружения. При этом считается, что прощелкивание оболочки имеет место, если наибольший прогиб f_D достиг $f_{\text{ст}}$, под которым понимают статический прогиб, соответствующий нагрузке P'_D. Такое сопоставление позволяет выяснить, возникнут ли при динамическом нагружении, осуществляемом по сложной программе, заметные остаточные деформации.

Уравнения, выражающие компоненты деформаций срединной поверхности оболочки в соответствии со схемой внутренних сил и моментов, приведенной на рис. 2, могут быть представлены в виде [6–8]

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x} - k_1 w + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2; \;\; \chi_1 = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2};$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial x} - k_2 w + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2; \;\; \chi_2 = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2};$$

$$\gamma = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}; \;\; \chi_3 = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},$$

где ε_1, ε_2 — деформации растяжения (сжатия) в осевом и кольцевом направлениях; γ — деформация сдвига; χ_1, χ_2 — деформации изгиба соответственно в осевом и кольцевом направлениях; χ_3 — деформация кручения; u, v, w — компоненты деформации оболочки по осям X, Y, Z; k_1, k_2 — главные кривизны поверхности.

Эти величины связаны уравнением совместности деформаций:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{2} L(w, w) - \nabla_k^2 w, \tag{1}$$

где $L(w,w) = 2\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2\right]$; $\nabla_k^2 = k_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + k_1 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$.

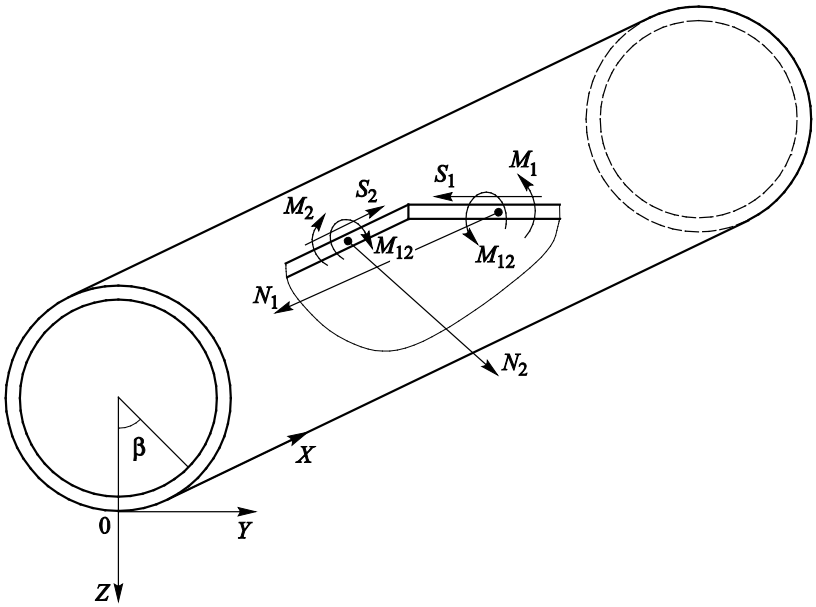


Рис. 2. Схема внутренних сил и моментов
в произвольном сечении оболочки

Соотношения Гука при этом имеют вид

$$\sigma_1 = \frac{E}{1-\mu^2}\left(\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2\right); \;\; \sigma_2 = \frac{E}{1-\mu^2}\left(\varepsilon_2 + \mu\varepsilon_1\right); \;\; \tau = \frac{E}{2\left(1+\mu^2\right)} - \gamma;$$

$$M_1 = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right); \;\; M_2 = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right);$$

$$M_{12} = -D\left(1-\mu\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},$$

где E, μ — модуль упругости и коэффициент Пуассона материала оболочки; σ_1, σ_2, τ — нормальные и касательные напряжения в срединной поверхности оболочки.

