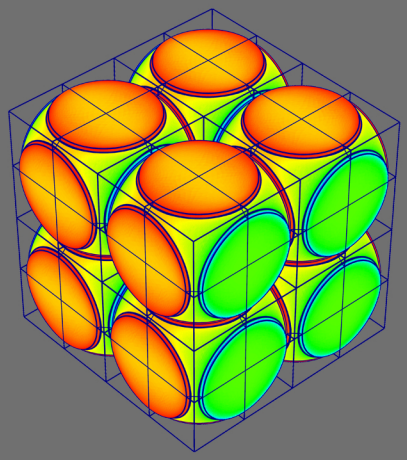
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Dimitrienko Y., Gubareva E., Sborschikov S., Bazyleva O., Lutsenko A., Oreshko E. Modeling the elastic-plastic characteristics of monocrystalline intermetallic alloys based on microstructural numerical analysis. Mathematical Modeling and Cотputational Methods, 2015, №2 (6), pp. 3-22

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/45/

Параметры загрузки:
IP: 3.41.188.32
17.11.2026 06:52:23

УДК 539.3

Моделирование упругопластических характеристик монокристаллических интерметаллидных сплавов на основе микроструктурного численного анализа

© Ю.И. Димитриенко[1], Е.А. Губарева[1], С.В. Сборщиков[1], О.А. Базылева[2], А.Н. Луценко[2], Е.И. Орешко[2]

[1]МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия
[2]ФГУП ВИАМ, Москва, 105005, Россия

Предложена модель микроструктуры двухфазных монокристаллических интерметаллидных сплавов в виде периодической структуры гексагонального типа, а также математическая модель упругопластического деформирования монокристаллического сплава, основанная на методе асимптотической гомогенизации периодических структур. Для фаз используется деформационная теория пластичности при активном нагружении с учетом эффекта их повреждаемости. Для численных расчетов по разработанной модели использован жаропрочный монокристаллический сплав ВКНА-1В. Проведены конечно-элементные расчеты микромеханических процессов деформирования и разрушения монокристаллического сплава ВКНА-1В. Установлено, что при растяжении максимальные значения параметра повреждаемости фаз, определяющего зону начала микроразрушения сплава, достигаются в зонах, прилегающих к поверхностям раздела фаз и в местах максимального искривления геометрической формы фаз. Проведены расчеты диаграмм деформирования жаропрочных сплавов в области пластичности, которые показали достаточно хорошее совпадение с экспериментальными данными.

***Ключевые слова**: микроструктура, интерметаллиды, монокристаллические сплавы, численное моделирование, метод асимптотического осреднения, метод конечных элементов (МКЭ), пластичность, повреждаемость, диаграммы деформирования.*

Введение. Монокристаллические сплавы, такие, как жаропрочные интерметаллидные никелевые сплавы (ИНС), в настоящее время активно применяют при создании газотурбинных двигателей [1−9]. Эти сплавы обладают ярко выраженной кристаллической дендритной микроструктурой, имеющей, как правило, форму, близкую к гексагональной, которая образуется в процессе направленной кристаллизации [9], и состоящей из нескольких основных фаз: γ-фаза — матрица из никелевого твердого раствора и γ'-фаза — включения интерметаллидов. Для расчета упругопластических характеристик таких сплавов может быть использован метод асимптотического осреднения композитов с периодической структурой [10−15]. Целью настоящей работы является применение данного метода для моделирования упругопластического деформирования и разрушения монокристаллических ИНС.

Метод асимптотического осреднения для упругопластических задач. Рассмотрим периодическую структуру — композит, которой в пространстве R_3 соответствует область V с поверхностью Σ. Композит состоит из N фаз: фазы с индексами $\alpha = 1,..., N-1$ представляют собой включения, а фаза с индексом $\alpha = N$ образует матрицу композита. Обозначим V_α, $\alpha = 1...N$, области в R_3, соответствующие α-й фазе композита, а также: Σ_α — поверхности областей V_α; $\Sigma_{\alpha N}$ — поверхности контакта матрицы и включений (полагаем, что включения не контактируют между собой); $\Sigma_{\alpha e}$ — часть поверхности Σ композита, занятая α-й фазой (причем $\Sigma_\alpha = \Sigma_{\alpha N} \cup \Sigma_{\alpha e}$ для включений и $\Sigma_N = \bigcup_{\alpha=1}^{N-1} \Sigma_{\alpha N} \cup \Sigma_{Ne}$ для матрицы). Включения и матрицу полагаем изотропными упругопластическими, соответствующими деформационной теории пластичности [16] с учетом повреждаемости. Тогда в каждой области V_α, $\alpha = 1, ..., N$, можно рассмотреть следующую задачу малых упругопластических деформаций:

$$\begin{cases} \sigma^\alpha_{ij,\,j} = 0 \ \text{ в } \ V_\alpha; \\ \sigma^\alpha_{ij} = F^\alpha_{ij}\left(z^\alpha, \varepsilon^\alpha_{kl}\right) \ \text{ в } \ V_\alpha \cup \Sigma_\alpha; \\ \varepsilon^\alpha_{ij} = \dfrac{1}{2}\left(u^\alpha_{i,j} + u^\alpha_{j,i}\right) \ \text{ в } \ V_\alpha; \\ u^\alpha_i = u^N_i, \left(\sigma^\alpha_{ij} - \sigma^N_{ij}\right) n_j = 0 \ \text{ на } \ \Sigma_{\alpha N}; \\ u^\alpha_i = u_{ie} \text{ на } \Sigma^1_{\alpha e}, \qquad \sigma^\alpha_{ij} n_j = S_{ie} \text{ на } \Sigma^2_{\alpha e}. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $u^\alpha_i, \sigma^\alpha_{ij}, \varepsilon^\alpha_{ij}$ — перемещения, напряжения и деформации в α-й фазе; условия на поверхности $\Sigma_{\alpha N}$ — это условия идеального контакта матрицы и включений, а на $\Sigma^1_{\alpha e}$ и $\Sigma^2_{\alpha e}$ — условия на внешних поверхностях; z^α — параметры повреждаемости, зависящие от напряжений $z^\alpha(\sigma^\alpha_{ij})$; $F^\alpha_{ij}\left(z^\alpha, \varepsilon^\alpha_{kl}\right)$ — определяющие соотношения упругопластичности при активном нагружении.

В силу наличия периодической структуры у композита можно выделить ячейку периодичности (ЯП) V_ξ, которая состоит из N фаз: $V_{\alpha\xi}$, $\alpha = 1,..., N$. Введем малый параметр $\kappa = l / L << 1$ как отношение характерного размера ЯП к характерному размеру всего композита, а также глобальные x^k и локальные ξ^k координаты. Будем полагать, что матрица является связной областью. Обозначим также поверхно-

сти раздела матрицы и включений ЯП через $\Sigma_{\xi\alpha N} = \Sigma_{\alpha N} \cap V_\xi$. В этом случае для такой структуры может быть применен метод асимптотического осреднения [17, 18], согласно которому решение задачи (1) для матрицы и включений строится в виде асимптотических разложений

$$\begin{aligned} u_i^\alpha &= u_i^{(0)}(x^k) + \kappa u_i^{\alpha(1)}(x^k, \xi^l) + \kappa^2 ...; \\ \varepsilon_{ij}^\alpha &= \varepsilon_{ij}^{\alpha(0)}(x^k, \xi^l) + \kappa \varepsilon_{ij}^{\alpha(1)}(x^k, \xi^l) + \kappa^2 ...; \\ \sigma_{ij}^\alpha &= \sigma_{ij}^{\alpha(0)}(x^k, \xi^l) + \kappa \sigma_{ij}^{\alpha(1)}(x^k, \xi^l) + \kappa^2 ...; \\ z^\alpha &= z^{\alpha(0)}(x^k, \xi^l) + \kappa z^{\alpha(1)}(x^k, \xi^l) + \kappa^2 ..., \end{aligned} \tag{2}$$

причем по аргументу ξ^l эти функции полагаются периодическими. Деформации и напряжения «нулевого уровня» имеют следующий вид:

$$\varepsilon_{ij}^{\alpha(0)} = \overline{\varepsilon}_{ij} + \frac{1}{2}(u_{i/j}^{\alpha(1)} + u_{j/i}^{\alpha(1)}); \tag{3}$$

$$\overline{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j}^{(0)} + u_{j,i}^{(0)}\right); \tag{4}$$

$$\sigma_{ij}^{\alpha(0)} = F_{ij}^\alpha \left(z^{\alpha(0)}, \varepsilon_{kl}^{\alpha(o)}\right), \text{ если } \xi^k \in V_{\alpha\xi}, \alpha = 1, ..., N. \tag{5}$$

Здесь $,_l = \partial / \partial x^l$ и $_{/l} = \partial / \partial \xi^l$ — производные по двум типам координат. При выводе формул (3)–(5) и далее используем правило дифференцирования асимптотических разложений [17,18].

