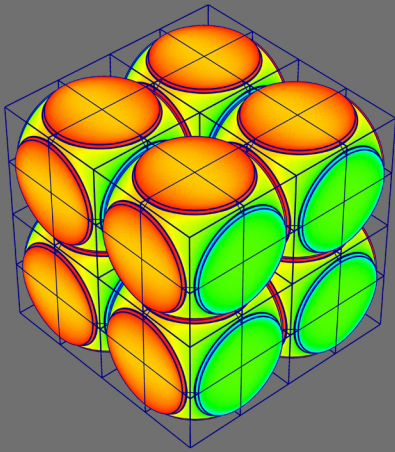




Математическое моделирование и численные методы

Валишин А.А., Карташов Э.М. Моделирование термических напряжений в составном диске при быстром нестационарном нагреве. Математическое моделирование и численные методы, 2026, № 2, с. 151-161.

Источник: <https://mmcm.bmstu.ru/articles/411/>

Моделирование термических напряжений в составном диске при быстром нестационарном нагреве

© А.А. Валишин, Э.М. Карташов

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Изучаемая здесь проблема представляет практический интерес для ряда инженерных направлений при проектировании узлов и конструкций в машиностроении, энергетике, электронике, авиационной и космической технике и т. д. Получено аналитическое решение сопряженной задачи нестационарной теплопроводности и термомеханики для составного диска с отверстием при быстром начальном нагреве. Исследована термическая реакция составного диска с внутренним круговым отверстием. С помощью разработанной модели возможно рассчитывать температурное нестационарное поле и термические напряжения в тонких составных дисках. Установлены закономерности термоупругих напряжений при нагреве поверхности выреза по принципу «сосредоточенной емкости».

Ключевые слова: нестационарная теплопроводность, термические напряжения, составные диски, преобразование Лапласа

Введение. В современных технологиях особое внимание уделяется конструкциям и оболочкам из композиционных материалов с высокими показателями механических свойств (упругость, твердость, прочность) [1-8]. Такие материалы используются в качестве теплоизоляционных и огнестойких конструкций в строительном оборудовании, металлургии, а также в качестве высокотемпературных электроизоляторов в электротехнике.

Изучаемая здесь проблема представляет практический интерес также для ряда инженерных направлений при проектировании узлов и конструкций в машиностроении, энергетике, электронике, авиационной и космической технике и т. д. [1-8].

Постановка задачи нестационарной теплопроводности для составного диска. В цилиндрической системе координат r, φ, z рассматривается тонкий круговой диск радиусом R_0 , который состоит из двух круговых частей: $R - \delta < r < R$ и $R < r < R_0$, а также имеет внутреннее отверстие: $0 < r < R - \delta$, причем полагается, что $\delta < R \ll R_0$. Толщина диска по z полагается очень малой по сравнению с R . Первая часть диска $R - \delta < r < R$ называется «крышкой», а вторая часть $R < r < R_0$ — называется «основным диском». В качестве примера, «крышка» — может быть тонкой металлической оболочкой шириной δ , а основной диск — полимерным материалом.

Рассмотрим задачу нестационарной теплопроводности для такого составного диска при следующих допущениях: 1) пренебрегаем температурным перепадом по толщине диска по z , так что температура является только все функцией от радиуса r и времени t ; 2) в силу $R \ll R_0$ внешняя поверхность диска устремляется в бесконечность и основной диск можно считать полубесконечным $R < r < +\infty$; 3) все теплофизические константы материалов крышки и основного диска считаются постоянными.

Граничные условия в задаче: крышка считается теплоизолированной изнутри при $r = R - \delta$, на удаленной внешней поверхности основного диска ставится условие ограниченности температуры, на границе контакта крышки и основного диска при $r = R$ ставится условие идеального теплового контакта.

Начальные температуры основного диска и крышки равны соответственно нулю $T_1 = 0$ и $T_2 = T_2^0 = \text{const} \gg 0$, здесь и далее T это перепад температур $T = \theta - \theta_0$ между текущим значением θ и некоторым ее начальным стандартным значением θ_0 .