Уравнения равновесия произвольного элемента оболочки можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0; \;\; \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_2}{\partial y} = 0;$$

$$D\nabla^2\nabla^2 w = \sigma_1\delta\left(k_1 + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + \sigma_2\delta\left(k_2 + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + 2\tau\delta\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + q. \qquad (2)$$

Здесь δ — толщина оболочки; q — интенсивность действующей поперечной нагрузки.

При решении задачи устойчивости в качестве q рассматривается суммарная проекция основных усилий P_x, P_y, S на направление нормали к поверхности оболочки. Тогда $q = -\delta\left(P_x \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + P_y \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2S \dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)$. Положительными считаются усилия, под действием которых увеличиваются параметры кривизны. В частности, P_x и P_y считаются положительными, если они являются сжимающими усилиями.

Введя в уравнение совместности деформаций (1) напряжения из соотношений теории упругости, будем иметь

$$\frac{1}{E}\left[\frac{\partial^2 \sigma_1}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 \tau}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \sigma_2}{\partial y^2} - \mu\left(\frac{\partial^2 \sigma_1}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 \tau}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \sigma_2}{\partial x^2}\right)\right] =$$

$$= -\frac{1}{2} L(w, w) - \nabla_k^2 w. \qquad (3)$$

Выразив в формулах (2) и (3) напряжения σ_1, σ_2, τ через функцию напряжений Φ в виде

$$\sigma_1 = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}; \quad \sigma_2 = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}; \quad \tau = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y},$$

получим

$$\frac{D}{\delta}\nabla^4 w = L(w, \Phi) + \nabla_k^2 \Phi + \frac{q}{\delta};$$

$$\frac{1}{E}\nabla^4 \Phi = -\frac{1}{2} L(w, w) - \nabla_k^2 w, \qquad (4)$$

где $L(w, \Phi) = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - 2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}$.

Для цилиндрической оболочки $k_1 = 0, k_2 = \dfrac{1}{R}$. Тогда уравнения (4) можно привести к виду

$$\frac{D}{\delta}\nabla^4 w = L(w, \Phi) + \frac{1}{R}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{q}{\delta};$$

$$\frac{1}{E}\nabla^4 \Phi = -\frac{1}{2} L(w, w) - \frac{1}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \qquad (5)$$

Если оболочка до нагружения имеет начальные прогибы $w_0(x, y)$, то выражения для деформаций имеют следующий вид:

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2;$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{R}\left(w - w_0\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)^2; \qquad (6)$$

$$\gamma = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial w_0}{\partial y}.$$

Здесь w — полный прогиб оболочки.

С учетом (6) уравнения (5) можно преобразовать следующим образом:

$$\frac{D}{\delta}\nabla^4\left(w - w_0\right) = L\left(w, \Phi\right) + \frac{1}{R}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{q}{\delta};$$

$$\frac{1}{E}\nabla^4 \Phi = -\frac{1}{2}\left[L\left(w, w\right) - L\left(w_0, w_0\right)\right] - \frac{1}{R}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(w - w_0\right). \qquad (7)$$

В случае подкрепленных оболочек можно считать, что ребра жесткости (продольные — стрингеры и поперечные — шпангоуты) расположены достаточно часто — так, что конструкцию можно рассматривать как ортотропную с приведенными жесткостями в продольном и кольцевом направлениях. Тогда принимая, что главные направления жесткости совпадают с линиями главных кривизн оболочки, а жесткость на кручение подкрепляющих элементов мала, вместо уравнений (7) будем иметь

$$\nabla_D^4\left(w - w_0\right) = L\left(w, \Phi\right) + \frac{1}{R}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{q}{\delta};$$

$$\nabla_h^4 \Phi = -\frac{1}{2}\left[L\left(w, w\right) - L\left(w_0, w_0\right)\right] - \frac{1}{R}\frac{\partial^2\left(w - w_0\right)}{\partial x^2},$$