Подставляя разложения (2) в систему (1), применяя правило дифференцирования и собирая члены при одинаковых степенях *k*, получаем так называемую локальную задачу на ячейке периодичности:

$$\begin{aligned} &\sigma_{ij/j}^{\alpha(0)} = 0 \text{ в } V_\xi; \\ &\sigma_{ij}^{\alpha(0)} = F_{ij}^\alpha \left(z^{\alpha(0)}, \varepsilon_{kl}^{\alpha(0)}\right) \text{ в } V_\xi \cup \Sigma_s; \\ &\varepsilon_{ij}^{\alpha(0)} = \overline{\varepsilon}_{ij} + \frac{1}{2}\left(u_{i/j}^{\alpha(1)} + u_{j/i}^{\alpha(1)}\right) \text{в } V_\xi; \\ &\left.\begin{aligned} &u_i^{\alpha(1)} = u_i^{N(1)} \\ &\left(\sigma_{ij}^{\alpha(1)} - \sigma_{ij}^{N(1)}\right) n_j = 0 \end{aligned}\right\} \text{ на } \Sigma_{\xi\alpha N}; \\ &\left\langle u_i^{\alpha(1)} \right\rangle = 0, \left[\!\left[u_i^{\alpha(1)} \right]\!\right] = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь оператор осреднения

$$\left\langle u_i^\alpha \right\rangle = \sum_{\alpha=1}^{N} \int_{V_{\xi\alpha}} u_i^\alpha dV_\xi \,. \tag{7}$$

Условие $\left[\!\left[u_i^{\alpha} \right]\!\right] = 0$ в (6) — это условие периодичности функций на границе ячейки периодичности. В силу периодичности функций $u_i^{\alpha(1)}$ имеет место следующее соотношение:

$$\overline{\varepsilon}_{ij} = \left\langle \varepsilon_{ij}^{\alpha(0)} \right\rangle = \frac{1}{2}\left(u_{i,j}^{(0)} + u_{j,i}^{(0)} \right). \qquad (8)$$

Соотношения деформационной теории упругопластичности для сред с повреждаемостью. Материал фаз полагаем изотропным, подчиняющимся модифицированной деформационной теории малых упругопластических деформаций Ильюшина для активного нагружения [16]. В этом случае функция $F_{ij}\left(z\ , \varepsilon_{kl} \right)$ (индекс α опущен) имеет следующий вид:

$$\sigma_{ij} = F_{ij}\left(z\ , \varepsilon_{kl} \right) = (K(z) - \frac{2}{3}G(z)(1-\omega))\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2G(z)(1-\omega)\varepsilon_{ij}, \qquad (9)$$

где $\omega(Y_2(\varepsilon))$ — функция пластичности Ильюшина, которую выберем в степенном виде [19]:

$$\omega(Y_2(\varepsilon)) = \begin{cases} 0, & Y_2(\varepsilon) \le \varepsilon_p; \\ 1 - (\dfrac{\varepsilon_p}{Y_2(\varepsilon)})^{1-n}, & Y_2(\varepsilon) > \varepsilon_p, \end{cases} \qquad (10)$$

где ε_p — деформация начала текучести материала; n — показатель упрочнения; $Y_2(\varepsilon)$ — второй инвариант (интенсивность) тензора деформации,

$$Y_2(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{(\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22})^2 + (\varepsilon_{22}-\varepsilon_{33})^2 + (\varepsilon_{33}-\varepsilon_{11})^2 + 6(\varepsilon_{12}{}^2 + \varepsilon_{13}{}^2 + \varepsilon_{23}{}^2)}; \qquad (11)$$

$K(z)$ — модуль объемного сжатия материала и $G(z)$ — модуль сдвига, зависящие от параметра повреждаемости z,

$$K(z) = K_0 a(z);\ \ G(z) = G_0 a(z). \qquad (12)$$

Здесь $a(z)$ — функция, описывающая повреждаемость материала. Выбираем ее в степенном виде:

$$a(z) = \frac{1}{2}\left(\left| 1 - z^{m_z} \right| + 1 - z^{m_z} \right), \qquad (13)$$

где m_z — константа; $a(z) = 1$, если $z = 0$, и $a(z) = 0$, если $z \ge 1$.

Для параметра повреждаемости принимаем следующую зависимость от инвариантов тензора напряжений:

$$z = \frac{\sigma_u^2}{3\sigma_S^2(1+B_1V(\sigma))} + \left(\frac{1}{\sigma_T^2} - \frac{1}{3\sigma_S^2}\right)\sigma_+^2. \tag{14}$$

Здесь обозначены первый и второй инварианты тензора напряжений:

$$\begin{gathered}\sigma = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33};\\ \sigma_u = \frac{1}{\sqrt{2}}((\sigma_{11}-\sigma_{22})^2 + (\sigma_{11}-\sigma_{33})^2 + (\sigma_{22}-\sigma_{33})^2 + \\ +6(\sigma_{12}^2+\sigma_{13}^2+\sigma_{23}^2))^{1/2};\\ \sigma_- = \frac{1}{2}(|\sigma|-\sigma);\ \ \sigma_+ = \frac{1}{2}(|\sigma|+\sigma),\end{gathered} \tag{15}$$

а σ_T, σ_C, σ_S — пределы прочности при растяжении, сжатии и сдвиге.

Константу B вычисляем через пределы статической прочности при сжатии и сдвиге:

$$B = \left(\frac{\sigma_C^2}{3\sigma_S^2} - 1\right)\frac{1}{\sigma_C}. \tag{16}$$

В модели имеют место следующие соотношения между пределами статической прочности:

$$\sigma_C > \sqrt{3}\sigma_S;\ \ \sigma_C > 0;\ \ \sigma_S > 0;\ \ \sigma_T < \sqrt{3}\sigma_S. \tag{17}$$

В выражении (14) введена непрерывная положительная функция от первого инварианта σ, описывающая гладкий переход накопления повреждений в областях растяжения и сжатия:

$$V(\sigma) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \sigma > 0;\\ -\sigma, & \text{если} \quad -\sigma_C < \sigma < 0;\\ \sigma_C, & \text{если} \quad \sigma < -\sigma_C. \end{cases} \tag{18}$$

Модель (14) накопления повреждений позволяет учесть различие в накоплении повреждений в областях растяжения и сжатия. Когда параметр повреждаемости достигает единицы, происходит локальное разрушение материала в некоторой точке. Из условий

$$z = 1 \tag{19}$$

и (14) получаем следующий критерий прочности материала фазы:

$$\frac{\sigma_u^2}{3\sigma_S^2(1+B_1V(\sigma_-))}+\left(\frac{1}{\sigma_T^2}-\frac{1}{3\sigma_S^2}\right)\sigma_+^2=1, \tag{20}$$

согласно которому в области растяжения $(\sigma>0)$ поверхность прочности имеет вид

$$\frac{\sigma_u^2}{3\sigma_S^2}+\left(\frac{1}{\sigma_T^2}-\frac{1}{3\sigma_S^2}\right)\sigma_+^2=1; \tag{21}$$

в области сжатия $(-\sigma_C<\sigma<0)$ происходит увеличение предела прочности; критерий прочности принимает вид

$$\sigma_u^2=3\sigma_S^2(1+B\sigma), \tag{22}$$

а в области сверхсжатия $(\sigma<-\sigma_C)$ поверхность прочности совпадает с поверхностью прочности по критерию Мизеса:

$$\sigma_u^2=\sigma_C^2. \tag{23}$$

Как и по критерию Мизеса, при всестороннем сжатии, когда выполняется условие $\sigma_u=0,$ разрушения не происходит.

