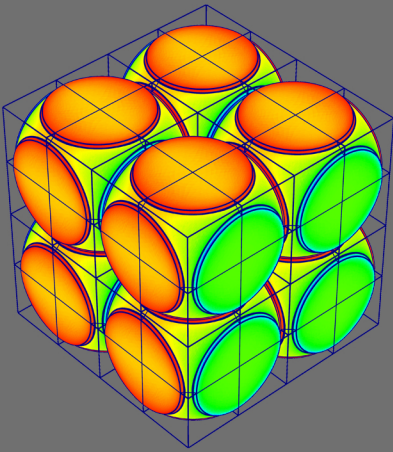




Математическое моделирование и численные методы

Димитриенко Ю.И., Димитриенко А.Ю. Асимптотическая теория тонких многослойных упруго-пластических пластин, разносопротивляющихся растяжению – сжатию при циклических нагрузениях. Математическое моделирование и численные методы, 2026, № 2, с. 119–150.

Источник: <https://mmcm.bmstu.ru/articles/410/>

Асимптотическая теория тонких многослойных упруго-пластических пластин, разнсопротивляющихся растяжению – сжатию при циклических нагружениях

© Ю.И. Димитриенко, А.Ю. Димитриенко

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Разработана асимптотическая теория деформирования многослойных упруго-пластических пластин при циклических нагружениях для случая, когда слои подчиняются теории Армстронга–Фредерика–Кадашевича – Бондаря, модифицированной в работе [15] для возможности учета различия пластических свойств при растяжении-сжатии (модель AFKB-D). Сформулирована 3-х мерная постановка задачи пластичности в скоростях для многослойных пластин, на основе которой с помощью асимптотических разложений по малому геометрическому параметру выведены рекуррентные локальные задачи теории пластичности, а также сформулирована осредненная задача теории пластичности. Особенностью асимптотических теорий тонких конструкций является отсутствие необходимости каких-либо допущений относительно распределений перемещений и напряжений по толщине. Показано, что для рассмотренного класса моделей теории пластичности с кинематическим упрочнением для построения корректной асимптотической теории необходимо введение условия согласования малости параметров пластического упрочнения и геометрического малого параметра. Получены аналитические решения рекуррентных последовательностей локальных задач, с помощью которых выведены формулы для всех 6 компонент тензора напряжений в слоях пластин. В качестве численного примера рассмотрена задача о циклическом изгибе 4-х слойной пластины, показаны основные особенности изменения полей напряжений в слоях пластины в процессе циклов растяжения-сжатия.

Ключевые слова: асимптотическая теория, асимптотические разложения, многослойные пластины, пластичность, циклическое нагружение, разнсопротивляемость, растяжение-сжатие

Введение. Многослойные тонкие конструкции применяются в различных областях техники. Расчет деталей машин в условиях циклического упругопластического деформирования является одной из важных проблем современной механики [1,2]. Фундаментальные результаты в области создания моделей циклического упругопластического деформирования были получены в работах А.А. Ильюшина, В.В. Москвитина, Ю.И. Кадашевича, В.В. Новожилова, В. С. Бондаря, А.Ю. Ишлинского, В.Г. Зубчанинова, Chaboche J.L., Armstrong P.J., Frederick C.O. и многих других авторов [1-14]. В настоящее время в области исследования циклического деформирования одной из наиболее эффективных моделей, позволяющих достаточно точно описывать диаграммы деформирования при произвольном числе циклов нагружения, в том числе несимметричных, является модель,

предложенная Армстронгом–Фредериком–Кадашевичем, и развитая в работах В.С.Бондаря и Chaboche J.L. [8-11] Модификация этой модели для случая упругопластических материалов, разнсопротивляющихся в областях растяжения и сжатия, при соблюдения принципа квазилинейности определяющих соотношений пластичности [1], была предложена в работе [15], далее эта модель называется AFKB-D. В этой же работе [15] была предложена постановка задачи упругопластичности для модели AFKB-D в скоростях, в тензорной форме записи всех соотношений.

Разработка методов расчета конструкций их материалов, подчиняющихся модели AFKB-D, представляет самостоятельную, достаточно сложную проблему. Настоящая публикация посвящена разработке метода расчета тонких многослойных пластин, каждый слой которых подчиняется модели AFKB-D, но со своими материальными константами модели. Для многослойных тонких пластин существует достаточно эффективный метод расчета, основанный на асимптотических разложениях общей трехмерной постановки задачи по малому геометрическому параметру (далее - асимптотическая теория или АТ) [16-18]. В отличие от большинства классических подходов к выводу уравнений механики тонких тел АТ не содержит допущений о характере распределений напряжений, деформаций и перемещений по толщине конструкций. АТ показала себя очень эффективной для большого числа различных задач механики [19-22], в том числе для нелинейных задач.

Цель настоящей работы состоит в разработке АТ для многослойных упругопластических пластин, подчиняющихся модели AFKB-D. Особенность данного варианта теории состоит в том, что модели теории пластического течения, и в частности модель AFKB-D, имеют сложный характер нелинейности связи напряжений-деформаций, не выражающейся в виде полиномиальной зависимости, для которых построение АТ теории не вызывает принципиальных сложностей. Для модели AFKB-D построение корректной АТ требует введения дополнительного допущения о порядках малости членов в модели пластичности, по сравнению с классическими АТ.

Основные допущения теории многослойных тонких пластин.

Рассмотрим в прямоугольной декартовой системе координат $O\vec{e}_k$, с координатами x_i многослойную пластину - область следующего вида:

$$\bar{V} = \bigcup_{s=1}^N \bar{V}_s, V_s = \{x_k \mid x_I \in \Sigma_0, x_{3(s-1)} < x_3 < x_{3(s)}\}, \quad (1)$$

где $\bar{V}_s$ означает замыкание области V_s — s-го слоя многослойной пластины, Σ_0 — двумерная область на плоскости $x_3 = 0$. Здесь и далее заглавные индексы $I, J, K, L, M, \dots$ принимают значение 1, 2.

Параметр $h > 0$ — толщина пластины. Обозначим $\Sigma_s = \{x_k \mid x_I \in \Sigma_0, x_3 = x_{3(s)}\}$ — границы раздела слоев, $s = 0, 1, \dots, N$, где $x_{3(0)} = -h/2$, $x_{3(N)} = h/2$. Совокупность границ слоев $\Sigma_s = \bigcup_{s=1}^{N-1} \Sigma_s$ — представляет собой поверхность контакта слоев многослойной пластины, границы $\Sigma_+ = \Sigma_N$ и $\Sigma_- = \Sigma_0$ — это внешние поверхности пластины. Поверхность $\Sigma_T = \{x_k \mid x_I \in \partial\Sigma_0, x_{3(s-1)} < x_3 < x_{3(s)}\}$ — это торцевые поверхности пластины, где $\partial\Sigma_0$ — контур (граница) области Σ_0 . Обозначим $L = \text{diam}(\Sigma_0)$ — диаметр области Σ_0 (максимальное расстояние между точками области Σ_0).

Рассмотрим далее тонкие пластины постоянной толщины h , для которых выполняется условие [18]: $\kappa = (h/L) \ll 1$, т.е. число κ — является малым параметром. Следуя общей концепции АТ [18] введем для тонкой пластины безразмерные координаты $\tilde{x}_k$ (глобальные координаты) и локальную координату ξ , изменяющуюся в диапазоне $-0,5 < \xi < 0,5$:

$$\tilde{x}_k = x_k / L, \quad k = 1, 2, 3, \quad \xi = x_3 / \kappa. \quad (2)$$

Постановка линеаризованной задачи упруго-пластичности с моделью АФКВ-D для многослойных тонких пластин. Материалы каждого слоя будем полагать изотропными упругопластическими, подчиняющимися модели АФКВ-D, учитывающей разностойчивость материалов при растяжении-сжатии. Рассмотрим постановку задачи упруго-пластичности при циклических нагружениях в скоростях, которая была предложена в работе [15] и применим ее для многослойной тонкой пластины. Запишем эту постановку в линеаризованном виде с помощью алгоритма, предложенного в [23], и используем запись в безразмерных координатах x_k (волну сверху над координатами далее будем опускать):

$$\begin{aligned} \nabla_i \dot{\sigma}_{ij}^{\{m\}} &= 0; \\ \dot{\sigma}_{ij}^{\{m\}} &= \tilde{C}_{ijkl}^{\{m-1\}} \dot{\varepsilon}_{kl}^{\{m\}}; \quad \dot{\varepsilon}_{kl}^{\{m\}} = Y_{kl ij}^{\{m-1\}} \dot{\varepsilon}_{ij}^{\{m\}}; \quad \dot{\lambda}^{\{m\}} = A_{ij}^{\varepsilon\{m-1\}} \dot{\varepsilon}_{ij}^{\{m\}}; \\ \dot{h}_{ij}^{\{m\}} &= \Phi_{ij}^{h\{m-1\}} - \Phi^{h\{m-1\}} h_{ij}^{\{m\}}; \quad \dot{e}_u^{\{m\}} = I_2(\dot{\varepsilon}_{ij}^{p\{m-1\}}); \\ \dot{\varepsilon}_{kl}^{\{m\}} &= \frac{1}{2}(\nabla_i v_k^{\{m\}} + \nabla_k v_l^{\{m\}}); \\ \Sigma_{\pm} : \dot{\sigma}_{i3}^{\{m\}} &= \dot{S}_{i\pm}, \quad \Sigma_T^u : v_i^{\{m\}} = v_{ei}; \quad \Sigma_T^\sigma : n_J \dot{\sigma}_{ij}^{\{m\}} = \dot{S}_{ej}; \\ \Sigma_s : v_i^{\{m\}} &= 0; \quad [\dot{\sigma}_{i3}^{\{m\}}] = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где $v_k = \dot{u}_k$ — компоненты вектора скорости, u_k — компоненты вектора перемещений, $\dot{S}_{ej}$ — заданный вектор скорости изменения усилий, v_{ei} — заданный вектор скорости на торцевой поверхности, $[v_i]$ — скачок функций при переходе через границу раздела слоев, $\nabla_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ — частные производные по координатам x_i , точкой сверху обозначена производная по времени, $\{m\}$ — номер итерации по времени, ε_{kl} , ε_{kl}^p — компоненты тензоров полных и пластических деформаций, σ_{ij} — компоненты тензора напряжений, $\dot{\lambda}$ — параметр пластического деформирования, нагружения, h_{ij} — напряжения упрочнения. Граничные условия заданы: на внешней и внутренней поверхностях $\Sigma_{\pm}$ и на торцевой поверхности $\Sigma_T = \Sigma_T^u \cup \Sigma_T^{\sigma}$, также учитываются условия идеального контакта слоев граничных условий на поверхностях Σ_S .