где

$$\nabla_h^4 = h_2\frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + 2h_3\frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + h_1\frac{\partial^4}{\partial \beta^4};$$

$$\nabla_D^4 = D_1\frac{\partial}{\partial \alpha^4} + 2D_3\frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + D_2\frac{\partial^4}{\partial \beta^4};$$

$$h_1 = \frac{1}{E\delta_1};\ h_2 = \frac{1}{E\delta_2};\ h_3 = \frac{1}{G\delta} - \frac{2\mu}{E\delta};$$

$\delta_1 = \delta + \dfrac{F_{\text{с}}}{b_{\text{с}}}$ — приведенная толщина оболочки в продольном направлении; $\delta_2 = \delta + \dfrac{F_{\text{ш}}}{b_{\text{ш}}}$ — приведенная толщина оболочки в кольцевом направлении; $D_1 = \dfrac{EJ_{\text{с}}}{b_{\text{с}}} + \dfrac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)}$ — приведенная жесткость оболочки в продольном направлении; $D_2 = \dfrac{EJ_{\text{ш}}}{b_{\text{ш}}} + \dfrac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)}$ — приведенная жесткость оболочки в кольцевом направлении; $D_3 = \left[\mu\left(D_1 + D_2\right) + \dfrac{G\delta^3}{3}\right]$ — приведенная жесткость оболочки при кручении; $F_{\text{с}}, F_{\text{ш}}$ — площади поперечных сечений стрингера и шпангоута; $J_{\text{с}}, J_{\text{ш}}$ — моменты инерции сечений стрингера и шпангоута; $b_{\text{с}}, b_{\text{ш}}$ — шаг стрингеров и шпангоутов.

При решении динамической устойчивости следует учитывать инерционные нагрузки, соответствующие нормальному прогибу оболочки w. Согласно [9−11], инерционные нагрузки, соответствующие перемещениям u и v в срединной поверхности, можно не учитывать, не внося при этом существенных погрешностей в окончательный результат. Тогда с учетом сил инерции, соответствующих перемещению w, справедливы следующие исходные уравнения нелинейной теории для оценки динамической устойчивости оболочек:

для изотропной оболочки

$$\begin{gathered}\frac{D}{\delta}\nabla^4\left(w - w_0\right) = L\left(w, \Phi\right) + \frac{1}{R}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{q}{\delta} - \frac{\gamma_1}{g}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2};\\ \frac{1}{E}\nabla^4\Phi = -\frac{1}{2}\left[L\left(w, w\right) - L\left(w_0, w_0\right)\right] - \frac{1}{R}\frac{\partial^2\left(w - w_0\right)}{\partial x^2};\end{gathered} \tag{8}$$

для конструктивно-ортотропной оболочки

$$\begin{gathered}\nabla_D^4\left(w - w_0\right) = L\left(w, \Phi\right) + \frac{1}{R}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{q}{\delta} - \frac{\gamma_1}{g}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2};\\ \nabla_h^4\Phi = -\frac{1}{2}\left[L\left(w, w\right) - L\left(w_0, w_0\right)\right] - \frac{1}{R}\frac{\partial^2\left(w - w_0\right)}{\partial x^2}.\end{gathered} \tag{9}$$

Здесь γ_1 — удельный вес материала оболочки.

Уравнения (8), (9) позволяют оценить устойчивость оболочки при динамическом нагружении, соответствующем различным расчетным случаям.

Рассмотрим цилиндрическую оболочку под действием осевой сжимающей силы, приложенной к торцам оболочки. Приняв полный ω и начальный ω_0 прогибы оболочки в виде

$$\begin{aligned} w &= f\left(\sin\alpha_m x \sin\beta y + \psi \sin^2\alpha_m x + \varphi\right); \\ w_0 &= f_0\left(\sin\alpha_m x \sin\beta y + \psi \sin^2\alpha_m x + \varphi\right), \end{aligned} \tag{10}$$