При всестороннем растяжении $(\sigma>0,\ \sigma_u=0)$ критерий прочности сводится к следующему уравнению:

$$\sigma_+^2=\left(\frac{1}{\sigma_T^2}-\frac{1}{3\sigma_S^2}\right)^{-1}. \tag{24}$$

Вводя тензор четвертого ранга (тензор модулей упругости)

$$C(z,\omega)_{ijkl}=(K(z)-\frac{2}{3}G(z)(1-\omega))\delta_{kl}\delta_{ij}+G(z)(1-\omega)(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk}), \tag{25}$$

определяющее соотношение (9) записываем в следующем псевдолинейном виде:

$$\sigma_{ij}=C(z,\omega)_{ijkl}\varepsilon_{kl}. \tag{26}$$

Численный метод решения локальной задачи деформирования упругопластического материала. Для решения задачи теории пластичности (6) с соотношениями (26) применим один из вариантов метода упругих решений [16, 20], согласно которому определяющее соотношение (26) линеаризуем с помощью итерационного алгоритма

$$\sigma_{ij}^{\alpha\{m\}}=C^{\alpha}(z^{\alpha\{m-1\}},\omega^{\alpha\{m-1\}})_{ijkl}\varepsilon_{kl}^{\alpha\{m\}}, \tag{27}$$

где $\sigma_{ij}^{\alpha\{m\}}$ и $\varepsilon_{kl}^{\alpha\{m\}}$ — значения напряжений $\sigma_{ij}^{\alpha(0)}$ и деформаций $\varepsilon_{ij}^{\alpha(0)}$ на m-м шаге итерационного цикла, а $C_{ijkl}^{\alpha\ \{m-1\}} = C^{\alpha}(z^{\alpha\{m-1\}}, \omega^{\alpha\{m-1\}})_{ijkl}$ — тензоры модулей упругости компонентов композита на m-м шаге итерации. Обозначим также через $u_{ij}^{\alpha\{m\}}$ значения перемещений $u_{ij}^{\alpha(1)}$ на m-м шаге итерационного цикла. Тогда на m-м шаге итерации вместо задачи (6) получаем следующую линеаризованную задачу:

$$\begin{cases} \sigma_{ij/j}^{\alpha\{m\}} = 0 \ \text{ в } \ \tilde{V}_{\xi}; \\ \sigma_{ij}^{\alpha\{m\}} = C_{ijkl}^{\alpha\ \{m-1\}} \varepsilon_{kl}^{\alpha\{m\}} \ \text{ в } \ \tilde{V}_{\xi} \cup \Sigma_s' \cup \Sigma_s; \\ \varepsilon_{ij}^{\alpha\{m\}} = \overline{\varepsilon}_{ij} + \dfrac{1}{2}\left(u_{i/j}^{\alpha\{m\}} + u_{j/i}^{\alpha\{m\}}\right) \ \text{ в } \ \tilde{V}_{\xi}; \\ u_i^{\alpha\{m\}} = u_i^{N\{m\}} \\ \left(\sigma_{ij}^{\alpha\{m\}} - \sigma_{ij}^{N\{m\}}\right) n_j = 0 \end{cases} \text{ на } \tilde{\Sigma}_{\xi\alpha N}. \qquad (28)$$

В качестве критерия выбора числа необходимых итераций выбираем условие достижения заданного значения Δ — относительного отклонения напряжений:

$$\max_{x_k \in V} \frac{\sum\limits_{i,j} |\, \sigma_{ij}^{\{m\}}(x_k) - \sigma_{ij}^{\{m-1\}}(x_k)\,|}{\sum\limits_{i,j} |\, \sigma_{ij}^{\{m-1\}}(x_k)\,|} < \Delta. \qquad (29)$$

Согласно предложенному в [5] варианту метода асимптотического осреднения, перемещения «первого уровня» и напряжения «нулевого уровня» при каждом значении m можно представить в виде следующих сумм:

$$u_i^{\alpha\{m\}} = \sum_{p,q=1}^{3} u_{i(pq)}^{\alpha\{m\}}; \ \ \varepsilon_{ij}^{\alpha\{m\}} = \sum_{p,q=1}^{3} \varepsilon_{ij(pq)}^{\alpha\{m\}}; \ \ \sigma_{ij}^{\alpha\{m\}} = \sum_{p,q=1}^{3} \sigma_{ij(pq)}^{\alpha\{m\}},$$

$$\text{если } \xi^k \in V_{\alpha\xi}, \alpha = 1, ..., N, \qquad (30)$$

причем для функций $u_{i(pq)}^{\alpha\{m\}}$ для каждой комбинации индексов (pq) выделяется линейная часть по локальным координатам:

$$u_{i(pq)}^{\alpha\{m\}} = -\overline{\varepsilon}_{pq}\left(\delta_{ip}\xi^q + \delta_{iq}\xi^p\right) + U_{i(pq)}^{\alpha\{m\}}(\xi^l), \qquad (31)$$

где δ_{ip} — символ Кронекера, а $U_{i(pq)}^{\alpha\{m\}}(\xi_i)$ — функции, называемые псевдоперемещениями, для которых при каждом фиксированном на-

боре индексов (pq) получаем линеаризованную локальную задачу L_{pq} на 1/8 ячейки периодичности:

$$\begin{cases} \sigma^{\alpha\{m\}}_{ij(pq)/j} = 0 \ \text{ в } \tilde{V}_\xi; \\ \sigma^{\alpha\{m\}}_{ij(pq)} = C^{\alpha\ \{m-1\}}_{ijkl}\varepsilon^{\alpha\{m\}}_{ij(pq)} \ \text{ в } \tilde{V}_\xi \cup \Sigma'_s \cup \Sigma_s; \\ \varepsilon^{\alpha\{m\}}_{ij(pq)} = \dfrac{1}{2}\left(U^{\alpha\{m\}}_{i(pq)/j} + U^{\alpha\{m\}}_{j(pq)/i}\right) \ \text{ в } \tilde{V}_\xi; \\ U^{\alpha\{m\}}_{i(pq)} = U^{N\{m\}}_{i(pq)} \\ \left(\sigma^{\alpha\{m\}}_{ij(pq)} - \sigma^{N\{m\}}_{ij(pq)}\right) n_j = 0 \end{cases} \text{ на } \tilde{\Sigma}_{\xi\alpha N}. \qquad (32)$$

Кроме того, к системе (32) присоединяются условия на координатных плоскостях $\Sigma_s = \{\xi^s = 0\}$ и на торцевых поверхностях ЯП $\Sigma'_s = \{\xi_s = 1/2\}$, $s = 1, 2, 3$, которые записываются следующим образом:

$$\text{при } p = q \quad U^{\alpha}_{i(pq)} = 1/2\,\overline{\varepsilon}_{pq}\delta_{ip};\ S^{\alpha}_{j(pq)} = 0;\ S^{\alpha}_{k(pq)} = 0 \ \text{ на } \Sigma'_i \quad i \neq j \neq k \neq i; \qquad (33)$$

$$\text{при } p \neq q \ U^{\alpha}_{i(pq)} = (1/4)\overline{\varepsilon}_{ip}\delta_{ip};\ S^{\alpha}_{j(pq)} = 0;\ U^{\alpha}_{k(pq)} = 0 \text{ на } \Sigma'_j,\ i, j = \{p, q\};$$

$$S^{\alpha}_{i(pq)} = 0;\ S^{\alpha}_{j(pq)} = 0;\ U^{\alpha}_{k(pq)} = 0 \ \text{ на } \ \Sigma'_k,\ i \neq j \neq k \neq i,$$