Математическая модель нестационарной теплопроводности для составного диска при описанных допущениях имеет вид:

$$\frac{\partial T_i(r, t)}{\partial t} = a_i \Delta T_i(r, t), \quad (1)$$

$$i = 1, \quad r > R, \quad i = 2, \quad R - \delta < r < R, \quad t > 0,$$

$$T_i(r, t)|_{t=0} = \begin{cases} 0, & i = 1, \quad r > R, \\ T_2^0, & i = 2, \quad R - \delta < r < R, \end{cases} \quad (2)$$

$$T_1(r, t)|_{r=R+0} = T_2(r, t)|_{r=R-0}, \quad t > 0, \quad (3)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1(r, t)}{\partial r} \Big|_{r=R+0} = \lambda_2 \frac{\partial T_2(r, t)}{\partial r} \Big|_{r=R-0}, \quad t > 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial T_2(r, t)}{\partial r} \Big|_{r=R-\delta} = 0, \quad t > 0, \quad (5)$$

$$|T_1(r, t)| < +\infty, \quad r \geq R, \quad t \geq 0, \quad (6)$$

где все постоянные общеизвестны [7,9]: λ_i — коэффициенты теплопроводности, a_i — коэффициенты температуропроводности.

Метод решения задачи нестационарной теплопроводности. Постановка задачи теплопроводности (1)-(6) допускает реализацию идеи «сосредоточенной емкости», описанной в [7,8]. Идея состоит в

том, что среднеинтегральная температура крышки равна температуре на ее границе:

$$\frac{1}{\pi[R^2 - (R - \delta)^2]} \int_0^{2\pi} \int_{R-\delta}^R r T_2(r, t) d\phi dr = T_1(R + 0, t). \quad (7)$$

Полагая здесь $t = 0$ и учитывая начальное условие (2), получаем важное соотношение

$$T_1(R + 0, t)|_{t=0} = T_2^0. \quad (8)$$

Введем безразмерные переменные

$$\xi = \frac{r}{R}, \quad \tau = \frac{a_1 t}{R^2}, \quad \alpha_0^2 = \frac{(a_2 / a_1)(\lambda_1 / \lambda_2)}{\delta / R} \quad (9)$$

$$W(\xi, \tau) = \frac{T_1(r, t)}{T_2^0}.$$

Тогда задача теплопроводности (1) – (6) в этих безразмерных переменных принимает следующий вид:

$$\frac{\partial W(\xi, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial W}{\partial \xi}, \quad \xi > 1, \quad \tau > 0, \quad (10)$$

$$\left. \frac{\partial W(\tau, \xi)}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} = \begin{cases} 0, & \xi > 1, \\ 1, & \xi = 1, \end{cases} \quad (11)$$

$$\left. \frac{\partial W(\tau, \xi)}{\partial \tau} \right|_{\xi=1} = \alpha_0^2 \left. \frac{\partial W(\tau, \xi)}{\partial \xi} \right|_{\xi=1}, \quad \tau > 0, \quad (12)$$

$$|W(\tau, \xi)| < +\infty, \quad \xi \geq 1, \quad \tau \geq 0. \quad (13)$$

Заметим, что задача (10)-(13) не относится к числу классических для уравнения параболического типа [9]. Для решения этой задачи (10)-(13) используем преобразование Лапласа. Введем для температуры изображение по Лапласу:

$$\bar{W}(\xi, p) = \int_0^\infty W(\xi, \tau) \exp(-p\tau) d\tau. \quad (14)$$

Тогда решение задачи (10)-(13) в изображениях имеет вид

$$\bar{W}(\xi, p) = \frac{K_0(\xi \sqrt{p})}{\sqrt{p} [\alpha_0^2 K_1(\sqrt{p}) + \sqrt{p} K_0(\sqrt{p})]}, \quad (15)$$

где $K_0(z)$ и $K_1(z)$ — модифицированные функции Бесселя.