где $\alpha_m = \dfrac{m\pi}{l}$; $\beta = \dfrac{m}{R}$; m — число полуволн в продольном направлении; l — длина оболочки, и используя уравнения (8), (9), получим интеграл этих уравнений в виде

$$\Phi = E\left(a_1^* \cos\alpha_m x + a_2^* \cos 2\beta y + a_3^* \sin\alpha_m x \sin\beta y + a_4^* \sin 3\alpha_m x \sin\beta y\right) - \frac{qy^2}{2}, \tag{11}$$

где $a_1^*, a_2^*, a_3^*, a_4^*$ определяются по формулам

$$\begin{aligned} a_1^* &= \frac{1}{16\alpha_m^2}\left[\frac{\left(f - f_0\right)^2 \beta^2}{2} + \left(f - f_0\right) f_0 \beta^2 - \frac{2\left(f - f_0\right)\psi}{R}\right]; \\ a_2^* &= \frac{\alpha_m^2}{32\beta^2}\left(f^2 - f_0^2\right); \\ a_3^* &= \frac{\alpha_m^2\left(f - f_0\right)}{R\left(\alpha_m^2 + \beta^2\right)} - \frac{\alpha_m^2 \beta^2\left(f^2 - f_0^2\right)}{\left(\alpha_m^2 + \beta^2\right)^2}\psi; \\ a_4^* &= \frac{\alpha_m^2 \beta^2}{\left(9\alpha_m^2 + \beta^2\right)^2}\left(f^2 - f_0^2\right); \end{aligned} \tag{12}$$

q — средняя интенсивность сжимающей нагрузки, приложенной к торцам оболочки.

Используя соотношения, выражающие деформацию через прогиб оболочки и функцию напряжений

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 - \frac{w}{R};$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}\right),$$

и условие замкнутости оболочки в окружном направлении $\Phi \frac{\partial v}{\partial y} dy = 0,$ можно записать выражение для φ в виде

$$\varphi = \frac{R^2}{\partial\left(f - f_0\right)} \frac{q}{E}\left(1 - \frac{\mu}{2}\right) - \frac{\psi}{2} + \frac{R}{8}\left(f + f_0\right)\beta^2.$$

Для определения параметров ψ и f справедливы соотношения, полученные с использованием метода Бубнова – Галеркина:

$$\begin{gathered} \int_0^l \int_0^{2\pi} X \sin \alpha_m x \sin \beta \, y dx dy = 0; \\ \int_0^l \int_0^{2\pi} X \sin^2 \alpha_m x dx dy = 0, \end{gathered} \tag{13}$$

где $X = \frac{D}{S} \nabla^4 \left(w - w_0\right) - L\left(w_1 \Phi\right) - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{q}{\delta} + \frac{\gamma}{q} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.$

С учетом (10), (11) из (13) получается уравнение, связывающее параметры прогиба с изменяющейся во времени нагрузкой,

$$\begin{gathered} \bar{q} = c_0\left(1 - \frac{\xi_0}{\xi}\right) + c_1\left(\xi^2 - \xi_0^2\right) + c_2\left(\xi^2 - \xi_0^2\right)\psi^2 - \\ -c_3\left(\xi - \xi_0\right)\psi + c_4 \frac{1}{\xi} \frac{d^2 \xi}{dt^2} - c_5 \frac{\xi^2 - \xi_0^2}{\xi} \psi, \end{gathered} \tag{14}$$

где

$$\bar{q} = \frac{qR}{E\delta};$$

$$c_0 = \frac{\xi_m^2}{\left(1 + \xi_m^2\right)\eta} + \frac{1}{12\left(1 - \mu^2\right)} \frac{\left(1 + \xi_m^2\right)^2}{\xi_m^2} \eta;$$

$$c_1 = \frac{1}{16} \frac{1 + \xi_m^4}{\xi_m^2} \eta;$$

$$c_2 = \xi_m^2 \left[\frac{1}{\left(1 + \xi_m^2\right)^2} + \frac{1}{\left(1 + 9\xi_m^2\right)^2}\right] \eta;$$