а также

$$\text{при } p = q \quad U^{\alpha}_{i(pq)} = 0;\ S^{\alpha}_{j(pq)} = 0;\ S^{\alpha}_{k(pq)} = 0 \text{ на } \Sigma_i,\ i \neq j \neq k \neq i; \qquad (34)$$

$$\text{при } p \neq q \quad U^{\alpha}_{i(pq)} = 0;\ S^{\alpha}_{j(pq)} = 0;\ U^{\alpha}_{k(pq)} = 0 \text{ на } \Sigma_j,\ i, j = \{p, q\};$$

$$S^{\alpha}_{i(pq)} = 0;\ S^{\alpha}_{j(pq)} = 0;\ U^{\alpha}_{k(pq)} = 0 \text{ на } \Sigma_k,\ i \neq j \neq k \neq i.$$

Здесь введены обозначения для векторов усилий:

$$S_{i(pq)} \equiv \sum\nolimits_{l=1}^{3} \sigma^{\alpha\{m\}}_{il(pq)} n_l. \qquad (35)$$

Решение задачи (32)–(34) разыскивается в области $\tilde{V}_\xi$, представляющей 1/8 ЯП: $\tilde{V}_\xi = V_\xi \cap (\xi_i \geq 0)$, здесь также обозначена поверхность контакта фаз внутри $\tilde{V}_\xi$: $\tilde{\Sigma}_{\xi\alpha\beta} = \Sigma_{\xi\alpha\beta} \cap \overline{V}_\xi$.

Решение задачи L_{pq} методом конечных элементов. Для произвольного конечного объема $V \subset \tilde{V}_\xi$ вариационная формулировка задачи L_{pq} (32) при фиксированных значениях p и q имеет вид

$$\int_V \delta\varepsilon^T \sigma \, dV = \int_\Sigma \delta U^T S d\Sigma. \tag{36}$$

Здесь обозначены координатные столбцы псевдоперемещений U, напряжений σ, деформаций ε и поверхностных усилий S:

$$U = \left[U^{\alpha\{m\}}_{1(pq)}, U^{\alpha\{m\}}_{2(pq)}, U^{\alpha\{m\}}_{3(pq)} \right]^{\mathrm{T}};$$

$$\sigma = \left[\sigma^{\alpha\{m\}}_{11(pq)}, \sigma^{\alpha\{m\}}_{22(pq)}, \sigma^{\alpha\{m\}}_{33(pq)}, \sigma^{\alpha\{m\}}_{13(pq)} / \sqrt{2}, \sigma^{\alpha\{m\}}_{23(pq)} / \sqrt{2}, \sigma^{\alpha\{m\}}_{12(pq)} / \sqrt{2} \right]^{\mathrm{T}};$$

$$\varepsilon = \left[\varepsilon^{\alpha\{m\}}_{11(pq)}, \varepsilon^{\alpha\{m\}}_{22(pq)}, \varepsilon^{\alpha\{m\}}_{33(pq)}, \varepsilon^{\alpha\{m\}}_{13(pq)} / \sqrt{2}, \varepsilon^{\alpha\{m\}}_{23(pq)} / \sqrt{2}, \varepsilon^{\alpha\{m\}}_{12(pq)} / \sqrt{2} \right]^{\mathrm{T}}; \tag{37}$$

$$S = \left[S^{\alpha}_{1(pq)}, S^{\alpha}_{2(pq)}, S^{\alpha}_{3(pq)} \right]^{\mathrm{T}}.$$

Линеаризованные определяющие соотношения, следующие из второй группы уравнений в (28) с использованием координатных столбцов, записываются следующим образом:

$$\sigma = \mathbf{C}\varepsilon, \tag{38}$$

где **C** — матрица упругости размером [6×6], составленная из компонентов тензора $C^{\alpha\{m\}}_{ijkl}$ стандартным образом [21]. Соотношения Коши (третья группа уравнений в (28)) в матричном виде записываются следующим образом:

$$\varepsilon = \mathbf{D}U, \tag{39}$$

где **D** — матрица операторов дифференцирования ($(\partial_l = \partial / \partial\xi^l)$:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \partial_1 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_2 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_3 \\ \partial_3 / \sqrt{8} & 0 & \partial_1 / \sqrt{8} \\ 0 & \partial_3 / \sqrt{8} & \partial_2 / \sqrt{8} \\ \partial_2 / \sqrt{8} & \partial_1 / \sqrt{8} & 0 \end{bmatrix}. \tag{40}$$

С учетом определяющих отношений (37) и (39) вариационное уравнение (36) можно представить в виде

$$\int_V (\mathbf{D}\delta U)^{\mathrm{T}} \mathbf{C}\mathbf{D}U dV = \int_\Sigma \delta U^{\mathrm{T}} S d\Sigma. \tag{41}$$

Аппроксимируя псевдоперемещения U в КЭ линейными функциями $U = \mathbf{\Phi}\ q$, где q — координатный столбец псевдоперемещений

в узлах КЭ, а $\mathbf{\Phi}(\xi_i)$ — матрица функции формы, зависящая от типа КЭ, получаем итоговую разрешающую систему линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{K}q = f, \tag{42}$$

где

$$\mathbf{K} = \int\limits_V \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\mathbf{B}dV;\ f = \int\limits_\Sigma \mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}} Sd\Sigma \tag{43}$$

— локальная матрица жесткости и столбец нагрузок, а $\mathbf{B} = \mathbf{D}\mathbf{\Phi}$.

Глобальная матрица жесткости задачи составляется из локальной матрицы жесткости стандартным образом, после ее формирования к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) применяются граничные условия (33) и (34). Граничные условия идеального контакта (последняя группа соотношений в (28)) не требуют специального учета, так как при данном варианте МКЭ они удовлетворяются автоматически.

Решая СЛАУ, находим перемещения q в узлах, по которым вычисляем псевдоперемещения $U = \mathbf{\Phi}q$, деформации $\varepsilon = Bq$ и напряжения $\sigma = CBq$ в КЭ. Для решения СЛАУ применяется метод сопряженных градиентов. В качестве КЭ выбран четырехузловой тетраэдр, обеспечивающий линейную аппроксимацию псевдоперемещений U и приводящий к постоянным напряжениям σ в отдельном КЭ. Каждая из указанных задач L_{pq} решается несколько раз: при заданных значениях деформаций $\overline{\varepsilon}_{pq}$ осуществляется итерационный цикл решения соответствующей задачи до достижения условия сходимости решения, выбираемого следующим образом:

$$\sum_{\beta,\,\gamma=1}^{3} \left|\sigma_{\beta\gamma(pq)}^{(\alpha)\{m\}} - \sigma_{\beta\gamma(pq)}^{(\alpha)\{m-1\}}\right| \left(\sum_{\beta,\,\gamma=1}^{3} \left|\sigma_{\beta\gamma(pq)}^{(\alpha)\{m-1\}}\right|\right)^{-1} \le \delta, \tag{44}$$

где δ = 0,001…0,01. Число итераций $m = M$, обеспечивающее выполнение данного условия, различно для каждой отдельной задачи L_{pq} и для разных значений $\overline{\varepsilon}_{pq}$, но не превышает 10−15. Напряжения при максимальном значении номера итерации $m = M$ обозначены через $\sigma_{\beta\gamma(pq)}^{(\alpha)\{M\}}$.