Оригинал для изображения (15) находим с помощью интеграла Римана – Меллина, содержащего точку ветвления. Опуская громоздкие выкладки, получаем:

$$W(\xi, \tau) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{Y_0(\xi\tau) \cdot A(y) - J_0(\xi\tau) \cdot B(y)}{(A(y))^2 + (B(y))^2} \cdot e^{-y^2\tau} dy,$$

$$A(y) = \alpha_0^2 J_1(y) - y J_0(y), \quad (16)$$

$$B(y) = \alpha_0^2 Y_1(y) - y Y_0(y),$$

где $J_\nu(z)$ и $Y_\nu(z)$ — функции Бесселя и Вебера соответственно. Из (16) вытекает необходимое для дальнейших рассуждений выражение для безразмерной температуры:

$$W(1, y) = \frac{4\alpha_0^2}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{e^{-y^2\tau}}{y[A^2(y) + B^2(y)]} dy. \quad (17)$$

Постановка задачи термомеханики для составного диска. При постановке задачи термомеханики по расчету температурных напряжений в диске необходимо учесть, что разность температур $T_2^0 - T_1(R, t)$ приводит к появлению в оболочке $R - \delta < r < R$ напряжения растяжения:

$$\sigma_n = \alpha_{2r} E_2 (T_2^0 - T_1(R, t)), \quad (18)$$

где α_{2r} , E_2 — соответственно коэффициент линейного теплового расширения и модуль Юнга материала крышки.

Задачу термомеханики сформулируем в системе координат (ξ, τ) в переменных [7,9] для следующих безразмерных величин:

$$\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) = \frac{(1 - \nu_1) \tilde{\sigma}_{rr}(r, t)}{E_1 \alpha_{1T} T_2^0},$$

$$U(\xi, \tau) = \frac{u_r(r, t)}{(1 + \nu_1) \alpha_{1T} T_2^0 R},$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}(\xi, \tau) = \frac{(1 - \nu_1) \tilde{\sigma}_{\varphi\varphi}(r, t)}{E_1 \alpha_{1T} T_2^0}, \quad (19)$$

$$\gamma^2 = \frac{c_1^2 R^2}{a_1^2}; \quad E_1 = 2G_1(1 + \nu_1),$$

где $\tilde{\sigma}_{rr}(r, t)$ и $\tilde{\sigma}_{\varphi\varphi}(r, t)$ — напряжения в цилиндрических координатах, $u_r(r, t)$ — радиальное перемещение, ν_1 — коэффициент Пуассона.

на, G_1 — модуль сдвига, E_1 — модуль Юнга, $c_1 = \sqrt{E_1 / \rho_1}$ — скорость распространения волны расширения в упругой среде (величина, близкая к скорости звука), ρ_1 — плотность, α_{1T} — коэффициент линейного теплового расширения материала основного диска.

В безразмерных переменных динамическая задача термомеханики имеет вид:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial U}{\partial \xi} - \frac{1}{\xi^2} U - \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} = \frac{\partial W(\xi, \tau)}{\partial \xi}, \quad \xi > 1, \tau > 0, \quad (20)$$

$$U(\xi, \tau)|_{\tau=0} = \frac{\partial U(\xi, \tau)}{\partial \tau} \bigg|_{\tau=0} = 0, \quad \xi \geq 1, \quad (21)$$

$$\left(\frac{\partial U(\xi, \tau)}{\partial \xi} + \frac{\nu}{\xi} U(\xi, \tau) \right) \bigg|_{\xi=1} = W(1, \tau) - \psi_0(\tau), \quad \tau > 0, \quad (22)$$

$$|U(\xi, \tau)| < +\infty, \quad \xi \geq 1, \tau \geq 0, \quad (23)$$

где

$$\begin{aligned} \psi_0(\tau) &= \beta_0^2 (1 - W(1, \tau)), \\ \beta_0^2 &= (1 - \nu_1) \frac{\alpha_{2T}}{\alpha_{1T}} \cdot \frac{E_2}{E_1}. \end{aligned} \quad (24)$$

Проанализируем постановку задачи (19)-(22). Эта задача является динамической, что отражено в (19) наличием инерционного члена [9-11]. В то же время для ряда конструкционных материалов (полимеры органические и неорганические, металлы, керамика и др.) величина $\frac{1}{\gamma^2} \sim (10^{-17} - 10^{-14})$, и в уравнения (19) можно пренебречь влиянием ускорений

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial U}{\partial \xi} - \frac{1}{\xi^2} U = \frac{\partial W(\xi, \tau)}{\partial \xi}, \quad \xi > 1, \tau > 0 \quad (25)$$

и рассматривать квазистатическую задачу (20)-(24).