В постановке задачи (3) введены следующие тензоры и скаляры $\Pi = \{\tilde{C}_{mpkl}, Y_{klij}, A_{ij}^{\varepsilon}, \Phi_{ij}^h, \Phi^h\}$, описывающие упруго-пластические свойства, согласно модели AFKB-D:

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{mpkl} &= T_{mpij}^{-1} C_{ijkl}, \quad Y_{klij} = \chi Q_{klmn} \tilde{C}_{mnij}, \\ A_{kl}^{\varepsilon} &= \chi \bar{A}_{ij} \tilde{C}_{ijkl}, \quad \Phi_{ij}^h = \dot{\lambda} A_{ij} H_0 + \dot{\lambda} \gamma A_u H_2 \varepsilon_{ij}^p, \quad \Phi^h = \dot{\lambda} H_1 \gamma A_u. \end{aligned} \quad (4)$$

где T_{ijuv}^{-1} — тензор обратный к тензору $T_{ijmn} = \Delta_{ijmn} + \chi C_{ijkl} Q_{klmn}$, Δ_{ijkl} — единичный тензор четвертого ранга [24], C_{ijkl} — компоненты тензора модулей упругости для случая изотропного материала; тензоры Q_{ijkl} и $\bar{A}_{kl}$ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} Q_{ijkl} &= A_{ij} A_{kl} / \bar{\Phi}_1, \quad \bar{A}_{kl} = A_{kl} / \bar{\Phi}_1, \quad \bar{\Phi}_1 = \Phi_1 + C_e \gamma A_u, \\ \Phi_1 &= A_{ij} B_{ij}, \quad B_{ij} = \frac{3}{2} p_{ij}(a) H_0, \quad A_{ij} = A_f \delta_{ij} + \frac{3}{2} p_{ij}(a), \\ a_{ij} &= \sigma_{ij} - h_{ij}, \quad A_u = \sqrt{A_{ij} A_{ij}}, \\ C_e &= \frac{3}{2} p_{ij}(a) (H_2 \varepsilon_{ij}^p - H_1 h_{ij}) + f_e, \quad \gamma = \text{sign}(\dot{\lambda}), \\ A_f &= \frac{\sigma_{yC}^2 - \sigma_{yT}^2}{2(\sigma_{yC} + \sigma_{yT})}, \quad B_f = \frac{1}{4} (\sigma_{yC}^2 + \sigma_{yT}^2), \\ f_e &= -\frac{\partial A_f}{\partial e_u^p} I_1(\sigma) + \frac{\partial B_f}{\partial e_u^p}, \\ \sigma_{yR} &= \sigma_{yR}^0 + (\sigma_{yR}^1 - \sigma_{yR}^0) (1 - \exp(-\beta_{pR} e_u^p)), \quad R \in \{T, C\}. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь δ_{ij} — символ Кронекера, σ_{yT} и σ_{yC} — пределы текучести при растяжении и сжатии, зависящие от интенсивности накопленной пластической деформации e_u^p :

$$e_u^p = \int_0^t I_2(\dot{\varepsilon}_{ij}^p) d\tau, \quad \dot{e}_u^p \equiv I_2(\dot{\varepsilon}^p), \quad (6)$$

где $I_1(a) = a_{ij}\delta_{ij}$, $I_2(a) = \sqrt{\frac{3}{2} p_{ij}(a) p_{ij}(a)}$ — первый и второй главный инварианты тензора a , $p_{ij}(a)$ — девиатор тензора a .

Параметры упрочнения H_s , $s = 0, 1, 2$ в модели AFKB-D зависят от первого инварианта $I_1(\sigma)$ тензора напряжений

$$H_s = H_{sT}\chi_T + H_{sC}\chi_C, \quad s = 0, 1, 2. \quad (7)$$

Здесь H_{sR} — константы модели, учитывающие различие упрочнения при растяжении и сжатии, $s = 0, 1, 2$, $R \in \{T, C\}$, а $\chi_R = \chi_R(I_1(\sigma))$ и χ — функции Хевисайда, определенные следующим образом:

$$\begin{aligned} \chi_T(X) &= \begin{cases} 1, & \text{если } X \geq 0 \\ 0, & \text{если } X < 0 \end{cases}; \\ \chi_C(X) &= 1 - \chi_T(X); \\ \chi &= \begin{cases} 0, & \text{если } f < 0 \text{ или } (f = 0 \text{ и } Df < 0); \\ 1, & \text{если } (f = 0 \text{ и } Df > 0). \end{cases} \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь f — пластический потенциал, который выбирается в форме Друккера-Прагера [12,13], а Df — частичная производная по времени от этого потенциала

$$f = \frac{1}{2} I_2^2(a) + A_f I_1(\sigma) - B_f, \quad Df = (\partial f / \partial \sigma_{kl}) \dot{\sigma}_{kl} = A_{ij} \tilde{C}_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl}. \quad (9)$$

Модель AFKB-D содержит следующие материальные константы: $K = \{E, \nu, \sigma_{yR}^0, \sigma_{yR}^1, \beta_{pR}, H_{sR}\}$, где $s = 0, 1, 2$, $R \in \{T, C\}$, а E, ν — модуль упругости и коэффициент Пуассона. Все эти константы, а, следовательно, тензоры и скаляры $\Pi = \{\tilde{C}_{mpkl}, Y_{klij}, A_{ij}^\varepsilon, \Phi_{ij}^h, \Phi^h\}$, характеризующие упруго-пластические свойства, являются, вообще говоря различными для слоев пластины, в силу этого все эти величины Π полагаются зависящими от координаты ξ . Кроме того, в силу соот-

ношений (4)-(9) функции Π зависят от значений неизвестных тензоров $\Omega = \{\sigma_{ij}, \varepsilon_{kl}^p, e_u^p, h_{ij}, \dot{\lambda}\}$ и следовательно, зависят также и от глобальных координат $\tilde{X}_k$, тогда соотношения (4),(5) для $(m-1)$ шага итерации, можно записать в следующем формальном виде

$$\Pi^{\{m-1\}} = \Pi(\Omega^{\{m-1\}}(\tilde{X}_k, \xi), \xi), \quad (10)$$

где $\Pi = \{\tilde{C}_{mpkl}, Y_{klj}, A_{ij}^e, \Phi_{ij}^h, \Phi^h\}$, $\Omega = \{\sigma_{ij}, \varepsilon_{kl}^p, e_u^p, h_{ij}, \dot{\lambda}\}$.

Следуя работам [18-22], примем дополнительное допущение, о порядке малости вектора усилий на внешней и внутренних поверхностях пластины

$$S_{i\pm} = -\tilde{p}_{\pm} \delta_{i3}, \quad \tilde{p}_{\pm} = \kappa^3 p_{\pm}, \quad (11)$$

где $\tilde{p}_{\pm}$ — истинное давление на разных поверхностях пластины, а $p_{\pm}$ — значения давлений, которые имеют следующую асимптотику в безразмерных переменных: $p_{\pm} = O(1)$.

Для рассматриваемой модели АФКВ-D упругопластической среды сделаем дополнительные допущения относительно констант упрочнения и пределов текучести слоев пластины:

$$H_{sR} = \kappa^{-1} H_{sR}^{(-1)}, \quad s=1, 2, \quad (12)$$

$$\sigma_{yR}^{\alpha} = \kappa \sigma_{yR}^{\alpha(1)}, \quad \beta_{pR} = \kappa^{-1} \beta_{pR}^{(-1)}, \quad \alpha = 0, 1, \quad R \in \{T, C\}.$$

где величины $H_{sR}^{(-1)}$, $\sigma_{yR}^{\alpha(1)}$ и $\beta_{pR}^{(-1)}$ имеют асимптотики порядка $O(1)$ в безразмерных переменных. Эти допущения, как правило, реализуются на практике, в том числе имеют место для рассмотренных далее материалов в численных расчетах.

Асимптотические разложения для многослойных упругопластических пластин. В силу того, что в задаче (3) с учетом (4) и (5) имеется локальная координата ξ и малый параметр κ , решение данной задачи, следуя общей концепции теории асимптотических разложений по малому геометрическому параметру [18], ищем в виде асимптотических разложений всех основных неизвестных по параметру κ в виде функций, которые зависят от глобальных x_I и локальной ξ координат:

$$\Omega^{\{m\}} = \Omega^{\{m\}(0)}(x_I, \xi) + \kappa \Omega^{\{m\}(1)}(x_I, \xi) + \kappa^2 \Omega^{\{m\}(2)}(x_I, \xi) + \dots, \quad (13)$$

$$m = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\Omega = \{v_i, \sigma_{ij}, \varepsilon_{kl}, \varepsilon_{kl}^p, e_u^p, h_{ij}, \dot{\lambda}\}.$$

Все члены в этих разложениях $\Omega^{\{m\}(k)}$, вообще говоря, зависят от x_I и ξ , за исключением $v_i^{\{m\}(0)}(x_I)$, который зависит только глобальных координат, причем дополнительно полагаем

$$v_I^{\{m\}(0)} = 0, \quad v_3^{\{m\}(0)}(x_I) \neq 0. \quad (14)$$

Подставим разложение (13) для скоростей $v_i^{\{m\}}$ и скоростей деформаций $\dot{\varepsilon}_{kl}^{\{m\}}$ в седьмое соотношение (соотношение Коши) системы (3) и применим правила дифференцирования функций локальных координат [18]: $\partial / \partial \tilde{x}_i = \partial / \partial x_i + \kappa^{-1} \delta_{i3} \partial / \partial \xi$. Приравнявая в соотношениях Коши члены при разных степенях κ , получим следующие соотношения между $\dot{\varepsilon}_{ij}^{\{m\}(k)}$ и $v_i^{\{m\}(k)}$:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{IJ}^{\{m\}(0)} &= 0, \quad \dot{\varepsilon}_{I3}^{\{m\}(0)} = \frac{1}{2} (v_{3,I}^{\{m\}(0)} + v_{I/3}^{\{m\}(1)}), \quad \dot{\varepsilon}_{33}^{\{m\}(0)} = v_{3/3}^{\{m\}(1)}, \\ \dot{\varepsilon}_{IJ}^{\{m\}(k)} &= \frac{1}{2} (v_{I,J}^{\{m\}(k)} + v_{J,I}^{\{m\}(k)}), \quad \dot{\varepsilon}_{I3}^{\{m\}(k)} = \frac{1}{2} (v_{3,I}^{\{m\}(k)} + v_{I/3}^{\{m\}(k+1)}), \\ \dot{\varepsilon}_{33}^{\{m\}(k)} &= v_{3/3}^{\{m\}(k+1)}, \quad k=1, 2, \dots, \quad m=0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь и далее обозначены производные по глобальным координатам: $v_{i,j}^{\{m\}(k)} = \partial v_i^{\{m\}(k)} / \partial x_j$, а производные по локальной координате обозначены следующим образом: $v_{i/3}^{\{m\}(k)} = \partial v_i^{\{m\}(k)} / \partial \xi$.