Расчет эффективных упругопластических характеристик композита. После решения серии задач L_{pq} (32)−(34) указанным методом для всех p, q проинтегрируем полученные напряжения $\sigma_{\beta\gamma(pq)}^{(\alpha)\{M\}}$ по областям, занятым включениями и матрицей,

$$\overline{\sigma}_{ij} = \left\langle \sigma_{ij}^{(\alpha)\{M\}} \right\rangle = \sum_{p,\,q=1}^{3} \left\langle \overline{\sigma}_{ij(pq)}^{(\alpha)\{M\}} \right\rangle, \tag{45}$$

в результате получим осредненные напряжения. Тогда эффективные упругопластические соотношения, связывающие осредненные напряжения и деформации $\overline{\sigma}_{ij}$ и $\overline{\varepsilon}_{pq}$, можно записать в следующем символическом операторном виде:

$$\overline{\sigma}_{ij} = \overline{F}_{ij}\left(\overline{\varepsilon}_{pq}\right). \tag{46}$$

Поскольку ранее рассмотрен алгоритм вычисления средних напряжений $\overline{\sigma}_{ij}$ (формулы (45), в которых $\sigma_{\beta\gamma(pq)}^{(\alpha)\{M\}}$ вычисляются по приведенному ранее методу) по заданным значениям осредненных деформаций $\overline{\varepsilon}_{pq}$, то фактически указан алгоритм определения значений символического оператора (46).

Результаты численного моделирования микронапряжений и диаграммы деформирования монокристаллического никелевого интерметаллидного сплава ВКНА-1В. С помощью разработанной математической модели проведено моделирование микронапряжений и осуществлен расчет диаграмм упругопластического деформирования жаропрочного монокристаллического никелевого интерметаллидного сплава ВКНА-1В. Сплав имеет характерную ячеисто-дендритную микроструктуру (рис. 1), отдельные кристаллы с характерным размером в несколько микрометров обладают формой, близкой к гексагональной. В каждом кристалле достаточно четко выделены две основные фазы: никелевая γ-фаза и интерметаллидная γ'-фаза на основе Ni_3Al. Концентрация γ'-фазы составляет около 81 %.

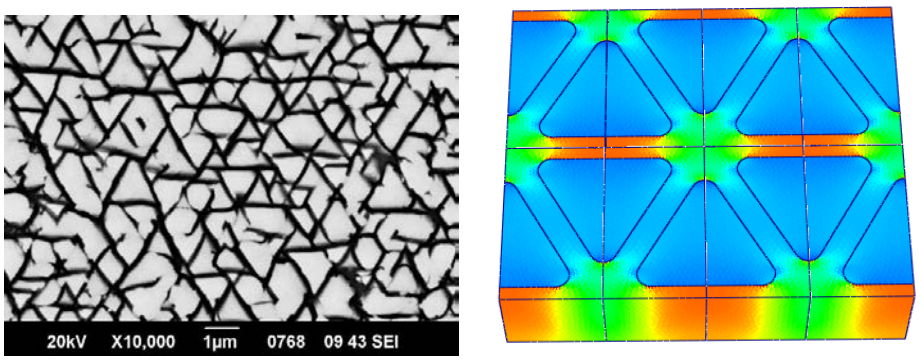


Рис. 1. Фотография реальной микроструктуры и математическая модель микроструктуры жаропрочного монокристаллического сплава ВКНА-1В с кристаллографической ориентацией <111>

Характеристики γ-фазы: E = 260 ГПа; ν = 0,28; $\varepsilon_p = \sigma_p / E$; $\sigma_p = 560$ МПа; $\sigma_T = 1400$ МПа; $\sigma_S = 830$ МПа; $\sigma_C = 2000$ МПа.

Характеристики γ'-фазы: E = 210 ГПа; ν = 0,28; $\varepsilon_p = \sigma_p / E$; $\sigma_p = 1060$ МПа;; $\sigma_T = 1100$ МПа; $\sigma_S = 700$ МПа; $\sigma_C = 1600$ МПа.

Результаты моделирования приведены на рис. 2−6. Установлены следующие особенности микромеханического напряженно-деформированного состояния сплава: продольные σ_{11}^{α} и поперечные нормальные напряжения σ_{33}^{α} в фазах при растяжении по направлению <100> достигают максимальных значений в зонах, прилегающих к поверхностям раздела фаз, и в местах максимального искривления геометрической формы фаз, в том числе на оси симметрии ячеек периодичности. Сдвиговые напряжения, кроме поверхностей раздела фаз, имеют максимумы также и внутри γ'-фазы. Параметр повреждаемости фаз z^{α}, определяющий зону начала микроразрушения сплава, достигает максимальных значений на поверхностях раздела фаз (см. рис. 5).

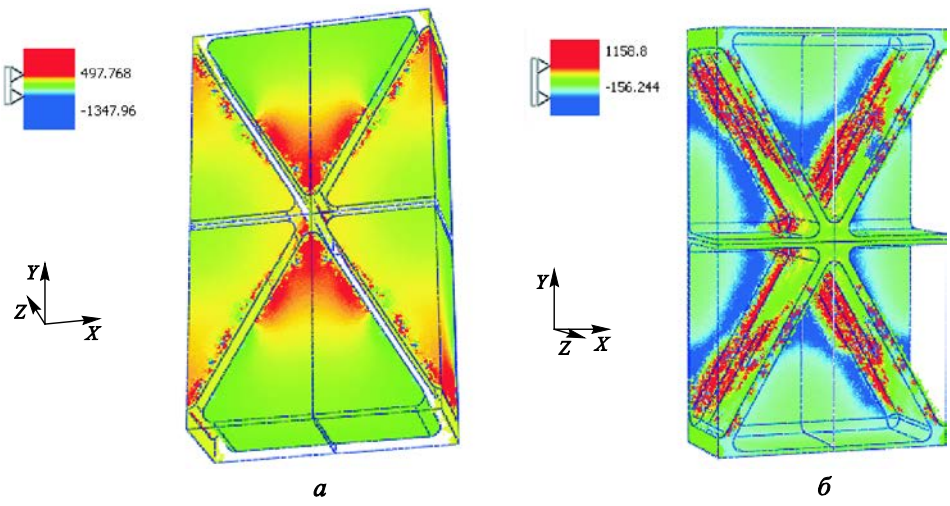


Рис. 2. Распределение напряжения σ_{33}^{α} в микроструктуре жаропрочного сплава ВКНА-1В при деформировании в направлении <100> в момент перед образованием макроразрушения:

а — в γ'-фазе; *б* — в γ-фазе

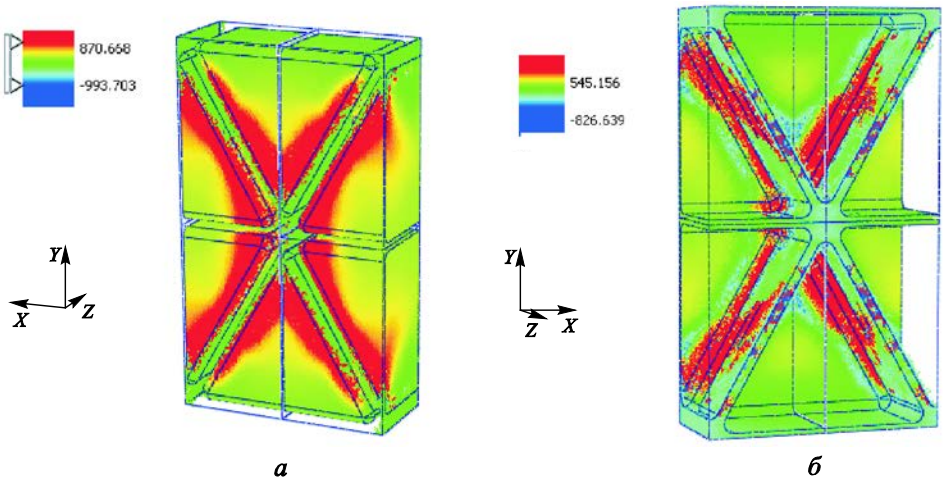


Рис. 3. Распределение напряжения σ_{11}^{α} в мезоструктуре жаропрочного сплава ВКНА-1В при деформировании в направлении <100> в момент перед образованием макроразрушения:

а — в γ'-фазе; *б* — γ-фазе

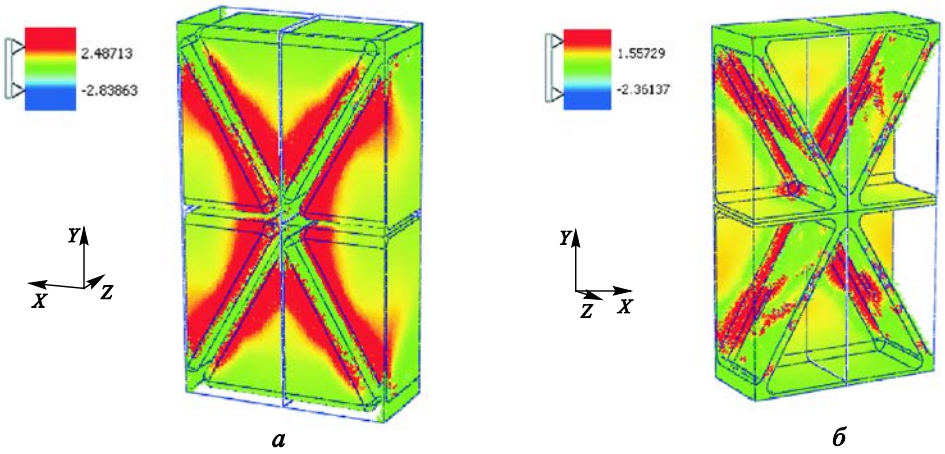


Рис. 4. Распределение коэффициента концентрации напряжений B_{1111}^{α} в микроструктуре жаропрочного сплава ВКНА-1В:

а — в γ'-фазе; *б* — в γ-фазе

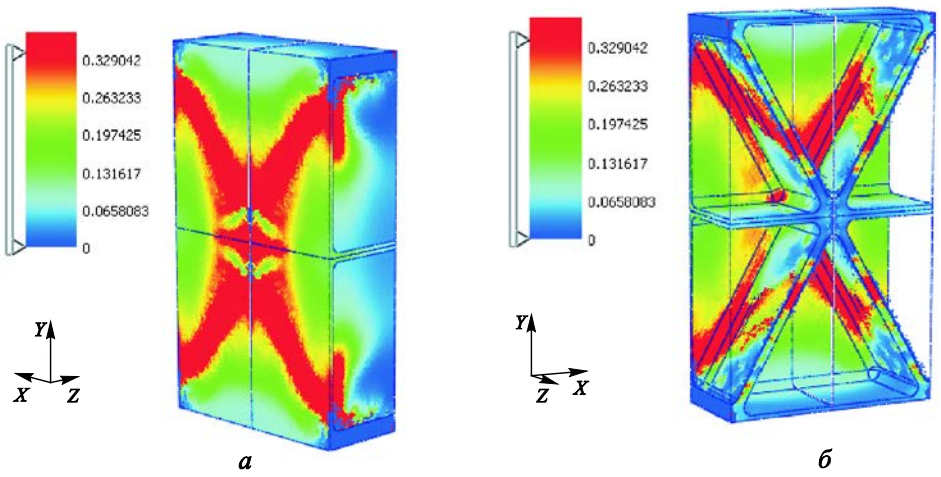


Рис. 5. Распределение параметра повреждаемости z^{α} в мезоструктуре жаропрочного сплава ВКНА-1В перед началом макроразрушения:
а — в γ'-фазе; *б* — в γ-фазе

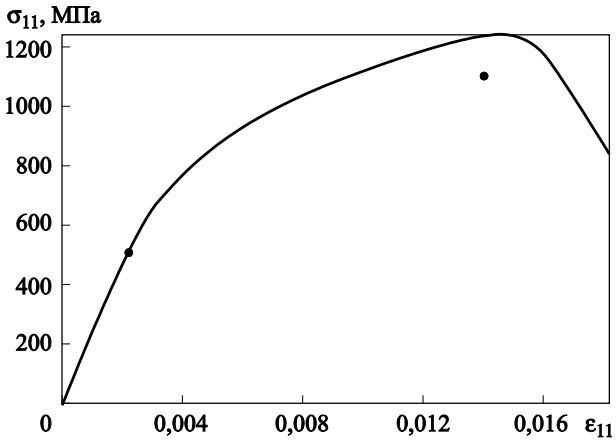


Рис. 6. Диаграмма деформирования жаропрочного сплава ВКНА-1В с концентрацией γ'- фазы 81 % при деформировании в направлении <100> (линия — расчет, точки — экспериментальные данные)

Проведены расчеты упругопрочностных свойств жаропрочных сплавов с типовой микроструктурой, диаграмм деформирования жаропрочных сплавов в области пластичности при действии различных видов напряженно-деформированного состояния (растяжения, сжатия, сдвига). Тестовые расчеты показали, что увеличение содержания γ'-фазы в сплаве ВКНА-1В приводит к возрастанию прочностных характеристик сплава. Сопоставление тестовых результатов расчетов с экспериментальными данными по прочности сплава ВКНА-1В показало достаточно хорошее совпадение (см. рис. 6).

Выводы. Предложена геометрическая модель микроструктуры жаропрочных монокристаллических интерметаллидных сплавов в виде периодической структуры гексагонального типа, содержащей две фазы с границей раздела между ними. Представлена математическая модель упругопластического деформирования монокристаллического сплава, основанная на методе асимптотической гомогенизации периодических структур и использовании деформационной теории пластичности отдельных фаз при активном нагружении с учетом эффекта их повреждаемости. Для численных расчетов по разработанной модели использован жаропрочный монокристаллический сплав ВКНА-1В. Проведены конечно-элементные расчеты микромеханических процессов деформирования и разрушения монокристаллического сплава ВКНА-1В с различной концентрацией γ'-фазы. Установлено, что продольные и поперечные нормальные напряжения в фазах при растяжении достигают максимальных значений в зонах, прилегающих к поверхностям раздела фаз, и в местах максимального искривления геометрической формы фаз, в этих же зонах достигает максимальных значений параметр повреждаемости фаз, определяющий зону начала микроразрушения сплава. Проведены расчеты диаграмм деформирования жаропрочных сплавов в области пластичности, сопоставление тестовых результатов расчетов с экспериментальными данными по прочности сплава ВКНА-1В показало достаточно хорошее совпадение.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Каблов Е.Н. Инновационные разработки ФГУП ВИАМ ГНЦ РФ по реализации Стратегических направлений развития материалов и технологий их переработки на период до 2030 года. *Авиационные материалы и технологии*, 2015, № 1 (34), с. 3–33.

[2] Герасимов В.В., Висик Е.М. Технологические аспекты литья деталей горячего тракта ГТД из интерметаллидных никелевых сплавов типа ВКНА с монокристаллической структурой. *Литейщик России*, 2012, № 2, с. 19–23.

[3] Каблов Е.Н., Петрушин Н.В., Светлов И.Л., Демонис И.М. Никелевые литейные сплавы нового поколения. *Авиационные материалы и технологии*, 2012, № S, с. 36–52.

[4] Каблов Е.Н., Бунтушкин В.П., Базылева О.А., Герасимов В.В., Тимофеева О.Б. Жаропрочные сплавы на основе интерметаллида Ni_3Al. *Сб. тр. Междунар. науч.-техн. конф. «Научные идеи С.Т. Кишкина и современное материаловедение»*. Москва, ВИАМ, 2006, с. 71–75.