Решение квазистатической постановки задачи (20)-(24) в пространстве изображений по Лапласу:

$$\bar{U}(\xi, p) = \int_0^\infty U(\xi, \tau) \exp(-p\tau) d\tau \quad (26)$$

имеет вид:

$$\begin{aligned}\bar{U}(\xi, p) &= \frac{1}{\xi} \cdot \frac{K_1(\sqrt{p})}{\bar{A}(p)} + \frac{1}{\xi} \bar{\psi}_0(p), \\ \bar{A}(p) &= p \cdot (\alpha_0^2 K_1(\sqrt{p}) + \sqrt{p} K_0(\sqrt{p})).\end{aligned}\quad (27)$$

Искомые компоненты тензора напряжения в основном диске

$$\begin{aligned}\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) &= \frac{\partial U(\xi, \tau)}{\partial \xi} + \frac{\nu}{\xi} U(\xi, \tau) - W(\xi, \tau), \\ \sigma_{\phi\phi}(\xi, \tau) &= \nu \frac{\partial U(\xi, \tau)}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi} U(\xi, \tau) - W(\xi, \tau),\end{aligned}\quad (28)$$

в пространстве изображений есть выражения вида

$$\frac{\bar{\sigma}_{\xi\xi}(\xi, p)}{(1-\nu)} = -\frac{1}{\xi^2} \frac{K_1(\sqrt{p})}{\bar{A}(p)} + \frac{1}{\xi} \frac{K_1(\xi\sqrt{p})}{\bar{A}(p)} - \frac{1}{\xi^2(1-\nu)} \bar{\psi}_0(p), \quad (29)$$

$$\frac{\bar{\sigma}_{\phi\phi}(\xi, p)}{(1-\nu)} = -\left[\frac{\bar{\sigma}_{\xi\xi}(\xi, p)}{(1-\nu)} + \bar{W}(\xi, p) \right]. \quad (30)$$

Оригиналы искомых величин, как и для температуры находятся путем вычисления контурных интегралов Римана – Меллина:

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)}{1-\nu} &= \frac{1}{\pi \xi} \int_0^\infty \frac{\alpha_0^2 \cdot C(y) + y \cdot D(y)}{y(A^2(y) + B^2(y))} \cdot (1 - e^{-y^2 \tau}) dy - \\ &- \frac{4}{\pi^2 \xi^2} \int_0^\infty \frac{1 - e^{-y^2 \tau}}{y(A^2(y) + B^2(y))} dy - \frac{\beta_1^2}{\xi^2} (1 - W(1, \tau)),\end{aligned}\quad (31)$$

где обозначено

$$\begin{aligned}A(y) &= \alpha_0^2 J_1(y) - y J_0(y), \\ B(y) &= \alpha_0^2 Y_1(y) - y Y_0(y), \\ C(y) &= Y_1(\xi y) \cdot J_1(y) - J_1(\xi y) \cdot Y_1(y), \\ D(y) &= J_1(\xi y) \cdot Y_0(y) - Y_1(\xi y) \cdot J_0(y),\end{aligned}\quad (32)$$

$$\frac{\sigma_{\phi\phi}(\xi, \tau)}{(1-\nu)} = -\left[\frac{\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)}{(1-\nu)} + W(\xi, \tau) \right], \quad (33)$$

$$\beta_1^2 = \frac{\alpha_{2T}}{\alpha_{1T}} \cdot \frac{E_2}{E_1}. \quad (34)$$

Результаты численных расчетов. На рис. 1–3 приведены изменения со временем величин (16), (30) и (32) на поверхности отверстия

$\xi = 1$ и во внутренних сечениях диска $\xi = 1,5$ и $\xi = 2$. Значения параметров $a_0 = 5$ и $\beta_1 = 1$, соответствуют упругим и теплофизическим характеристикам стеклопластика ($r > R$) и железа ($R - \delta < r < R$).