Подставим разложения (15) для скоростей полных деформаций $\dot{\varepsilon}_{kl}^{\{m\}}$ и скоростей напряжений $\dot{\sigma}_{ij}^{\{m\}}$ в линеаризованное уравнение теории пластического течения (второе уравнение системы (3)), получим соотношения между членами $\dot{\varepsilon}_{kl}^{\{m\}(k)}$ и $\dot{\sigma}_{ij}^{\{m\}(k)}$ в этих асимптотических разложениях

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{IJ}^{\{m\}(k)} &= \tilde{C}_{IJKL}^{\{m-1\}(0)} \dot{\varepsilon}_{KL}^{\{m\}(k)} + \hat{C}_{IJs3}^{\{m-1\}(0)} \dot{\varepsilon}_{s3}^{\{m\}(k)} + \Delta \dot{\sigma}_{IJ}^{\{m\}(k)}, \\ \dot{\sigma}_{i3}^{\{m\}(k)} &= \tilde{C}_{i3KL}^{\{m-1\}(0)} \dot{\varepsilon}_{KL}^{\{m\}(k)} + \hat{C}_{i3s3}^{\{m-1\}(0)} \dot{\varepsilon}_{s3}^{\{m\}(k)} + \Delta \dot{\sigma}_{i3}^{\{m\}(k)}, \\ k &= 0, 1, 2, \dots, \quad m=0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь введены обозначения

$$\hat{C}_{ijs3}^{\{m-1\}(0)} = \begin{cases} 2\tilde{C}_{ijs3}^{\{m-1\}(0)}, & s=1, 2 \\ \tilde{C}_{ijs3}^{\{m-1\}(0)}, & s=3 \end{cases}. \quad (17)$$

В формулах (16) в правых частях выделены слагаемые k -приближения, соответствующие k -ому приближению членов в левой части этих соотношений, а все остальные слагаемые от 0 до $k-1$ приближения объединены в следующие величины

$$\Delta \dot{\sigma}_{ij}^{\{m\}(k)} = \sum_{k'=0}^{k-1} (\tilde{C}_{ijKL}^{\{m-1\}(k-k')} \dot{\varepsilon}_{KL}^{\{m\}(k')} + \hat{C}_{ijs3}^{\{m-1\}(k-k')} \dot{\varepsilon}_{s3}^{\{m\}(k')}) . \quad (18)$$

Сформулируем условия нормировки для скоростей

$$\sum_{k=0}^{\infty} \kappa^k \langle v_I^{\{m\}(k)} \rangle = \kappa \bar{v}_I^{\{m\}} , \quad \sum_{k=0}^{\infty} \kappa^k \langle v_3^{\{m\}(k)} \rangle = \bar{v}_3^{\{m\}} , \quad (19)$$

здесь введена операция осреднения по толщине пластины [18]

$$\langle v_{\alpha}^{\{m\}(k)} \rangle = \int_{-0,5}^{0,5} v_{\alpha}^{\{m\}(k)} d\xi , \quad (20)$$

а $\bar{v}_i^{\{m\}}$ — компоненты осредненного вектора скорости, которые зависят только от глобальных координат и определяются из осредненных уравнений для пластины, которые будут выведены далее.

Формулировка локальных задач 0, 1, 2, 3, и k-го приближений. Подставим разложения (13) в уравнения равновесия и граничные условия системы (3), тогда получим

$$\begin{aligned} & \kappa^{-1} \dot{\sigma}_{i3/3}^{\{m\}(0)} + \left(\dot{\sigma}_{ij,J}^{\{m\}(0)} + \dot{\sigma}_{i3/3}^{\{m\}(1)} \right) + \kappa \left(\dot{\sigma}_{ij,J}^{\{m\}(1)} + \dot{\sigma}_{i3/3}^{\{m\}(2)} \right) + \\ & + \kappa^2 \left(\dot{\sigma}_{ij,J}^{\{m\}(2)} + \dot{\sigma}_{i3/3}^{\{m\}(3)} \right) + \dots = 0; \\ & \sum_T^u : v_k^{\{m\}(0)} + \kappa v_k^{\{m\}(1)} + \kappa^2 v_k^{\{m\}(2)} + \kappa^3 v_k^{\{m\}(3)} + \dots = \dot{u}_{ej}; \\ & \sum_T^{\sigma} : n_j \left(\dot{\sigma}_{ij}^{\{m\}(0)} + \kappa \dot{\sigma}_{ij}^{\{m\}(1)} + \kappa^2 \dot{\sigma}_{ij}^{\{m\}(2)} + \kappa^3 \dot{\sigma}_{ij}^{\{m\}(3)} + \dots \right) = \dot{S}_{ej}; \\ & \sum_S : [v_k^{\{m\}(0)}] + \kappa [v_k^{\{m\}(1)}] + \kappa^2 [v_k^{\{m\}(2)}] + \kappa^3 [v_k^{\{m\}(3)}] + \dots = 0; \\ & [\dot{\sigma}_{i3}^{\{m\}(0)}] + \kappa [\dot{\sigma}_{i3}^{\{m\}(1)}] + \kappa^2 [\dot{\sigma}_{i3}^{\{m\}(2)}] + \kappa^3 [\dot{\sigma}_{i3}^{\{m\}(3)}] + \dots = 0; \\ & \sum_{\pm} : \dot{\sigma}_{i3}^{\{m\}(0)} + \kappa \dot{\sigma}_{i3}^{\{m\}(1)} + \kappa^2 \dot{\sigma}_{i3}^{\{m\}(2)} + \kappa^3 \dot{\sigma}_{i3}^{\{m\}(3)} + \dots = -\kappa^3 \dot{p}_{\pm} \delta_{i3}. \end{aligned} \quad (21)$$

Следуя [18], приравниваем в уравнениях равновесия члены при κ^{-1} к нулю, а при остальных степенях κ — к некоторым величинам $w_i^{\{m\}(k)}$, не зависящим от ξ . В граничных условиях все члены при разных степенях κ приравниваем к нулю. Сгруппируем получившиеся уравнения при соответствующих степенях κ и присоединим к ним кинематические уравнения (15) и определяющие соотношения (16), также при соответствующих неотрицательных степенях от κ . В результате получим рекуррентную последовательность локальных задач.

Для нулевого приближения эта локальная задача имеет вид:

$$\begin{aligned}
 \dot{\sigma}_{i3/3}^{\{m\}(0)} &= 0, \\
 \dot{\sigma}_{i3}^{\{m\}(0)} &= \tilde{C}_{i3KL}^{\{m-1\}(0)} \dot{\varepsilon}_{KL}^{\{m\}(0)} + \hat{C}_{i3s3}^{\{m-1\}} \dot{\varepsilon}_{s3}^{\{m\}(0)}, \\
 \dot{\sigma}_{IJ}^{\{m\}(0)} &= \tilde{C}_{IJKL}^{\{m-1\}(0)} \dot{\varepsilon}_{KL}^{\{m\}(0)} + \hat{C}_{IJs3}^{\{m-1\}(0)} \dot{\varepsilon}_{s3}^{\{m\}(0)}, \\
 \dot{\varepsilon}_{IJ}^{\{m\}(0)} &= 0, \quad \dot{\varepsilon}_{I3}^{\{m\}(0)} = \frac{1}{2} \left(v_{3,I}^{\{m\}(0)} + v_{I/3}^{\{m\}(1)} \right), \quad \dot{\varepsilon}_{33}^{\{m\}(0)} = v_{3/3}^{\{m\}(1)}, \\
 \Sigma_{3\pm} : \dot{\sigma}_{i3}^{\{m\}(0)} &= 0, \quad \Sigma_S : \left[\dot{\sigma}_{i3}^{\{m\}(0)} \right] = 0, \quad \left[v_i^{\{m\}(1)} \right] = 0, \\
 \left\langle v_I^{\{m\}(1)} \right\rangle &= \bar{v}_I^{\{m\}}, \quad \left\langle v_3^{\{m\}(1)} \right\rangle = 0, \quad v_3^{\{m\}(0)} = \bar{v}_3^{\{m\}}.
 \end{aligned} \tag{22}$$

Задача (22) рассматривается относительно неизвестных функций $v_i^{\{m\}(1)}$, все остальные функции зависят от $v_i^{\{m\}(1)}$ или являются параметрами задачи.

Для k -го приближения получаем следующую постановку локальной задачи упруго-пластичности:

$$\begin{aligned}
 \dot{\sigma}_{i3/3}^{\{m\}(k)} + \dot{\sigma}_{IJ,J}^{\{m\}(k-1)} &= w_i^{\{m\}(k-1)}, \\
 \dot{\sigma}_{IJ}^{\{m\}(k)} &= \tilde{C}_{IJKL}^{\{m-1\}(0)} \dot{\varepsilon}_{KL}^{\{m\}(k)} + \hat{C}_{IJs3}^{\{m-1\}(0)} \dot{\varepsilon}_{s3}^{\{m\}(k)} + \Delta \dot{\sigma}_{IJ}^{\{m\}(k)}, \\
 \dot{\sigma}_{i3}^{\{m\}(k)} &= \tilde{C}_{i3KL}^{\{m-1\}(0)} \dot{\varepsilon}_{KL}^{\{m\}(k)} + \hat{C}_{i3s3}^{\{m-1\}(0)} \dot{\varepsilon}_{s3}^{\{m\}(k)} + \Delta \dot{\sigma}_{i3}^{\{m\}(k)}, \\
 \dot{\varepsilon}_{IJ}^{\{m\}(k)} &= \frac{1}{2} \left(v_{I,J}^{\{m\}(k)} + v_{J,I}^{\{m\}(k)} \right), \quad \dot{\varepsilon}_{I3}^{\{m\}(k)} = \frac{1}{2} \left(v_{3,I}^{\{m\}(k)} + v_{I/3}^{\{m\}(k+1)} \right), \\
 \dot{\varepsilon}_{33}^{\{m\}(k)} &= v_{3/3}^{\{m\}(k+1)}, \\
 \Sigma_{3\pm} : \dot{\sigma}_{i3}^{\{m\}(k)} &= 0, \quad \Sigma_S : \left[\dot{\sigma}_{i3}^{\{m\}(k)} \right] = 0, \quad \left[v_i^{\{m\}(k+1)} \right] = 0, \quad \left\langle v_i^{\{m\}(k+1)} \right\rangle = 0, \\
 k &= 1, 2, \dots, \quad m = 0, 1, 2, \dots
 \end{aligned} \tag{23}$$

Задача (23) рассматривается относительно неизвестной функции $v_i^{\{m\}(k+1)}$, все остальные функции зависят от $v_i^{\{m\}(k+1)}$ или являются параметрами задачи.

Уравнения равновесия в системе (21) после введения функций $w_i^{(n)}$, принимают вид:

$$w_i^{\{m\}(0)} + \kappa w_i^{\{m\}(1)} + \kappa^2 w_i^{\{m\}(2)} + \dots = 0. \tag{24}$$

Решение локальной задачи упруго-пластичности нулевого приближения. Рассмотрим локальную задачу упруго-пластичности нулевого приближения (22). Решение уравнений равновесия в этой задаче с граничными условиями на внешних поверхностях $\Sigma_{3\pm}$ имеет вид:

$$\dot{\sigma}_{i3}^{\{m\}(0)} = 0, \quad \forall \xi : -0,5 < \xi < 0,5. \tag{25}$$

Подставляя в это уравнение вторую группу соотношений системы (22) для компонент скоростей напряжения $\dot{\sigma}_{i3}^{\{m\}(0)}$, получим

$$\tilde{C}_{i3KL}^{\{m-1\}(0)} \dot{\varepsilon}_{KL}^{\{m\}(0)} + \hat{C}_{i3s3}^{\{m-1\}} \dot{\varepsilon}_{s3}^{\{m\}(0)} = 0. \quad (26)$$

Отсюда выражаем скорость деформаций $\dot{\varepsilon}_{s3}^{\{m\}(0)}$

$$\dot{\varepsilon}_{s3}^{\{m\}(0)} = -Z_{sKL}^{\{m-1\}(0)} \dot{\varepsilon}_{KL}^{\{m\}(0)}, \quad Z_{sKL}^{\{m-1\}(0)} = \hat{C}_{s3i3}^{\{m-1\}(0)-1} \tilde{C}_{i3KL}^{\{m-1\}(0)}, \quad (27)$$

где $\hat{C}_{s3i3}^{\{m-1\}(0)-1}$ матрица, обратная к $\hat{C}_{s3i3}^{\{m-1\}(0)}$.