[5] Базылева О.А., Аргинбаева Э.Г., Туренко Е.Ю. Жаропрочные литейные интерметаллидные сплавы. *Авиационные материалы и технологии*, 2012, № S, с. 57–60.

[6] Каблов Е.Н., Петрушин Н.В. Компьютерный метод конструирования литейных жаропрочных никелевых сплавов. *Литейные жаропрочные сплавы. Эффект С.Т. Кишкина*. Москва, Наука, 2006, с. 56−78.

[7] Kimura Y., Miura S., Suzuki T., Mishima Y. Microstructure and mechanical properties of two-phase alloys based on the B2-type intermetallic compound CoAl in the Co–Al–Ni ternary system. *Materials Transactions*, 1994, vol. 35, no. 11, pp. 800–807.

[8] Kimura Y., Elmer H. Lee, Liu C.T. Microstructure, phase constitution and tensile properties of Co–Ni–Ti–Al base multi-phase alloys. *Materials Transactions*, 1995, vol. 36, no. 8, pp. 1031–1040.

[9] Герасимов В.В., Висик Е.М., Колядов Е.В. Взаимосвязь формы фронта кристаллизации со структурой жаропрочных сплавов в процессе направленной кристаллизации. *Тр. ВИАМ*, 2014, № 6. URL: http://viam-works.ru/ru/articles?art_id=668

[10] Димитриенко Ю.И., Дроголюб А.Н., Губарева Е.А. Оптимизация многокомпонентных дисперсно-армированных композитов на основе сплайн-аппроксимации. *Наука и образование*: электронное научно-техническое издание, 2015, № 2. doi: 10.7463/0215.0757079. URL: http://technomag.bmstu.ru/doc/757079.html

[11] Димитриенко Ю.И., Яковлев Н.О., Ерасов В.С., Федонюк Н.Н., Сборщиков С.В., Губарева Е.А., Крылов В.Д., Григорьев М.М., Прозоровский А.А. Разработка многослойного полимерного композиционного материала с дискретным конструктивно-ортотропным заполнителем. *Композиты и наноструктуры*, 2014, № 1, т. 6, с. 32–48.

[12] Димитриенко Ю.И., Федонюк Н.Н., Губарева Е.А., Сборщиков С.В., Прозоровский А.А. Многомасштабное конечно-элементное моделирование трехслойных сотовых композитных конструкций. *Наука и образование*: электронное научно-техническое издание, 2014, № 10. doi: 10.7463/1014.0730105.

[13] Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Сборщиков С.В. Асимптотическая теория конструктивно-ортотропных пластин с двухпериодической структурой. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 1, с. 36–57.

[14] Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Сборщиков С.В. Конечно-элементное моделирование эффективных вязкоупругих свойств однонаправленных композиционных материалов. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 2, с. 28–48.

[15] Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Юрин Ю.В. Асимптотическая теория термоползучести многослойных тонких пластин. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 4, с. 18–36.

[16] Ильюшин А.А. *Механика сплошной среды*. Изд. 4-е. Москва, УРСС, 2014, 320 с.

[17] Димитриенко Ю.И., Кашкаров А.И. Расчет эффективных характеристик композитов с периодической структурой методом конечного элемента. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2002, с. 95−108.

[18] Димитриенко Ю.И., Кашкаров А.И., Макашов А.А. Конечно-элементный расчет эффективных упругопластических характеристик композитов на основе метода асимптотического осреднения. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2007, № 1, с.102−116.

[19] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. В 4 т. Т. 4. Основы механики твердого тела*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013, 624 с.

[20] Биргер И.А., Мавлютов Р.Р. Сопротивление материалов: учеб. пособие. Москва, Наука, 1986, 560 с.

[21] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. В 4 т. Т. 1. Тензорный анализ*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011, 463 с.

Статья поступила в редакцию 31.01.2015

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Сборщиков С.В., Базылева О.А., Луценко А.Н., Орешко Е.И. Моделирование упругопластических характеристик монокристаллических интерметаллидных сплавов на основе микроструктурного численного анализа. *Математическое моделирование и численные методы*, 2015, № 2(6), с. 3–22.

Димитриенко Юрий Иванович родился в 1962 г., окончил МГУ им. М.В. Ломоносова в 1984 г. Д-р физ.-мат. наук, профессор, директор Научно-образовательного центра «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов» МГТУ им. Н.Э. Баумана; заведующий кафедрой «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 300 научных работ в области механики сплошных сред, вычислительной механики, механики и термомеханики композитов, математического моделирования в науке о материалах, вычислительной газодинамики. e-mail: dimit.bmstu@gmail.com

Губарева Елена Александровна родилась в 1982 г., окончила МГУ им. М.В. Ломоносова в 2004 г. Канд. физ.-мат. наук, доцент, заместитель заведующего кафедрой «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 30 научных работ в области механики сплошных сред, механики контактного взаимодействия, математического моделирования, механики композитов. e-mail: gubareva_ea@pochta.ru

Сборщиков Сергей Васильевич родился в 1989 г., окончил МГТУ им. Н.Э. Баумана в 2012 г. Аспирант кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор 12 научных работ в области вычислительной механики композитов. e-mail: servasbor@gmail.com

Базылева Ольга Анатольевна родилась в 1955 г., окончила МАТИ им. К.Э. Циолковского в 1977 г. Канд. техн. наук, старший научный сотрудник, заместитель начальника по науке лаборатории «Жаропрочные сплавы на никелевой основе» ФГУП ВИАМ ГНЦ РФ. Автор более 100 статей в области создания литейных жаропрочных сплавов на основе интерметаллида Ni_3Al.
e-mail: intermetallidbaz@gmail.ru

Луценко Алексей Николаевич родился в 1975 г., окончил МАТИ им. К.Э. Циолковского в 1998 г. Канд. техн. наук, начальник Испытательного центра ФГУП ВИАМ ГНЦ РФ. Автор более 70 научных работ в области материаловедения, металлофизики и физики прочности.

Орешко Евгений Игоревич родился в 1986 г., окончил МАТИ им. К.Э. Циолковского в 2009 г. Канд. техн. наук, ст. научный сотрудник лаборатории «Прочность и надежность материалов воздушного судна им. профессора С.И. Кишкиной» ФГУП ВИАМ ГНЦ РФ. Автор более 20 научных работ в области материаловедения, математического моделирования, механики материалов и физики прочности.
e-mail:89639619741@mail.ru

Modeling the elastic-plastic characteristics of monocrystalline intermetallic alloys based on microstructural numerical analysis

© Yu.I. Dimitrienko[1], E.A. Gubareva[1], S.V. Sborschikov[1], O.A. Bazyleva[2], A.N. Lutsenko [2], E.I. Oreshko[2]

[1]Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia
[2]Federal State Unitary Enterprise "All-Russian Scientific Research Institute of Aviation Materials", Moscow, 105005, Russia

The article presents a model of microstructure of two-phase monocrystalline intermetallic alloys in the form of a periodic structure of the hexagonal type, as well as a mathematical model of elastic-plastic deformation of monocrystalline alloy, based on the method of asymptotic smoothing periodic structures. Deformation plasticity theory under loading is used for the phases with due regard for the effect of their damage level during loading. For numerical calculations of the developed model the heat-resistant monocrystalline alloy of the type VKNA-1V was used. Finite element calculations of deformation and fracture micromechanical processes in monocrystalline alloy of the type VKNA-1V were carried out. It was found that under tension maximum values of phase damagability, which determine the beginning of the alloy micro-fracture zone, are achieved in the areas adjacent to the phase interface and in areas of maximum curvature of the geometric shape of the phases. Calculations of heat-resistant alloy strain diagrams in plastic range are proved to be consistent with experimental data.