Как следует из приведенного численного эксперимента, наиболее чувствительной областью являются приповерхностные слои отверстия. В них возникают кратковременные растягивающие радиальные напряжения и кратковременные сжимающие тангенциальные напряжения. Что касается поверхности отверстия, то здесь картина существенно меняется. На поверхности выреза возникают сжимающие радиальные и растягивающие тангенциальные напряжения. Последние являются наиболее опасными для материала диска, если они превосходят предел прочности. Впрочем, сжимающие напряжения также могут вызвать разрушение, если они превосходят предел прочности на сжатие. Однако, предел прочности на сжатие обычно значительно превосходит предел прочности на растяжение, и, по-видимому, наиболее разрушительными являются тангенциальные напряжения.

Таким образом, полученные кривые наглядно отражают термическую реакцию рассмотренной системы в рамках нагрева тепловой модели (1)-(6), которая сводится к (9)-(12) с учетом выполнения условия «сосредоточенной емкости» в системе.

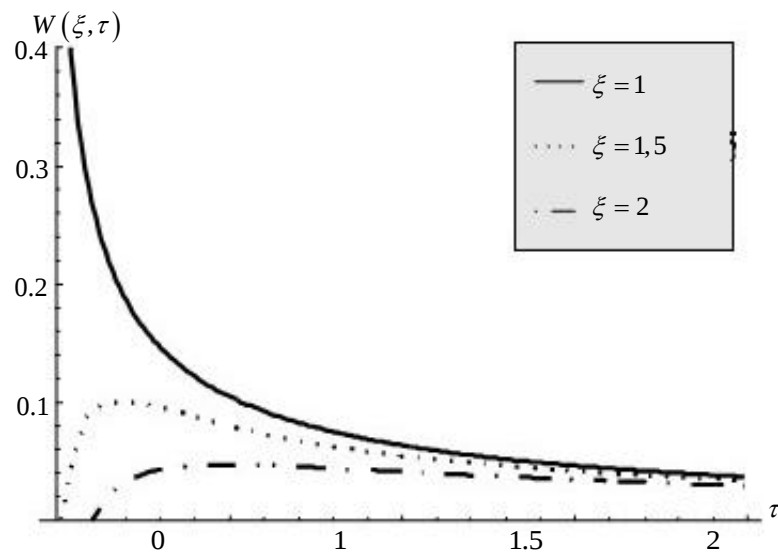


Рис. 1. Изменение безразмерной температуры во времени для трех различных координат ξ диска