Так как согласно (22) $\dot{\varepsilon}_{IJ}^{\{m\}(0)} = 0$, то из (27) и (22) следует, что

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{\{m\}(0)} = 0, \quad \dot{\sigma}_{ij}^{\{m\}(0)} = 0. \quad (28)$$

Подставляя выражения (27) в уравнения (22) для компонент скоростей $v_i^{\{m\}(1)}$, находим

$$v_I^{\{m\}(1)} = -\xi v_{3,I}^{\{m\}(0)} + \bar{v}_I^{\{m\}}, \quad v_3^{\{m\}(1)} = 0. \quad (29)$$

Решение локальных задач упруго-пластичности для высших приближений. Рассмотрим локальные задачи (23) для k -ого приближения. Решение уравнений равновесия с граничными условиями в этих задачах имеет следующий вид:

$$\dot{\sigma}_{i3}^{\{m\}(k)} = -\dot{p}_- \delta_{i3} \delta^{k3} - \int_{-0,5}^{\xi} \dot{\sigma}_{iJ,J}^{\{m\}(k-1)} d\xi + w_i^{\{m\}(k-1)}(\xi + 0,5), \quad (30)$$

$$k = 1, 2, \dots, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Граничные условия $\dot{\sigma}_{i3}^{\{m\}(k)} = -\dot{p}_- \delta_{i3} \delta^{k3}$ на Σ_{3-} удовлетворяются автоматически выражением (30). Из граничного условия на Σ_{3+} находим функции $w_i^{\{m\}(k-1)}$:

$$w_i^{\{m\}(k-1)} = \left\langle \dot{\sigma}_{iJ,J}^{\{m\}(k-1)} \right\rangle - \Delta \dot{p} \delta_{i3} \delta^{k3}, \quad \Delta \dot{p} = \dot{p}_+ - \dot{p}_-, \quad k = 1, 2, \dots \quad (31)$$

Подставляя (31) в (30), получаем рекуррентную формулу для скоростей сдвиговых напряжений

$$\dot{\sigma}_{i3}^{\{m\}(k)} = -(\dot{p}_- + \Delta \dot{p}(\xi + 0.5)) \delta_{i3} \delta^{k3} - \left\{ \dot{\sigma}_{iJ,J}^{\{m\}(k-1)} \right\}_{\xi}, \quad (32)$$

$$k = 1, 2, \dots, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Здесь введены интегральные операторы [20]:

$$\begin{aligned} \langle f(\xi) \rangle_{\xi} &= \int_{-0.5}^{\xi} f(\tilde{\xi}) d\tilde{\xi} - \left\langle \int_{-0.5}^{\xi} f(\tilde{\xi}) d\tilde{\xi} \right\rangle, \\ \{ f(\xi) \}_{\xi} &= \int_{-0.5}^{\xi} (f(\tilde{\xi}) - \langle f(\tilde{\xi}) \rangle) d\tilde{\xi}. \end{aligned} \quad (33)$$

В частности, для $k = 1, 2$ и 3 из формулы (32) с учетом (28) получаем:

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}_{ij}^{\{m\}(0)} &= 0, \quad \dot{\sigma}_{I3}^{\{m\}(1)} = 0, \quad \dot{\sigma}_{33}^{\{m\}(1)} = 0, \\ \dot{\sigma}_{I3}^{\{m\}(2)} &= -\left\{\dot{\sigma}_{IJ,J}^{\{m\}(1)}\right\}_{\xi}, \quad \dot{\sigma}_{33}^{\{m\}(2)} = 0, \\ \dot{\sigma}_{33}^{\{m\}(3)} &= -\dot{p}_- - \Delta \dot{p}(\xi + 0.5) + \left\{\left\{\dot{\sigma}_{IJ,IJ}^{\{m\}(1)}\right\}_{\xi}\right\}_{\xi}.\end{aligned}\quad (34)$$

Для получения окончательного вида этих формул необходимо найти выражение для $\dot{\sigma}_{IJ}^{\{m\}(1)}$. Осуществим этот вывод в несколько шагов.

Найдем вначале выражение для $\dot{\varepsilon}_{KL}^{\{m\}(1)}$, используя для этой цели кинематические соотношения из системы (23) при $k = 1$. Подставляя в это уравнение формулу (29) для скоростей $v_I^{\{m\}(1)}$, получаем

$$\dot{\varepsilon}_{IJ}^{\{m\}(1)} = -\xi v_{3,IJ}^{\{m\}(0)} + \dot{\varepsilon}_{IJ}^{\{m\}}. \quad (35)$$

где введены обозначения для осредненных скоростей деформации $\dot{\varepsilon}_{KL}^{\{m\}}$

$$\dot{\varepsilon}_{IJ}^{\{m\}} = \frac{1}{2}(\bar{v}_{I,J}^{\{m\}} + \bar{v}_{J,I}^{\{m\}}). \quad (36)$$

Найдем выражение для $\dot{\varepsilon}_{s3}^{\{m\}(1)}$. Для этой цели рассмотрим третью группу определяющих соотношений из (23) и примем во внимание, что $\dot{\sigma}_{I3}^{\{m\}(1)} = 0$ согласно (34)

$$\tilde{C}_{i3KL}^{\{m-1\}(0)} \dot{\varepsilon}_{KL}^{\{m\}(1)} + \hat{C}_{i3s3}^{\{m-1\}(0)} \dot{\varepsilon}_{s3}^{\{m\}(1)} + \Delta \dot{\sigma}_{i3}^{\{m\}(1)} = 0. \quad (37)$$

Согласно формуле (18) для $\Delta \dot{\sigma}_{i3}^{\{m\}(1)}$ имеем следующее выражение:

$$\Delta \dot{\sigma}_{i3}^{\{m\}(1)} = \tilde{C}_{i3KL}^{\{m-1\}(1)} \dot{\varepsilon}_{KL}^{\{m\}(0)} + \hat{C}_{i3s3}^{\{m-1\}(1)} \dot{\varepsilon}_{s3}^{\{m\}(0)} = 0. \quad (38)$$

Подставим (38) в (37) и выразим из этого уравнения $\dot{\varepsilon}_{s3}^{\{m\}(1)}$:

$$\dot{\varepsilon}_{s3}^{\{m\}(1)} = -Z_{sKL}^{\{m-1\}(0)} \dot{\varepsilon}_{KL}^{\{m\}(1)}. \quad (39)$$

Подставим в формулу (39) вместо $\dot{\varepsilon}_{KL}^{\{m\}(1)}$ выражение (35), тогда получим

$$\dot{\varepsilon}_{s3}^{\{m\}(1)} = Z_{sKL}^{\{m-1\}(0)} (\xi v_{3,KL}^{\{m\}(0)} - \dot{\varepsilon}_{KL}^{\{m\}}). \quad (40)$$

Найдем выражение для $\dot{\sigma}_{IJ}^{\{m\}(1)}$. Воспользуемся для этого второй группой соотношений системы (23) при $k = 1$

$$\dot{\sigma}_{IJ}^{\{m\}(1)} = \tilde{C}_{IJKL}^{\{m-1\}(0)} \dot{\varepsilon}_{KL}^{\{m\}(1)} + \hat{C}_{IJs3}^{\{m-1\}(0)} \dot{\varepsilon}_{s3}^{\{m\}(1)} + \Delta \dot{\sigma}_{IJ}^{\{m\}(1)}. \quad (41)$$

Выражение для $\Delta \dot{\sigma}_{IJ}^{\{m\}(1)}$ находим из (18)

$$\Delta \dot{\sigma}_{IJ}^{\{m\}(1)} = \tilde{C}_{IJKL}^{\{m-1\}(1)} \dot{\varepsilon}_{KL}^{\{m\}(0)} + \hat{C}_{IJs3}^{\{m-1\}(1)} \dot{\varepsilon}_{s3}^{\{m\}(0)} = 0. \quad (42)$$

Подставим выражение (42) для $\Delta \dot{\sigma}_{IJ}^{\{m\}(1)}$, выражение (40) для $\dot{\varepsilon}_{s3}^{\{m\}(1)}$ и выражение (35) для $\dot{\varepsilon}_{IJ}^{\{m\}(1)}$ в формулу (41) и приведем подобные в получившемся уравнении, в результате получим:

$$\dot{\sigma}_{IJ}^{\{m\}(1)} = -\tilde{C}_{IJKL}^{\{m-1\}(0)} (\xi v_{3,KL}^{\{m\}(0)} - \dot{\varepsilon}_{KL}^{\{m\}}), \quad (43)$$

где обозначены компоненты тензора касательных модулей упругости

$$\tilde{C}_{IJKL}^{\{m-1\}(0)} = \tilde{C}_{IJKL}^{\{m-1\}(0)} - \hat{C}_{IJs3}^{\{m-1\}(0)} \hat{C}_{s3i3}^{\{m-1\}(0)-1} \tilde{C}_{i3KL}^{\{m-1\}(0)}. \quad (44)$$

Формула (43) является искомым выражением для $\dot{\sigma}_{IJ}^{\{m\}(1)}$ через скорости деформации $\dot{\varepsilon}_{KL}^{\{m\}}$ и $v_{3,KL}^{\{m\}(0)}$.

Подставляя (43) в (34), находим выражения для скоростей касательных и поперечных напряжений высших приближений с точностью до 2 и 3 приближения, соответственно. Тогда итоговые формулы (34) и (43) для скоростей напряжений принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{ij}^{\{m\}(0)} &= 0, \quad \dot{\sigma}_{I3}^{\{m\}(1)} = 0, \quad \dot{\sigma}_{33}^{\{m\}(1)} = 0, \\ \dot{\sigma}_{IJ}^{\{m\}(1)} &= -\tilde{C}_{IJKL}^{\{m-1\}(0)} (\xi v_{3,KL}^{\{m\}(0)} - \dot{\varepsilon}_{KL}^{\{m\}}), \quad \dot{\sigma}_{33}^{\{m\}(2)} = 0, \\ \dot{\sigma}_{I3}^{\{m\}(2)} &= \left(\left\{ \xi \tilde{C}_{IJKL}^{\{m-1\}(0)} \right\}_{\xi} v_{3,KL}^{\{m\}(0)} - \left\{ \tilde{C}_{IJKL}^{\{m-1\}(0)} \right\}_{\xi} \dot{\varepsilon}_{KL}^{\{m\}} \right)_{,L}, \\ \dot{\sigma}_{33}^{\{m\}(3)} &= -\dot{p}_- - \Delta \dot{p} (\xi + 0.5) - \\ &- \left(\left\{ \left\{ \xi \tilde{C}_{IJKL}^{\{m-1\}(0)} \right\}_{\xi} v_{3,KL}^{\{m\}(0)} - \left\{ \tilde{C}_{IJKL}^{\{m-1\}(0)} \right\}_{\xi} \dot{\varepsilon}_{KL}^{\{m\}} \right)_{,IJ} \right). \end{aligned} \quad (45)$$