Keywords: *microstructure, intermetallic compound, monocrystalline alloys, numerical modeling, asymptotic smoothing method, finite element method, plasticity, damagability, deforming diagram.*

REFERENCES

[1] Kablov E.N. *Aviatsionnye materialy i technologii – Aviation materials and technology*, 2015, no. 1 (34), pp. 3–33.
[2] Gerasimov V.V., Visik E.M. *Liteyschik Rossii – Russian Founder*, 2012, no. 2, pp. 19–23
[3] Kablov E.N., Petrushin N.V., Svetlov I.L., Demonis I.M. *Aviatsionnye materialy i technologii – Aviation materials and technology*, 2012, no. S, pp. 36–52.
[4] Kablov E.N., Buntushkin V.P., Bazyleva O.A., Gerasimov V.V., Timofeeva O.B. Zharoprochnye splavy na osnove intermetallida Ni_3Al [Heat-resistant alloys based on the intermetallic compound Ni3Al]. In: *Sbornik trudov Mezhdunarodnoy nauchno-tehnicheskoy konferentsii «Nauchnye Idei S.T. Kishkina i Sovremennoe Materialovedenie»* [Proc. of the International Scientific-Engineering Conference "S.T. Kishkin's Scientific Ideas and the Modern Material Science"]. Moscow, VIAM Publ., 2006, pp. 71–75.
[5] Bazyleva O.A., Arginbaeva E.G., Turenko E.Ju. *Aviatsionnye materialy i technologii – Aviation materials and technology*, 2012, no. S, pp. 57–60.
[6] Kablov E.N., Petrushin N.V. Kompyuternyy metod konstruirovaniya liteynykh zharoprochnykh nikelevykh splavov [Computer Method for the Construction of the Heat-Resistant Casting Nickel Alloys]. In: *Sbornik: Litejnye zharoprochnye splavy. Effekt S.T. Kishkina.* [Collected Articles: Casting Heat-Resistant Alloys. S.T. Kishkin's Effect]. Moscow, Nauka Publ., 2006, pp. 56−78.

[7] Kimura Y., Miura S., Suzuki T., Mishima Y. Microstructure and mechanical properties of two-phase alloys based on the B2-type intermetallic compound CoAl in the Co–Al–Ni ternary system. *Materials Transactions*, 1994, vol. 35, no. 11, pp. 800–807.

[8] Kimura Y., Elmer H. Lee, Liu C.T. Microstructure, phase constitution and tensile properties of Co–Ni–Ti–Al base multi-phase alloys. *Materials Transactions*, 1995, vol. 36, no.8, pp. 1031–1040.

[9] Gerasimov V.V., Visik E.M., Koljadov E.V. *Elektronnyy nauchnyy zhurnal "Trudy VIAM" – Electronic scientific journal "Proceedings of VIAM"*, 2014, no. 6. Available at: http://viam-works.ru/ru/articles?art_id=668.

[10] Dimitrienko Yu.I., Drogolyub A.N., Gubareva E.A., Yakovlev D.O. *Nauka i obrazovanie. Elektronnoe nauchno-tekhnicheskoe izdanie – Science and Education. Electronic Scientific and Technical Journal*, 2014, no. 10. doi: 10.7463/1014.0730105. Available at: http://technomag.bmstu.ru/doc/757079.html.

[11] Dimitrienko Yu.I., Yakovlev N.O., Erasov V.S., Fedonuyk N.N., Sborschikov S.V., Gubareva E.A., Krylov V.D., Grigoryev M.M., Prozorovskiy A.A. *Kompozity i nanostruktury — Composites and Nanostructures*, 2014, no. 1, vol. 6, pp.32–48.

[12] Dimitrienko Yu.I, Fedonyuk N.N., Gubareva E.A., Sborschikov S.V, Prozorovsky A.A. *Nauka i obrazovanie. Elektronnoe nauchno-tekhnicheskoe izdanie – Science and Education. Electronic Scientific and Technical Journal*, 2014, no. 10. doi: 10.7464/1014.0730105.

[13] Dimitrienko Yu.I., Gubareva E.A., Sborschikov S.V. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye menody – Mathematical Modeling and Numerical Methods*, 2014, no. 1, pp. 36–57.

[14] Dimitrienko Y.I., Gubareva E.A. , Sborschikov S.V. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye menody – Mathematical Modeling and Numerical Methods*, 2014, no. 2, pp. 28–48.

[15] Dimitrienko Yu.I., Gubareva E.A., Yurin Yu.V. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye menody – Mathematical modeling and Numerical Methods*, 2014, no. 4, pp. 18–36.

[16] Ilyushin A.A. *Mekhanika sploshnoy sredy* [Continuum mechanics]. Moscow, URSS Publ., 2014, 320 c.

[17] Dimitrienko Yu.I., Kashkarov A.I. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Seria Estestvennye nauki – Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series: Natural Sciences*, 2002, no. 2, pp. 95–107.

[18] Dimitrienko Yu.I., Kashkarov A.I., Makashov A.A. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Seria Estestvennye nauki – Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series: Natural Sciences*, 2007, no 1, pp.102–116.

[19] Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika sploshnoi sredy* [Continuum mechanics]. *Vol. 4. Osnovy mekhaniki tverdogo tela* [Fundamentals of solid mechanics]. Moscow, BMSTU Publ., 2013, 624 p.

[20] Birger I.A., Mavlutov R.R. *Soprotivlenie materialov* [Strength of Materials]. Moscow, Nauka Publ., 1986,. 560 c.

[21] Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika sploshnoi sredy* [Continuum mechanics]. *Vol. 1. Tenzornyi analiz* [Tensor Analysis]. Moscow, BMSTU Publ., 367 p.

Dimitrienko Yu.I. (b.1962) graduated from Lomonosov Moscow State University in 1984. Dr. Sci. (Phys. & Math.), professor, head of the Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, director of the Scientific-Educational Center of Supercomputer Engineering Modeling and Program Software Development at Bauman Moscow State Technical University; Member of the Russian Academy of Engineering

Science. The author of more than 300 publications in the field of computational mechanics, gasdynamics, thermomechanics of composite materials, mathematical simulations in material science. e-mail: dimit.bmstu@gmail.com.

Gubareva E.A. (b.1982) graduated from Lomonosov Moscow State University in 2004. Candidate of Physico-Mathematical Sciences, associate professor at the Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, at Bauman Moscow State Technical University. The author of more than 30 publications in the field of continuum mechanics, trybology, mathematical modeling and mechanics of composites. e-mail: gubareva_ea@pochta.ru.

Sborschikov S.V. (b.1989) graduated from Bauman Moscow State Technical University in 2012. A postgraduate student at the Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, at Bauman Moscow State Technical University. The author of 12 publications in the field of continuum mechanics of composites.

Bazyleva O.A. (b. 1955), graduated from Tsiolkovsky Moscow Institute of Aviation Technology in 1977. Candidate of Engineering Sciences, senior scientist, deputy head of science at the laboratory of Ni-Based Heat-Resistant Alloys at the Federal State Unitary Enterprise "All-Russian Scientific Research Institute of Aviation Materials". The author of more than 100 publications in the field of intermetallic alloys based on Ni_3Al.
e-mail: intermetallidbaz@gmail.ru.

Lutsenko A.N. (b.1975) graduated from MSATI — Tsiolkovsky Russian State University of Aviation Technology in 1998. Candidate of Engineering Sciences, head of the Test Center of the Federal State Unitary Enterprise "All-Russian Scientific Research Institute of Aviation Materials". The athor of more than 70 publications in the field of material science, metallophysics and physics of strength.

Oreshko E.I. (b.1986) graduated from Tsiolkovsky MSATI — Russian State University of Aviation Technology in 2009. Candidate of Engineering Sciences, senior scientist at the laboratory of Durability and Reliability of the Aircraft Materials at the Federal State Unitary Enterprise "All-Russian Scientific Research Institute of Aviation Materials". The author of more than 20 publications in the field of material science, mathematical simulations, material mechanics and physics of strength. e-mail: 89639619741@mail.ru.