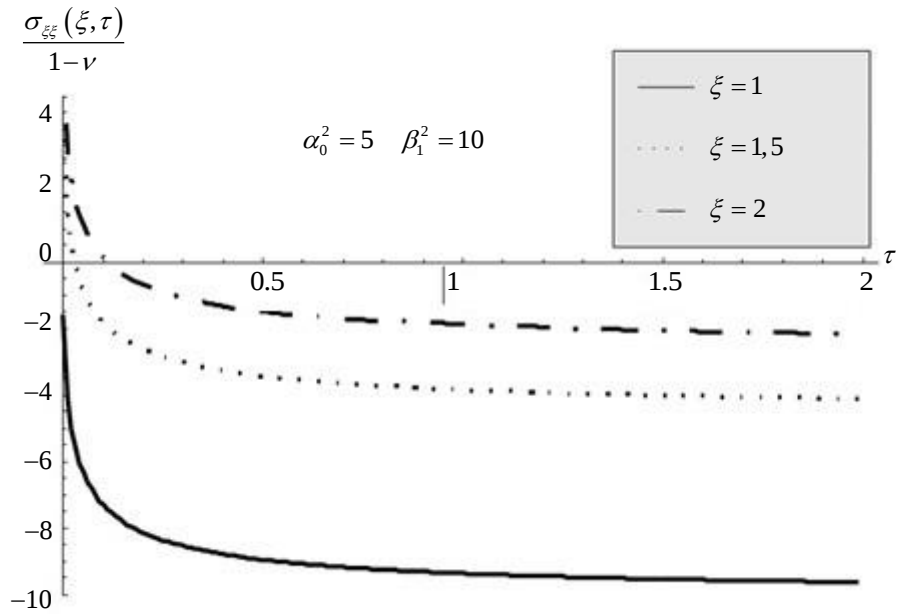


Рис. 2. Изменение радиальных напряжений со временем в диске

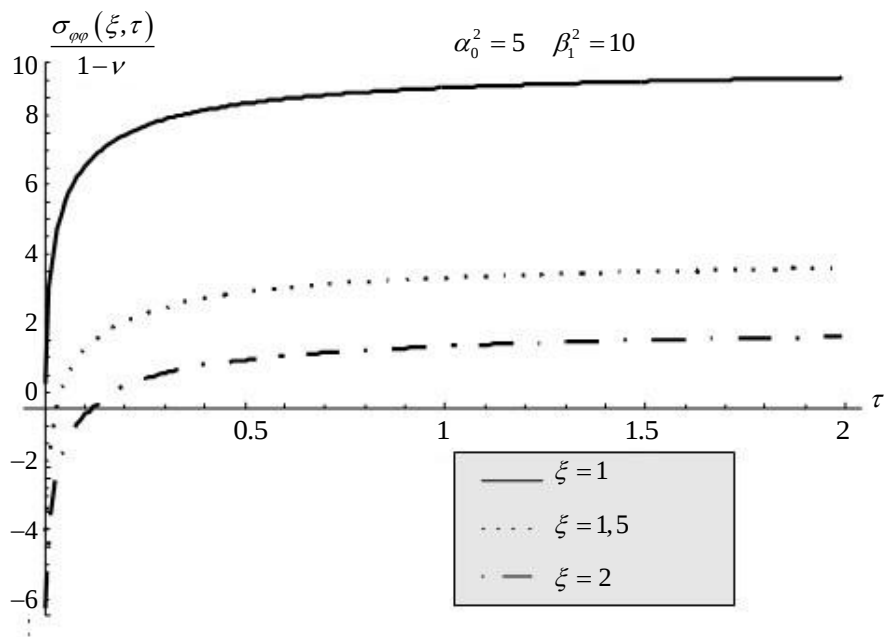


Рис. 3. Изменение тангенциальных напряжений со временем в диске

Закключение. Получено аналитическое решение сопряженной задачи нестационарной теплопроводности и термомеханики для составного термоупругого диска с отверстием, при мгновенном

начальном нагреве. Решение получено с использованием преобразования Лапласа и обратного преобразования Лапласа-Меллина.

Приведен пример численной реализации полученного решения для случая стеклопластикового диска со стальной крышкой при начальном нагреве. Показано, что полученное решение позволяет вычислять наиболее опасные растягивающие напряжения в составных конструкциях.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. Т.4. Основы механики твердого тела*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013, 623 с.
- [2] Димитриенко Ю.И., Минин В.В., Сыздыков Е. Моделирование внутреннего тепломассопереноса и термонапряжений в композитных оболочках при локальном нагреве. *Математическое моделирование*, 2011, т. 23, № 9, с. 14-32.
- [3] Димитриенко Ю.И. *Механика композитных конструкций при высоких температурах*. Москва, Физматлит, 2019, 448 с.
- [4] Dimitrienko Yu. I. Termomechanical behavior of composites under local intense heating by irradiation. *Composites. Part A: Applied Science and Manufacturing*, 2000, vol. 31, no. 6, pp. 591-598.
- [5] Галицейский Б. М., Формалев В. Ф., Совершенный В.Д., Черный М.С. *Тепловая защита лопаток турбин*. Москва, Изд-во МАИ, 1996, 354 с.
- [6] Волков И. К., Загоруйко Е. А., Фаликова И. Д. *Задачи математической физики и их решения методом интегральных преобразований*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1994, 63 с.
- [7] Карташов Э. М. *Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел*. Москва, Высшая школа, 2001, 549 с.
- [8] Карташов Э. М., Бартенев Г.М. Динамические эффекты в твердых телах в условиях взаимодействия с интенсивными потоками энергии. *Итоги науки и техники. Серия: Химия и технология высокомолекулярных соединений*, 1988, т. 25, с. 3-88.
- [9] Карташов Э.М., Крылов С.С. Обобщенная модель теплового удара в динамической термоупругости. *Инженерно-физический журнал*, 2023, т. 96, № 3, с.575-587.
- [10] Карташов Э.М., Ненахов Е.В. Гиперболические модели нестационарной теплопроводности. *Тепловые процессы в технике*, 2018, т. 10, № 1-2, с. 47-55.