Соотношения для пластических деформаций и параметров упрочнения для различных приближений в асимптотических разложениях. Установим теперь вид определяющих соотношений для пластических деформаций $\varepsilon_{kl}^{p\{m\}(k)}$, параметров упрочнения $h_{ij}^{\{m\}(k)}$ и параметра нагружения $\lambda^{\{m\}(k)}$ для всех приближений. Для этого подставим асимптотические разложения (13) для этих функций в определяющие соотношения системы (3) и соберем члены при одинаковых степенях k . Тогда получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
 \dot{\varepsilon}_{ij}^{p\{m\}(k)} &= Y_{ijKL}^{\{m-1\}(0)} \dot{\varepsilon}_{KL}^{\{m\}(k)} + \hat{Y}_{ijs3}^{\{m-1\}(0)} \dot{\varepsilon}_{s3}^{\{m\}(k)} + \Delta \dot{\varepsilon}_{ij}^{p\{m\}(k)}, \\
 \dot{\lambda}^{\{m\}(k)} &= A_{KL}^{\varepsilon\{m-1\}(0)} \dot{\varepsilon}_{KL}^{\{m\}(k)} + \hat{A}_{s3}^{\varepsilon\{m-1\}(0)} \dot{\varepsilon}_{s3}^{\{m\}(k)} + \Delta \dot{\lambda}^{\{m\}(k)}, \\
 \dot{h}_{ij}^{p\{m\}(k)} &= \Phi_{ij}^{h\{m-1\}(k)} - \Phi^{h\{m-1\}(0)} h_{ij}^{\{m\}(k)} + \Delta \dot{h}_{ij}^{p\{m\}(k)}, \\
 k &= 0, 1, 2, \dots, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \\
 k = -1: \quad &\Phi_{ij}^{h\{m-1\}(-1)} - \Phi^{h\{m-1\}(-1)} h_{ij}^{\{m\}(0)} = 0, \\
 \dot{e}_u^{p\{m\}(0)} &= I_2(\dot{\varepsilon}_{ij}^{p\{m-1\}(0)}), \\
 \dot{e}_u^{p\{m\}(1)} &= \dot{\varepsilon}_{ij}^{p\{m-1\}(1)} \frac{\partial}{\partial \dot{\varepsilon}_{ij}^{p\{m-1\}(0)}} I_2(\dot{\varepsilon}_{ij}^{p\{m-1\}(0)}) \quad \text{и} \quad m. \partial.
 \end{aligned} \tag{46}$$

где введены обозначения

$$\hat{Y}_{ijs3}^{\{m-1\}(0)} = \begin{cases} 2Y_{ijs3}^{\{m-1\}(0)}, s=1, 2 \\ Y_{ij33}^{\{m-1\}(0)}, s=3 \end{cases}, \quad \hat{A}_{ijs3}^{\varepsilon\{m-1\}(0)} = \begin{cases} 2A_{ijs3}^{\varepsilon\{m-1\}(0)}, s=1, 2 \\ A_{ij33}^{\varepsilon\{m-1\}(0)}, s=3 \end{cases}. \tag{47}$$

Приращения $\Delta \dot{\varepsilon}_{ij}^{p\{m\}(1)}$, $\Delta \dot{\lambda}^{\{m\}(1)}$, $\Delta \dot{h}_{ij}^{p\{m\}(1)}$ вычисляются аналогично формуле (18):

$$\begin{aligned}
 \Delta \dot{\varepsilon}_{ij}^{p\{m\}(1)} &= \sum_{k'=0}^{k-1} (Y_{ijKL}^{\{m-1\}(k-k')} \dot{\varepsilon}_{KL}^{\{m\}(k')} + \hat{Y}_{ijs3}^{\{m-1\}(k-k')} \dot{\varepsilon}_{s3}^{\{m\}(k')}), \\
 \Delta \dot{\lambda}^{\{m\}(k)} &= \sum_{k'=0}^{k-1} (A_{KL}^{\varepsilon\{m-1\}(k-k')} \dot{\varepsilon}_{KL}^{\{m\}(k')} + \hat{A}_{s3}^{\varepsilon\{m-1\}(k-k')} \dot{\varepsilon}_{s3}^{\{m\}(k')}), \\
 \Delta \dot{h}_{ij}^{p\{m-1\}(k)} &= - \sum_{k'=0}^{k-1} \Phi^{h\{m-1\}(k-k')} h_{ij}^{\{m\}(k')}.
 \end{aligned} \tag{48}$$

Так как тензоры $\Pi = \{Y_{klij}, A_{ij}^{\varepsilon}, \Phi_{ij}^h, \Phi^h\}$, характеризующие упруго-пластические свойства, зависят от неизвестных тензорных функций $\Omega = \{\sigma_{ij}, \varepsilon_{kl}^p, e_u^p, h_{ij}, \dot{\lambda}\}$ на предыдущем шаге итерации $(m-1)$, то для них также имеют место асимптотические разложения (13),

$$\begin{aligned}
 \Pi^{\{m\}} &= \Pi^{\{m\}(0)} + \kappa \Pi^{\{m\}(1)} + \kappa^2 \Pi^{\{m\}(2)} + \dots, \\
 \Pi &= \{Y_{klij}, A_{ij}^{\varepsilon}, \Phi_{ij}^h, \Phi^h\}.
 \end{aligned} \tag{49}$$

которые учтены при формировании соотношений (46), (48).

Запишем выражения для членов разложения $\Pi^{\{m\}(k)}$ в явном виде, для этой цели сначала найдем асимптотические разложения для всех функций $\Gamma^{\{m\}}$, с помощью которых образованы функции $\Pi = \{Y_{klij}, A_{ij}^{\varepsilon}, \Phi_{ij}^h, \Phi^h\}$:

$$\Gamma^{\{m\}} = \Gamma^{\{m\}(0)} + \kappa \Gamma^{\{m\}(1)} + \kappa^2 \Gamma^{\{m\}(2)} + \dots, \quad (50)$$

$$\Gamma = \{a_{ij}, A_{ij}, B_{ij}, A_u, A_f, B_f, \Phi_1, f_e, C_e, \bar{\Phi}_1, \bar{A}_{ij}, \bar{Q}_{ijsl}\}.$$

Для того чтобы найти все члены разложения $\Gamma^{\{m\}(k)}$ необходимо подставить разложения (13) в формулы (4) и (5). Примем во внимание, что в силу (28) напряжения упрочнения и пластические деформации в нулевом приближении являются нулевыми, тогда

$$h_{ij}^{\{m\}(0)} = 0, \quad \varepsilon_{ij}^{p\{m\}(0)} = 0, \quad e_u^{p\{m\}(0)} = 0. \quad (51)$$

С учетом (51) получаем из (4), (5), что нулевыми являются $a_{ij}^{\{m\}(0)}$, $B_{ij}^{\{m\}(0)}$ и $A_{ij}^{\{m\}(0)}$, т.к.

$$\begin{aligned} a_{ij}^{\{m\}(0)} &= \sigma_{ij}^{\{m\}(0)} - h_{ij}^{\{m\}(0)} = 0, \\ a_{ij}^{(k)} &= \sigma_{ij}^{(k)} - h_{ij}^{(k)}, \quad k = 1, 2, \dots, \\ B_{ij}^{\{m\}(0)} &= \frac{3}{2} p_{ij}(a^{\{m\}(0)})H = 0, \\ B_{ij}^{\{m\}(k)} &= \frac{3}{2} p_{ij}(a^{\{m\}(k)})H, \\ A_{ij}^{\{m\}(0)} &= \frac{3}{2} p_{ij}(a^{\{m\}(0)}) = 0, \\ A_{ij}^{\{m\}(k)} &= \frac{3}{2} p_{ij}(a^{\{m\}(k)}) + A_f^{\{m\}(k-1)} \delta_{ij}, \quad k = 1, 2, \dots, \\ A_u^{\{m\}(0)} &= 0, \quad A_u^{\{m\}(1)} = \sqrt{A_{ij}^{\{m\}(1)} A_{ij}^{\{m\}(1)}}, \quad A_u^{(2)} = \frac{1}{A_u^{(1)}} A_{ij}^{(1)} A_{ij}^{(2)} \quad \text{и т.д.}, \\ \Phi_1^{\{m\}(0)} &= A_{ij}^{\{m\}(0)} B_{ij}^{\{m\}(0)} = 0, \\ \Phi_1^{\{m\}(1)} &= A_{ij}^{\{m\}(0)} B_{ij}^{\{m\}(1)} + A_{ij}^{\{m\}(1)} B_{ij}^{\{m\}(0)} = 0, \\ \Phi_1^{\{m\}(2)} &= A_{ij}^{\{m\}(1)} B_{ij}^{\{m\}(1)} \quad \text{и т.д.} \end{aligned} \quad (52)$$

Первые члены в асимптотических разложениях пределов текучести, согласно (5), (12) и (13) имеют вид:

$$\sigma_{yR}^{\{m\}(0)} = 0, \quad \sigma_{yR}^{\{m\}(1)} = \sigma_{yR}^{0(1)} + (\sigma_{yR}^{1(1)} - \sigma_{yR}^{0(1)})(1 - \exp(-\beta_{pR}^{(-1)} e_u^{p\{m\}(1)})), \quad (53)$$

поэтому имеем:

$$\begin{aligned} A_f^{\{m\}(0)} &= 0, \quad A_f^{\{m\}(1)} = \frac{(\sigma_{yC}^{\{m\}(1)})^2 - (\sigma_{yT}^{\{m\}(1)})^2}{2(\sigma_{yC}^{\{m\}(1)} + \sigma_{yT}^{\{m\}(1)})}, \\ B_f^{\{m\}(0)} &= B_f^{\{m\}(1)} = 0, \quad B_f^{\{m\}(2)} = ((\sigma_{yC}^{\{m\}(1)})^2 + (\sigma_{yT}^{\{m\}(1)})^2) / 4. \end{aligned} \quad (54)$$

а функция f_e (5) имеет следующие первые члены разложения:

$$f_e^{\{m\}(0)} = 0, \quad f_e^{\{m\}(1)} = -\frac{\partial A_f^{\{m\}(1)}}{\partial e_u^{p\{m\}(1)}} I_1(\sigma^{\{m\}(1)}) + \frac{\partial B_f^{\{m\}(2)}}{\partial e_u^{p\{m\}(1)}}. \quad (55)$$

Тогда находим первые члены разложения для функции C_e в (5):

$$\begin{aligned} C_e^{\{m\}(-1)} &= \frac{3}{2} p_{ij}(a^{\{m\}(0)})(H_2^{(-1)} \varepsilon_{ij}^{p\{m\}(0)} - H_1^{(-1)} h_{ij}^{\{m\}(0)}) = 0, \\ C_e^{\{m\}(0)} &= \frac{3}{2} p_{ij}(a^{\{m\}(1)})(H_2^{(-1)} \varepsilon_{ij}^{p\{m\}(0)} - H_1^{(-1)} h_{ij}^{\{m\}(0)}) + \\ &+ \frac{3}{2} p_{ij}(a^{\{m\}(0)})(H_2^{(-1)} \varepsilon_{ij}^{p\{m\}(1)} - H_1^{(-1)} h_{ij}^{\{m\}(1)}) + f_e^{\{m\}(0)} = 0, \\ C_e^{\{m\}(1)} &= \frac{3}{2} p_{ij}(a^{\{m\}(1)})(H_2^{(-1)} \varepsilon_{ij}^{p\{m\}(1)} - H_1^{(-1)} h_{ij}^{\{m\}(1)}) + f_e^{\{m\}(1)}. \end{aligned} \quad (56)$$