$$c_3 = \frac{1}{4\xi_m^2}\left[1 + \frac{4\xi_m^4}{\left(1+\xi_m^2\right)^2}\right];$$

$$c_4 = \frac{\gamma R^2}{Eg\eta}\frac{1}{\xi_m^2};$$

$$c_5 = \frac{\xi_m^2}{\left(1+\xi_m^2\right)^2};$$

$$\xi_m = \frac{m\pi R}{l} = \frac{\alpha_m}{\beta}.$$

Если из уравнения (14) исключить инерционный член и положить $\xi_0 = 0,$ получим статическое решение для идеальной оболочки:

$$\bar{q}_b = \frac{1}{12\left(1-\mu^2\right)}\frac{\left(1+\xi_m^2\right)^2}{\xi_m^2}\eta + \frac{\xi_m^2}{\left(1+\xi_m^2\right)\eta}.$$

Если положить $q = St$ и обозначить $\bar{t} = \dfrac{StR}{E\delta\bar{q}_b},$ то

$$S^* = \bar{q}_b\eta\xi^2\left(\frac{\delta}{R}\right)^2\left(\frac{cE}{RS}\right)^2,$$

уравнение (14) сведется к уравнению

$$\frac{1}{S^*}\frac{d^2\xi}{d\bar{t}^2} - \{\left(\bar{t} - \frac{\xi-\xi_0}{\xi}\right)\xi - \frac{1}{16\bar{q}_b}\eta\frac{1+\xi^4}{\xi^2}\left(\xi^3 - \xi\xi_0^2\right) -$$

$$-\frac{\xi^2\eta}{\bar{q}_0}\left[\frac{1}{\left(1+\xi^2\right)} + \frac{1}{\left(1+g\xi^2\right)^2}\right]\left(\xi^3 - \xi\xi_0^2\right)\psi^2 +$$

$$+\frac{1}{4\xi^2\bar{q}_b}\left[1 + \frac{4\xi^4}{\left(1+\xi^2\right)^2}\right]\psi\left(\xi-\xi_0\right)\xi + \frac{\xi^2}{\left(1+\xi^2\right)^2}\frac{1}{\bar{q}_b}\left(\xi^2 - \xi_0^2\right)\psi\} = 0. \quad (15)$$

Уравнение (15) может быть проинтегрировано численным методом, после чего определяют критические сжимающие усилия, соответствующие заданному воздействию, и сравнивают их с критическими нагрузками при статическом нагружении.

Если воспользоваться понятием коэффициента динамичности критической нагрузки k_D, равного отношению динамической критической нагрузки к верхнему статическому значению критической нагрузки, то для конкретной оболочки можно оценить влияние характера нагружения на несущую способность оболочки. В качестве примера на рис. 3 представлен график зависимости k_D от скорости нагружения для оболочки из алюминиевого сплава при следующих геометрических параметрах: $\frac{R}{\delta} = 180$; $\frac{l}{R} = 2,2$; $\xi_0 = 0,001$. Здесь же приведены экспериментальные данные для указанной оболочки, полученные в [1]. Как следует из этой зависимости, скорость нагружения влияет определенным образом на величину критической динамической нагрузки. Однако сравнивая эти результаты с результатами, полученными в [12], можно отметить, что при нагружении осевой сжимающей нагрузкой влияние скорости нагружения на устойчивость оболочки проявляется значительно слабее, чем при нагружении внешним избыточным давлением. Это связано с тем, что при осевом сжатии потеря устойчивости происходит с образованием мелких вмятин, занимающих лишь часть поверхности оболочки, поэтому силы инерции в этом случае играют меньшую роль, чем при внешнем давлении, когда в движение приходит вся оболочка.