Статья поступила в редакцию 23.03.2026

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Валишин А.А., Карташов Э.М. Моделирование термических напряжений в составном диске при быстром нестационарном нагреве. *Математическое моделирование и численные методы*, 2026, № 2, с. 151–161.

Валишин Анатолий Анатольевич — д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: vaa@bmstu.ru

Карташов Эдуард Михайлович — д-р физ.-мат. наук, профессор, заслуженный деятель науки Российской Федерации.

Modeling thermal stresses in a composite disk under impulse transient heating

© A.A. Valishin, E.M. Kartashov

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

The problem studied here is of practical interest for a number of engineering fields, including the design of components and structures in mechanical engineering, power engineering, electronics, aviation and space technology, and other fields. An analytical solution is obtained for the coupled problem of transient heat conduction and thermomechanics for a composite disk with a hole during rapid initial heating. The thermal response of a composite disk with an internal circular hole is studied. Using the developed model, it is possible to calculate the transient temperature field and thermal stresses in thin composite disks. Patterns of thermoelastic stresses during heating of the cutout surface are established using the «concentrated capacitance» principle.

Keywords: transient heat conduction, thermal stresses, composite disks, Laplace transform

REFERENCES

- [1] Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika sploshnoi sredy. T. 4. Osnovy mekhaniki tverdogo tela* [Continuum Mechanics. Vol. 4. Fundamentals of Solid Mechanics]. Moscow, BMSTU Publ, 2013, 623 p.
- [2] Dimitrenko Yu.I., Minin V.V., Syzdykov E. Modeling of internal heat and mass transfer and thermal stresses in composite shells under local heating. *Mathematical Models and Computer Simulations*, 2011, vol. 23, no. 9, pp.14-32.
- [3] Dimitrenko Yu.I., *Thermomechanics of Composites Structures under High Temperatures*. Springer, 2016, 434 p.
- [4] Dimitrienko Yu. I. Thermomechanical behavior of composites under local intense heating by irradiation. *Composites. Part A: Applied Science and Manufacturing*, 2000, vol. 31, no. 6, pp. 591-598.
- [5] Galitsky B. M., Formalev V. F., Sovershenniy V.D., Cherniy M.S. *Teplovaya zashchita lopatok turbin* [Thermal Protection of Turbine Blades]. Moscow, MAI, 1996, 355 p.
- [6] Volkov I. K., Zagoruyko E. A., Falikova I. D. *Zadachi matematicheskoi fiziki i ikh resheniya metodom integral'nykh preobrazovaniy* [Problems of Mathematical Physics and Their Solutions by the Method of Integral Transforms]. Moscow, BMSTU Publ, 1994, 64 p.
- [7] Kartashov E. M. *Analiticheskie metody v teorii teploprovodnosti tverdykh tel* [Analytical Methods in the Theory of Thermal Conductivity of Solid Bodies]. Moscow, Vysshaya Shkola Publishers, 2001, 549 p.
- [8] Kartashov E. M., Bartenev G.M. *Dinamicheskie efekty v tverdykh telakh v usloviyakh vzaimodeystviya s intensivnymi potokami energii* [Dynamic Effects in Solids under Conditions of Interaction with Intensive Energy Fluxes]. *Itogi Nauki i Tekhniki. Seriya: Khimiya i Tekhnologiya Vysokomolekulyarnykh Soedinenii* [Results of Science and Technology. Series Chemistry and Technology of High-Molecular-Weight Compounds], 1988, vol. 25, pp. 3-88.
- [9] Kartashov E.M., Krylov S.S. Generalized model of thermal shock in dynamic

thermoelasticity. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2023, vol. 96, no. 3, pp. 573-584.

- [10] Kartashov E.M., Nenakhov E.V. Hyperbolic models of non - stationary heat conduction. *Thermal Processes in Engineering*, 2018, vol.10, no. 1-2, pp. 47-55.

Valishin A.A., Dr. Sc. (Phys.-Math.), Professor of Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: vaa@bmstu.ru

Kartashov E.M., Dr. Sc. (Phys.-Math.), Professor, Honored Scientist of the Russian Federation.