Для функции $\bar{\Phi}_1$ в (5) имеем следующие первые члены разложения

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_1^{\{m\}(-1)} &= \gamma C_e^{\{m\}(-1)} A_u^{\{m\}(0)} = 0, \\ \bar{\Phi}_1^{\{m\}(0)} &= \Phi_1^{\{m\}(0)} + \gamma C_e^{\{m\}(-1)} A_u^{\{m\}(1)} + \gamma C_e^{\{m\}(0)} A_u^{\{m\}(0)} = 0, \\ \bar{\Phi}_1^{\{m\}(1)} &= \Phi_1^{\{m\}(1)} + \gamma C_e^{\{m\}(-1)} A_u^{\{m\}(2)} + \gamma C_e^{\{m\}(0)} A_u^{\{m\}(1)} + \gamma C_e^{\{m\}(1)} A_u^{\{m\}(0)} = 0, \\ \bar{\Phi}_1^{\{m\}(2)} &= \Phi_1^{\{m\}(2)} + \gamma C_e^{\{m\}(1)} A_u^{\{m\}(1)}, \quad \gamma = \text{sign}(\dot{\lambda}^{\{m\}(0)}). \end{aligned} \quad (57)$$

Так как

$$\begin{aligned} \bar{A}_{ij}^{\{m\}} &= \frac{A_{ij}^{\{m\}}}{\bar{\Phi}_1^{\{m\}}} = \frac{\kappa A_{ij}^{\{m\}(1)} + \kappa^2 A_{ij}^{\{m\}(2)} + \dots}{\kappa^2 \bar{\Phi}_1^{\{m\}(2)} + \kappa^3 \bar{\Phi}_1^{\{m\}(3)} + \dots} = \\ &= \kappa^{-1} \bar{A}_{ij}^{\{m\}(-1)} + A_{ij}^{\{m\}(0)} + \kappa A_{ij}^{\{m\}(1)} + \dots, \end{aligned} \quad (58)$$

то для $\bar{A}_{ij}^{\{m\}}$ получаем следующие члены в асимптотическом разложении:

$$\begin{aligned} \bar{A}_{ij}^{\{m\}(-1)} &= \frac{A_{ij}^{\{m\}(1)}}{\bar{\Phi}_1^{\{m\}(2)}}, \\ \bar{A}_{ij}^{\{m\}(0)} &= \frac{1}{(\bar{\Phi}_1^{\{m\}(2)})^2} (A_{ij}^{\{m\}(2)} \bar{\Phi}_1^{\{m\}(2)} - A_{ij}^{\{m\}(1)} \bar{\Phi}_1^{\{m\}(3)}) \end{aligned} \quad (59)$$

и т.д.

Из формул (59) и (13) получаем выражение для членов в асимптотическом разложении тензора A_{kl}^ε :

$$\begin{aligned} A_{kl}^{\varepsilon\{m\}(-1)} &= \chi \bar{A}_{ij}^{\{m\}(-1)} \tilde{C}_{ijkl}^{(0)}, \\ A_{kl}^{\varepsilon\{m\}(0)} &= \chi \bar{A}_{ij}^{\{m\}(0)} \tilde{C}_{ijkl}^{\{m\}(0)} + \chi \bar{A}_{ij}^{\{m\}(-1)} \tilde{C}_{ijkl}^{\{m\}(1)} \quad \text{и т.д.} \end{aligned} \quad (60)$$

Подставляя асимптотические разложения (60) для $A_{kl}^{\varepsilon\{m\}}$ и (13) для $\dot{\lambda}^{\{m\}}$ и $\dot{\varepsilon}_{ij}^{\{m\}}$ в определяющее соотношения системы (3) для $\dot{\lambda}^{\{m\}}$, и принимая во внимание (28), получаем, что член $\dot{\lambda}^{\{m\}(-1)}$ равен нулю

$$\dot{\lambda}^{\{m\}(-1)} = A_{KL}^{\varepsilon\{m-1\}(-1)} \dot{\varepsilon}_{KL}^{\{m\}(0)} + \hat{A}_{s3}^{\varepsilon\{m-1\}(-1)} \dot{\varepsilon}_{s3}^{\{m\}(0)} = 0. \quad (61)$$

Формулы для $\dot{\lambda}^{\{m\}(k)}$ более высоких приближений, действительно, имеют вид (46), причем первые члены в явном виде выражаются так:

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}^{\{m\}(0)} &= A_{KL}^{\varepsilon\{m-1\}(-1)} \dot{\varepsilon}_{KL}^{\{m\}(1)} + \hat{A}_{s3}^{\varepsilon\{m-1\}(-1)} \dot{\varepsilon}_{s3}^{\{m\}(1)}, \\ \dot{\lambda}^{\{m\}(1)} &= A_{KL}^{\varepsilon\{m-1\}(-1)} \dot{\varepsilon}_{KL}^{\{m\}(2)} + A_{KL}^{\varepsilon\{m-1\}(0)} \dot{\varepsilon}_{KL}^{\{m\}(1)} + \\ &+ \hat{A}_{s3}^{\varepsilon\{m-1\}(-1)} \dot{\varepsilon}_{s3}^{\{m\}(2)} + \hat{A}_{s3}^{\varepsilon\{m-1\}(0)} \dot{\varepsilon}_{s3}^{\{m\}(1)}. \end{aligned} \quad (62)$$

Подставляя выражения разложения (13) для $\dot{\lambda}^{\{m\}}$, $\varepsilon_{ij}^{p\{m\}}$ и (50) для $A_u^{\{m\}}$ в определяющие соотношения (4), с учетом (12), действительно приходим к разложениям (49) для Φ_{ij}^h , Φ^h , в которых первые члены имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \Phi_{ij}^{h\{m\}(-1)} &= \dot{\lambda}^{\{m\}(0)} H_2^{(-1)} \varepsilon_{ij}^{p\{m\}(0)} \gamma A_u^{\{m\}(0)} = 0, \\ \Phi_{ij}^{h\{m\}(0)} &= \dot{\lambda}^{\{m\}(0)} (A_{ij}^{\{m\}(0)} H + H_2^{(-1)} \gamma (\varepsilon_{ij}^{p\{m\}(0)} A_u^{\{m\}(1)} + \varepsilon_{ij}^{p\{m\}(1)} A_u^{\{m\}(0)})) + \\ &+ \dot{\lambda}^{\{m\}(1)} H_2^{(-1)} \varepsilon_{ij}^{p\{m\}(0)} \gamma A_u^{\{m\}(0)} = 0, \\ \Phi_{ij}^{h\{m\}(1)} &= \dot{\lambda}^{\{m\}(0)} (A_{ij}^{\{m\}(1)} H + H_2^{(-1)} \gamma \varepsilon_{ij}^{p\{m\}(1)} A_u^{\{m\}(1)}), \\ \Phi^{h\{m\}(-1)} &= \dot{\lambda}^{\{m\}(0)} H_1^{(-1)} \gamma A_u^{\{m\}(0)} = 0, \\ \Phi^{h\{m\}(0)} &= \gamma \dot{\lambda}^{\{m\}(0)} H_1^{(-1)} A_u^{\{m\}(1)}, \\ \Phi^{h\{m\}(1)} &= \gamma H_1^{(-1)} (\dot{\lambda}^{\{m\}(0)} A_u^{\{m\}(2)} + \dot{\lambda}^{\{m\}(1)} A_u^{\{m\}(1)}). \end{aligned} \quad (63)$$

Подставляя разложения (50) для $A_{ij}^{\{m\}}$ и $\bar{A}_{ij}^{\{m\}}$ в формулы (4), приходим к асимптотическому разложению (50) для тензора $Q_{ijsl}^{\{m\}}$, в котором:

$$\begin{aligned} Q_{ijsl}^{\{m\}(-1)} &= A_{ij}^{\{m\}(0)} \bar{A}_{sl}^{\{m\}(-1)} = 0, \\ Q_{ijsl}^{\{m\}(0)} &= A_{ij}^{\{m\}(1)} \bar{A}_{sl}^{\{m\}(-1)}, \\ Q_{ijsl}^{\{m\}(1)} &= A_{ij}^{\{m\}(2)} \bar{A}_{sl}^{\{m\}(-1)} + A_{ij}^{\{m\}(1)} \bar{A}_{sl}^{\{m\}(0)} \quad \text{и т.д.} \end{aligned} \quad (64)$$

С учетом разложения (49) и выражений (4), получаем формулы для тензоров-коэффициентов разложений $Y_{ijpl}^{\{m\}(k)}$ и $\tilde{C}_{mpsl}^{\{m\}(k)}$:

$$\begin{aligned} Y_{ijpn}^{\{m\}(k)} &= \chi \sum_{k'=0}^k Q_{ijsl}^{\{m\}(k-k')} \tilde{C}_{slpn}^{\{m\}(k')}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \\ T_{ijpn}^{\{m\}(0)} &= \Delta_{ijpn} + \chi C_{ijsl} Q_{slpn}^{\{m\}(0)}, \\ T_{ijpn}^{\{m\}(k)} &= \chi C_{ijsl} Q_{slpn}^{\{m\}(k)}, \quad k = 1, 2, \dots, \\ \tilde{C}_{mpsl}^{\{m\}(k)} &= T_{mpij}^{\{m\}(k)-1} C_{ijsl}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (65)$$

Установим теперь уравнения для скоростей пластических деформаций $\dot{\varepsilon}_{ij}^{p\{m\}(1)}$, напряжений упрочнения $\dot{h}_{ij}^{p\{m\}(1)}$ и параметра нагружения $\dot{\lambda}^{\{m\}(0)}$ в главном приближении. Из уравнений (46), (48) и (62) получаем:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{ij}^{p\{m\}(1)} &= Y_{ijKL}^{\{m-1\}(0)} \dot{\varepsilon}_{KL}^{\{m\}(1)} + \hat{Y}_{ijs3}^{\{m-1\}(0)} \dot{\varepsilon}_{s3}^{\{m\}(1)}, \\ \dot{\lambda}^{\{m\}(0)} &= A_{KL}^{\varepsilon\{m-1\}(-1)} \dot{\varepsilon}_{KL}^{\{m\}(1)} + \hat{A}_{s3}^{\varepsilon\{m-1\}(-1)} \dot{\varepsilon}_{s3}^{\{m\}(1)}, \\ \dot{h}_{ij}^{p\{m\}(1)} &= \Phi_{ij}^{h\{m-1\}(1)} - \Phi^{h\{m-1\}(0)} h_{ij}^{\{m\}(1)}, \\ \dot{\varepsilon}_u^{p\{m\}(1)} &= I_2(\dot{\varepsilon}_{ij}^{p\{m-1\}(1)}) \end{aligned} \quad (66)$$

так как

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\varepsilon}_{ij}^{p\{m\}(1)} &= Y_{ijKL}^{\{m-1\}(1)} \dot{\varepsilon}_{KL}^{\{m\}(0)} + \hat{Y}_{ijs3}^{\{m-1\}(1)} \dot{\varepsilon}_{s3}^{\{m\}(0)} = 0, \\ \Delta \dot{h}_{ij}^{p\{m\}(1)} &= -\Phi^{h\{m-1\}(1)} h_{ij}^{\{m\}(0)} = 0. \end{aligned} \quad (67)$$