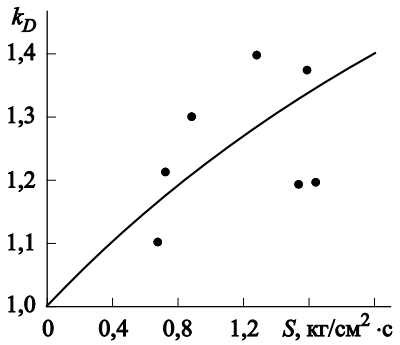


Рис. 3. Зависимость коэффициента динамичности критической нагрузки цилиндрической оболочки от скорости нагружения осевой сжимающей силой (точками изображены экспериментальные данные)

Выводы. На основании общей теории пологих оболочек предложен метод расчета динамической величины критической осевой силы для изотропной и ортотропной цилиндрических оболочек.

Скорость нагружения влияет определенным образом на величину критической динамической нагрузки, увеличивая значение критической нагрузки при кратковременном нагружении.

Влияние скорости нагружения осевой силой на устойчивость оболочки проявляется значительно слабее, чем при нагружении внешним избыточным давлением.

В соответствии с принятым динамическом критерием оболочка должна проверяться на устойчивость как на участке нагружения, так и на участке разгрузки.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Вольмир А.С. *Устойчивость деформируемых систем*. Москва, Наука, 1967, 984 с.
[2] Белоносов С.М. *Математическое моделирование равновесных состояний упругих тонких оболочек*. Москва, Наука, 1993, 158 с.
[3] Алгазин О.Д., Бутина Т.А., Дубровин В.М. К вопросу об оценке надежности и работоспособности конструкции при импульсном нагружении. *Вестник МГТУ им. Баумана*, 2011, Спец. выпуск «Математическое моделирование», с. 3.
[4] Работнов Ю.Н. *Проблемы механики деформируемого твердого тела. Избранные труды*. Москва, Наука, 1991, 194 с.
[5] Жилин П.А. *Актуальные проблемы механики*. Санкт-Петербург, изд-во политехн. ун-та, 2006, 306 с.
[6] Власов В.З. Общая теория оболочек. *Избранные труды*. Москва, изд-во АН СССР, 1962, т. 1, 528 с.
[7] Жилин П.А. *Основы теории оболочек*. Санкт-Петербург, изд-во политехн. ун-та, 2006, 166 с.
[8] Димитриенко Ю.И. *Универсальные законы механики и электродинамики сплошной среды*. Т. 2. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011, 560 с.
[9] Дубровин В.М., Бутина Т.А. Моделирование процесса взаимодействия ударной волны с цилиндрической оболочкой. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2014, вып. 4 (28). URL: http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/solid/1233.html
[10] Бутина Т.А., Дубровин В.М. Устойчивость цилиндрической оболочки при комбинированном нагружении. *Инженерный журнал: наука и инновации,* 2012, вып. 2. URL: http://engjournal.ru/articles/44/44.pdf.
[11] Narasimhan K.Y., Hoff N.J. Snapping of Imperfect Thin-Walled Circular Cylindrical Shells of Finite Length Trans. *ASME, ser. E*, 1971, vol. 38, no. 1, pp. 160−172.
[12] Дубровин В.М., Бутина Т.А. Моделирование динамической устойчивости цилиндрической оболочки при действии внешнего избыточного давления. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2014, вып. 6(30). URL: http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/solid/1237.html.

Статья поступила в редакцию 16.03.2015

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Дубровин В.М., Бутина Т.А. Моделирование динамической устойчивости цилиндрической оболочки при действии осевой сжимающей нагрузки. *Математическое моделирование и численные методы*, 2015, № 2 (6), с. 46–57.

Дубровин Виктор Митрофанович родился в 1935 г., окончил Саратовский государственный университет в 1958 г. Канд. техн. наук, доцент МГТУ им. Н.Э. Баумана. Специалист в области прочности и устойчивости деформируемых систем. Автор пяти изобретений. e-mail: dubrovinvm1934@yandex.ru

Бутина Татьяна Александровна родилась в 1950 г., окончила Московский физико-технический институт в 1974 г. Канд. физ.-мат. наук, доцент МГТУ им. Н.Э. Баумана. Специалист в области прочности и устойчивости деформируемых систем. e-mail: butina_ta@mail.ru

Modeling of the dynamic stability of a cylindrical shell under the axial compressive load

© V.M. Dubrovin, T.A. Butina

The article describes a method for calculating the dynamic stability of cylindrical shell under axial compressive time-varying load. The case of linearly varying load was considered as an example.