С учетом (35) и (40) формулы (66) преобразуются к следующему виду:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{ij}^{p\{m\}(1)} &= -\tilde{Y}_{ijKL}^{\{m-1\}(0)} (\xi v_{3,KL}^{\{m\}(0)} - \dot{\varepsilon}_{KL}^{\{m\}}), \\ \dot{h}_{ij}^{p\{m\}(1)} &= \Phi_{ij}^{h\{m-1\}(1)} - \Phi^{h\{m-1\}(0)} h_{ij}^{\{m\}(1)}, \\ \dot{\lambda}^{\{m\}(0)} &= -\tilde{A}_{KL}^{\varepsilon\{m-1\}(0)} (\xi v_{3,KL}^{\{m\}(0)} - \dot{\varepsilon}_{KL}^{\{m\}}), \\ \dot{\varepsilon}_u^{p\{m\}(1)} &= I_2(\dot{\varepsilon}_{ij}^{p\{m-1\}(1)}). \end{aligned} \quad (68)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_{ijKL}^{\{m-1\}(0)} &= Y_{ijKL}^{\{m-1\}(0)} - \hat{Y}_{ijs3}^{\{m-1\}(0)} Z_{sKL}^{\{m-1\}(0)}, \\ \tilde{A}_{KL}^{\varepsilon\{m-1\}(0)} &= A_{KL}^{\varepsilon\{m-1\}(0)} - \hat{A}_{s3}^{\varepsilon\{m-1\}(0)} Z_{sKL}^{\{m-1\}(0)}. \end{aligned} \quad (69)$$

Таким образом, итоговая система уравнений для вычисления пластических деформаций, напряжений упрочнения и параметра нагружения состоит из уравнений (68), тензорные и скалярные коэффициенты в которых вычисляются с помощью формул (52)-(65)

$$\begin{aligned}
 Y_{ijpn}^{\{m\}(0)} &= \chi Q_{ijsl}^{\{m\}(0)} \tilde{C}_{slpn}^{\{m\}(0)}, \quad T_{ijpn}^{\{m\}(0)} = \Delta_{ijpn} + \chi C_{ijsl} Q_{slpn}^{\{m\}(0)}, \\
 \tilde{C}_{mpsl}^{\{m\}(0)} &= T_{mpij}^{\{m\}(0)-1} C_{ijsl}, \quad Q_{ijsl}^{\{m\}(0)} = A_{ij}^{\{m\}(1)} \bar{A}_{sl}^{\{m\}(-1)}, \\
 \Phi_{ij}^{h\{m\}(1)} &= \dot{\lambda}^{\{m\}(0)} (A_{ij}^{\{m\}(1)} H + H_2^{(-1)} \gamma \varepsilon_{ij}^{p\{m\}(1)} A_u^{\{m\}(1)}), \\
 \Phi^{h\{m\}(0)} &= \gamma \dot{\lambda}^{\{m\}(0)} H_1^{(-1)} A_u^{\{m\}(1)}, \quad A_{kl}^{\varepsilon\{m\}(-1)} = \chi \bar{A}_{ij}^{\{m\}(-1)} \tilde{C}_{ijkl}^{(0)}, \\
 \bar{A}_{ij}^{\{m\}(-1)} &= A_{ij}^{\{m\}(1)} / \bar{\Phi}_1^{\{m\}(2)}, \quad \bar{\Phi}_1^{\{m\}(2)} = \Phi_1^{\{m\}(2)} + \gamma C_e^{\{m\}(1)} A_u^{\{m\}(1)}, \\
 \gamma &= \text{sign}(\dot{\lambda}^{\{m\}(0)}), \quad \Phi_1^{\{m\}(2)} = A_{ij}^{\{m\}(1)} B_{ij}^{\{m\}(1)}, \\
 C_e^{\{m\}(1)} &= \frac{3}{2} p_{ij} (a^{\{m\}(1)}) (H_2^{(-1)} \varepsilon_{ij}^{p\{m\}(1)} - H_1^{(-1)} h_{ij}^{\{m\}(1)}) + f_e^{\{m\}(1)}, \\
 \sigma_{yT,C}^{\{m\}(1)} &= \sigma_{yT,C}^{0(1)} + (\sigma_{yT,C}^{1(1)} - \sigma_{yT,C}^{0(1)}) (1 - \exp(-\beta_{pT,C}^{(-1)} e_u^{p\{m\}(1)})), \\
 A_{ij}^{\{m\}(1)} &= \frac{3}{2} p_{ij} (a^{\{m\}(1)}) + A_f^{\{m\}(0)} \delta_{ij}, \quad B_{ij}^{\{m\}(1)} = \frac{3}{2} p_{ij} (a^{\{m\}(1)}) H, \\
 a_{ij}^{(1)} &= \sigma_{ij}^{(1)} - h_{ij}^{(1)}, \quad A_u^{\{m\}(1)} = \sqrt{A_{ij}^{\{m\}(1)} A_{ij}^{\{m\}(1)}}.
 \end{aligned} \tag{70}$$

Осредненные уравнения для многослойной упруго-пластической пластины. Подставляя выражения (31) для функций $w_i^{\{m\}(k-1)}$ в асимптотическое разложение (21) уравнений равновесия пластины, получим

$$\langle \dot{\sigma}_{ij,J}^{\{m\}(0)} \rangle + \kappa \langle \dot{\sigma}_{ij,J}^{\{m\}(1)} \rangle + \kappa^2 (\langle \dot{\sigma}_{ij,J}^{\{m\}(2)} \rangle - \Delta \dot{p} \delta_{i3}) + \dots = 0. \tag{71}$$

Если умножить уравнения равновесия пластины в системе (21) на $\xi \kappa$, и после этого проинтегрировать их по толщине, то придем к следующему уравнению:

$$\kappa (\langle \dot{\sigma}_{ij,J}^{\{m\}(0)} \rangle + \langle \dot{\sigma}_{ij,J}^{\{m\}(1)} \rangle) + \kappa^2 (\langle \dot{\sigma}_{ij,J}^{\{m\}(2)} \rangle - \Delta \dot{p} \delta_{i3}) + \dots = 0. \tag{72}$$

Следуя [18], введем следующие обозначения для осредненных скоростей напряжений:

$$\begin{aligned}
 \dot{T}_{IJ}^{\{m\}} &= \langle \dot{\sigma}_{IJ}^{\{m\}(0)} \rangle + \kappa \langle \dot{\sigma}_{IJ}^{\{m\}(1)} \rangle + \kappa^2 \langle \dot{\sigma}_{IJ}^{\{m\}(2)} \rangle + \dots \\
 \dot{Q}_I^{\{m\}} &= \kappa \langle \dot{\sigma}_{I3}^{\{m\}(1)} \rangle + \kappa^2 \langle \dot{\sigma}_{I3}^{\{m\}(2)} \rangle + \dots \\
 \dot{M}_{IJ}^{\{m\}} &= \kappa \langle \xi \dot{\sigma}_{IJ}^{\{m\}(0)} \rangle + \kappa^2 \langle \xi \dot{\sigma}_{IJ}^{\{m\}(1)} \rangle + \kappa^3 \langle \xi \dot{\sigma}_{IJ}^{\{m\}(2)} \rangle + \dots
 \end{aligned} \tag{73}$$

где $T_{IJ}^{\{m\}}$ — усилия, $Q_I^{\{m\}}$ — перерезывающие силы и $M_{IJ}^{\{m\}}$ — моменты в пластине на m -итерации, точками сверху обозначены скорости изменения этих функций.

С помощью введенных обозначений (73) уравнения (70) и (71) можно записать в следующем виде:

$$\dot{T}_{IJ,J}^{\{m\}} = 0, \quad \dot{Q}_{I,I}^{\{m\}} = \kappa^2 \Delta \dot{p}^{\{m\}}, \quad \dot{M}_{IJ,J}^{\{m\}} - \dot{Q}_I^{\{m\}} = 0. \quad (74)$$

Выражения (73) с учетом формул (34) можно записать в виде:

$$\dot{T}_{IJ}^{\{m\}} = \kappa \dot{T}_{IJ}^{\{m\}(1)}, \quad \dot{Q}_I^{\{m\}} = \kappa^2 \dot{Q}_I^{\{m\}(2)}, \quad \dot{M}_{IJ}^{\{m\}} = \kappa^2 \dot{M}_{IJ}^{\{m\}(2)}, \quad (75)$$

где введены обозначения:

$$\begin{aligned} \dot{T}_{IJ}^{\{m\}(1)} &= \langle \dot{\sigma}_{IJ}^{\{m\}(1)} \rangle, \\ \dot{Q}_I^{\{m\}(2)} &= \langle \dot{\sigma}_{I3}^{\{m\}(2)} \rangle + \dots, \\ \dot{M}_{IJ}^{\{m\}(2)} &= \langle \xi \dot{\sigma}_{IJ}^{\{m\}(1)} \rangle. \end{aligned} \quad (76)$$

Для $\dot{T}_{IJ}^{\{m\}(1)}$ и $\dot{M}_{IJ}^{\{m\}(2)}$ удерживаем в этих соотношениях только главные члены разложений.

Подставляя (76) в (75), приводим эти уравнения к виду:

$$\begin{aligned} \dot{T}_{IJ,J}^{\{m\}(1)} &= 0, \\ \dot{Q}_{I,I}^{\{m\}(2)} &= \Delta \dot{p}^{\{m\}}, \\ \dot{M}_{IJ,J}^{\{m\}(2)} - \dot{Q}_I^{\{m\}(2)} &= 0. \end{aligned} \quad (77)$$

В результате получены искомые осредненные уравнения равновесия многослойной упруго-пластической пластины в скоростях.

Подставляя выражения (43) для компонент скоростей напряжений $\dot{\sigma}_{IJ}^{\{m\}(1)}$ в формулы (76), получаем осредненные соотношения:

$$\begin{aligned} \dot{T}_{IJ}^{\{m\}(1)} &= \bar{C}_{IJKL}^{\{m-1\}} \dot{\bar{\epsilon}}_{KL}^{\{m\}} + \bar{B}_{IJKL}^{\{m-1\}} \dot{\bar{\eta}}_{KL}^{\{m\}}, \\ \dot{M}_{IJ}^{\{m\}(2)} &= \bar{B}_{IJKL}^{(0)} \dot{\bar{\epsilon}}_{KL}^{\{m\}} + \bar{D}_{IJKL}^{\{m-1\}} \dot{\bar{\eta}}_{KL}^{\{m\}}, \end{aligned} \quad (78)$$

где введены обозначения для осредненных модулей (тензоров, характеризующих эффективные свойства многослойной пластины):

$$\bar{C}_{IJKL}^{\{m-1\}} = \langle \bar{C}_{IJKL}^{\{m-1\}(0)} \rangle, \quad \bar{B}_{IJKL}^{\{m-1\}} = \langle \xi \bar{C}_{IJKL}^{\{m-1\}(0)} \rangle, \quad \bar{D}_{IJKL}^{\{m-1\}} = \langle \xi^2 \bar{C}_{IJKL}^{\{m-1\}(0)} \rangle, \quad (79)$$

а также введено обозначение для тензора скоростей искривления пластины

$$\dot{\bar{\eta}}_{KL}^{\{m\}} = -\dot{\bar{v}}_{3,KL}^{\{m\}}. \quad (80)$$

Здесь учтено, что в силу (14), (19) и (22) $v_i^{\{m\}(0)} = \bar{v}_i^{\{m\}}$. К соотношениям (80) присоединяем кинематические соотношения (36).