Keywords: *cylindrical shell, sagging, equilibrium position, chart, dynamic factor.*

REFERENCES

[1] Volmir A.S. *Ustoichivost deformiruemykh system* [Stability of Deformable Systems]. Moscow, Nauka Publ., 1967, 984 p.

[2] Belonosov S.M. *Matematicheskoe modelirovanie ravnovesnykh sostoyaniy uprugikh tonkikh obolochek* [Mathematical Modeling of the Equilibrium States of Thin Elastic Shells]. Moscow, Nauka Publ., 1993, 158p.

[3] Algazin O.D., Butina T.A., Dubrovin V.M. *Vestnic MGTU im. N.E. Baumana. Spetsialnyy vypusk: Matematicheskoe modelirovanie – Herald of the Bauman Moscow State Technical University*, 2011, special issue "Mathematical modeling", p. 3.

[4] Rabotnov Yu.N. *Problemy mekhaniki deformiruemogo tverdogo tela* [Problems of Deformable Solid Mechanics]. Selected Works. Moscow, Nauka Publ., 1991, 194 p.

[5] Zhilin P.A. *Aktualnye problemy mekhaniki* [Actual Problems in Mechanics]. St. Petersburg, SPbPU Publ., 2006, 306 p.

[6] Vlasov V.Z. *Izbrannye Trudy. Obschaya teoriya oboloche.* [Selected Works. The General Theory of Shells]. Vol. 1. Moscow, USSR AS Publ., 1962, 528 p.

[7] Zhilin P.A. *Osnovy teorii obolochek* [Fundamentals of the Theory of Shells]. St. Petersburg, SPbPU Publ., 2006, 166 p.

[8] Dimitrienko Yu.I. *Universalnye zakony mekhaniki i elektrodinamiki sploshnoy sredy* [Universal Laws of Mechanics and Electrodynamics of Continuous Media]. Vol. 2. Moscow, BMSTU Publ., 2011, 560 p.

[9] Dubrovin V.M., Butina T.A. *Inzhenernyi zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovations*, 2014, no. 4 (28). Available at: http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/solid/1233.html

[10]. Butina T.A., Dubrovin V.M. *Inzhenernyi zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovations*, 2012, issue 2. Available at: http://engjournal.ru/articles/44/44.pdf.

[11] Narasimhan K.Y., Hoff N.J. Snapping of Imperfect Thin-Walled Circular Cylindrical Shells of Finite Length Trans. *ASME, ser. E*, 1971, vol. 38, no. 1, pp. 160–172.

[12] Dubrovin V.M., Butina T.A. *Inzhenernyi zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovations*, 2014, no. 6(30). Available at: http:// engjournal.ru/catalog/mathmodel/solid/1237.html.

Dubrovin V.M. (b. 1935) graduated from the Faculty of Mathematics and Mechanics Saratov State University in 1958. Ph.D., Assoc. Professor of the Computational Mathematics and Mathematical Physics and of the Higher Mathematics Departments of Bauman Moscow State Technical University. Specialist in the field of strength, stability of deformable systems. Research interests: dynamics of strength and stability of deformable systems; creep of structural materials. e-mail: vmdubrovinvm1934@mail.ru

Butina T.A. (b. 1950) graduated from the Faculty of Management and Applied Mathematics of the Moscow Institute of Physics and Technology in 1974. Ph.D., Assoc. Professor of the Computational Mathematics and Mathematical Physics Department of Bauman Moscow State Technical University. A specialist in the field of strength and stability of deformable systems. e-mail: butinata@mail.ru