Система осредненных определяющих соотношений (78), (79), уравнений равновесия (77) и кинематических соотношений (80), (36) образует замкнутую систему 5-и уравнений относительно 5 функций: трех скоростей $\bar{v}_I^{\{m\}}$, $\bar{v}_3^{\{m\}}$ и двух скоростей изменения перерезывающих сил $\dot{Q}_I^{\{m\}(2)}$, которые зависят от глобальных координат x_I на каждом m -ом шаге итерации.

При переходе на новый шаг итерации в этой осредненной системе необходимо перевычислять осредненные характеристики пластины (79), которые зависят от значений функций

$$\Omega^{\{m-1\}(1)} = \{\sigma_{ij}^{\{m-1\}(1)}, \varepsilon_{kl}^{p\{m-1\}(1)}, h_{ij}^{\{m-1\}(1)}, \dot{\lambda}^{\{m-1\}(0)}, e_u^{p\{m-1\}(1)}\}$$

нулевого и первого приближений. Поэтому к системе (77) - (80), (36) присоединяются также уравнения (68) для пластических деформаций, параметра нагружения и напряжений упрочнения первого приближения с учетом соотношений (69), (70) для тензоров, характеризующих упруго-пластические свойства пластины.

Задача циклического изгиба многослойной упругопластической пластины. Рассмотрим задачу изгиба прямоугольной упругопластической пластины, под действием равномерного давления $\Delta \bar{p}$ [25]. Слои пластины будем полагать упруго-пластическими изотропными, подчиняющимися модели АФКВ-D. Дополнительно полагаем, что слои пластины расположены симметрично относительно срединной плоскости $\xi = 0$. В начальном состоянии напряжения, деформации и пластические деформации отсутствуют.

В этих условиях будем искать решение осредненной системы (68), (77) - (80), (36) в следующем виде: отличными от тождественного нуля, зависящими только от координаты $x = x_1$ и времени t , полагаем следующие функции:

$$\dot{Q}_1^{\{m\}(2)}, \dot{M}_{\alpha\alpha}^{\{m\}(2)}, \dot{\eta}_{11}^{\{m\}}, \bar{v}_3^{\{m\}}, \alpha = 1, 2, // x, t. \quad (81)$$

Остальные скорости, входящие в осредненную систему, полагаем тождественно равными нулю: $v_I^{\{m\}(0)} = 0$. Тогда согласно (36) деформации $\varepsilon_{IJ}^{\{m\}(0)} = 0$. Отличными от тождественного нуля полагаем в данной задаче пластические деформации, напряжения упрочнения и параметр повреждаемости нулевого и первого приближений:

$$\varepsilon_{\alpha\alpha}^{p\{m\}(1)}, \dot{\lambda}^{\{m\}(0)}, h_{\alpha\alpha}^{p\{m\}(1)}, e_u^{p\{m\}(1)}, \alpha = 1, 2. \quad (82)$$

В силу симметрии расположения слоев относительно срединной плоскости $\xi = 0$, полагая напряженно-деформированное состояние в пластической области также симметричным, получаем, что тензоры $\bar{B}_{IJKL}^{\{m-1\}}$ являются нулевыми и осредненная система уравнений (68), (77) - (80), (36) с граничными условиями:

$$x = 0, x = 1: \bar{v}_3^{\{m\}} = 0, \bar{v}_{3,11}^{\{m\}} = 0 \quad (83)$$

имеет следующее решение

$$\begin{aligned} \dot{M}_{11}^{\{m\}(2)} &= \frac{\Delta \dot{p}^{\{m\}}}{2} x(x-1), \quad \dot{Q}_1^{\{m\}(2)} = \Delta \dot{p}^{\{m\}} \left(x - \frac{1}{2} \right), \\ \dot{h}_{11}^{\{m\}} &= \frac{\Delta \dot{p}^{\{m\}}}{2} \frac{x(x-1)}{\bar{D}_{1111}^{\{m-1\}}}, \quad \bar{v}_3^{\{m\}} = \frac{\Delta \dot{p}^{\{m\}}}{2} (xS^{\{m\}}(1) - S^{\{m\}}(x)). \end{aligned}$$

Компоненты скоростей напряжений первого приближения, согласно (3.46), в данной задаче вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{IJ}^{\{m\}} &= -\frac{\xi}{\kappa^2} \bar{C}_{\alpha\alpha 11}^{\{m-1\}(0)} \tilde{v}_{3,11}^{\{m\}}, \quad \dot{\sigma}_{i3}^{\{m\}} = \frac{1}{\kappa} \left(\left\{ \xi \bar{C}_{1111}^{\{m-1\}(0)} \right\}_{\xi} \tilde{v}_{3,11}^{\{m\}} \right)_{,1}, \\ \dot{\sigma}_{33}^{\{m\}} &= -\dot{p}_- - \Delta \dot{p}(\xi + 0.5) - \left(\left\{ \xi \bar{C}_{1111}^{\{m-1\}(0)} \right\}_{\xi} \tilde{v}_{3,11}^{\{m\}(0)} \right)_{,11}, \\ \tilde{v}_3^{\{m\}} &= \frac{\Delta \dot{p}^{\{m\}}}{2} (xS^{\{m\}}(1) - S^{\{m\}}(x)), \quad S^{\{m\}}(x) = \int_0^x \int_0^{\tilde{x}} \frac{x(x-1)}{\bar{D}_{1111}^{\{m-1\}}} d\tilde{x} d\tilde{x}. \end{aligned} \quad (84)$$

Здесь, как и выше $\tilde{p}_{\pm}$ — истинное давление на поверхностях пластины, $\Delta \tilde{p} = \tilde{p}_+ - \tilde{p}_-$, а $\tilde{v}_3^{\{m\}}$ — приведенная скорость прогиба. Истинная безразмерная скорость прогиба согласно (11) вычисляется по формуле $\bar{v}_3^{\{m\}} = \tilde{v}_3^{\{m\}} / \kappa^3$.

В соответствии с (51) и (3.87) пластические деформации, напряжения упрочнения в нулевом приближении являются нулевыми. Для пластических деформаций $\varepsilon_{\alpha\alpha}^{p\{m\}(1)}$ и напряжений упрочнения $h_{\alpha\alpha}^{p\{m\}(1)}$ в первом приближении, а также параметра пластического нагружения в нулевом приближении $\dot{\lambda}^{\{m\}(0)}$, согласно (68) в данной задаче имеем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{\alpha\alpha}^{p\{m\}(1)} &= -\xi \bar{Y}_{\alpha\alpha 11}^{\{m-1\}(0)} \bar{v}_{3,11}^{\{m\}}, \quad \dot{\lambda}^{\{m\}(0)} = -\xi \bar{A}_{11}^{\{m-1\}(0)} \bar{v}_{3,11}^{\{m\}}, \\ \dot{h}_{\alpha\alpha}^{p\{m\}(1)} &= \Phi_{\alpha\alpha}^{h\{m-1\}(1)} - \Phi^{h\{m-1\}(0)} h_{\alpha\alpha}^{\{m\}(1)}, \quad \dot{e}_u^{p\{m\}(1)} = I_2(\dot{\varepsilon}^{p\{m-1\}(1)}). \end{aligned} \quad (85)$$

Рассмотрим вид тензоров $\tilde{C}_{ijkl}^{\{m-1\}(0)}$, $Y_{ijpn}^{\{m\}(0)}$ и $\Phi_{\alpha\alpha}^{h\{m-1\}(1)}$, $\Phi^{h\{m-1\}(0)}$ в данной задаче. Согласно формулам (70) имеем следующие ненулевые компоненты тензоров:

$$\begin{aligned}\tilde{C}_{\alpha\alpha\gamma\gamma}^{\{m\}(0)} &= \sum_{\beta=1}^3 T_{\alpha\alpha\beta\beta}^{\{m\}(0)-1} C_{\beta\beta\gamma\gamma}, \quad T_{\alpha\alpha\gamma\gamma}^{\{m\}(0)} = \delta_{\alpha\gamma} + \chi \sum_{\beta=1}^3 C_{\alpha\alpha\beta\beta} Q_{\beta\beta\gamma\gamma}^{\{m\}(0)}, \\ Q_{\alpha\alpha\beta\beta}^{\{m\}(0)} &= A_{\alpha\alpha}^{\{m\}(1)} \bar{A}_{\beta\beta}^{\{m\}(-1)}, \quad \bar{A}_{\alpha\alpha}^{\{m\}(-1)} = \frac{A_{\alpha\alpha}^{\{m\}(1)}}{\Phi_1^{\{m\}(2)}}, \\ Y_{\alpha\alpha\gamma\gamma}^{\{m\}(0)} &= \chi \sum_{\beta=1}^3 Q_{\alpha\alpha\beta\beta}^{\{m\}(0)} \tilde{C}_{\beta\beta\gamma\gamma}^{\{m\}(0)}, \quad \gamma = \text{sign}(\dot{\lambda}^{\{m\}(0)}), \\ \bar{\Phi}_1^{\{m\}(2)} &= \Phi_1^{\{m\}(2)} + \gamma C_e^{\{m\}(1)} A_u^{\{m\}(1)}, \quad \Phi_1^{\{m\}(2)} = \sum_{\alpha=1}^3 A_{\alpha\alpha}^{\{m\}(1)} B_{\alpha\alpha}^{\{m\}(1)}, \\ C_e^{\{m\}(1)} &= \frac{3}{2} \sum_{\alpha=1}^3 (p_{\alpha\alpha}(a^{\{m\}(1)}) (H_2^{(-1)} \varepsilon_{\alpha\alpha}^{p\{m\}(1)} - H_1^{(-1)} h_{\alpha\alpha}^{\{m\}(1)}) + f_e^{\{m\}(1)}), \\ \sigma_{yT,C}^{\{m\}(1)} &= \sigma_{yT,C}^{0(1)} + (\sigma_{yT,C}^{1(1)} - \sigma_{yT,C}^{0(1)}) (1 - \exp(-\beta_{pT,C}^{(-1)} e_u^{p\{m\}(1)})), \\ A_{\alpha\alpha}^{\{m\}(1)} &= \frac{3}{2} p_{\alpha\alpha}(a^{\{m\}(1)}) + A_f^{\{m\}(0)}, \quad B_{\alpha\alpha}^{\{m\}(1)} = \frac{3}{2} p_{\alpha\alpha}(a^{\{m\}(1)}) H, \\ a_{\alpha\alpha}^{\{m\}(1)} &= \sigma_{\alpha\alpha}^{\{m\}(1)} - h_{\alpha\alpha}^{\{m\}(1)}, \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad A_u^{\{m\}(1)} = \left(\sum_{\alpha=1}^3 (A_{\alpha\alpha}^{\{m\}(1)})^2 \right)^{0.5}, \\ p_{\alpha\alpha}(a^{\{m\}(1)}) &= \frac{1}{3} (2a_{\alpha\alpha}^{\{m\}(1)} - a_{\beta\beta}^{\{m\}(1)} - a_{\gamma\gamma}^{\{m\}(1)}), \\ \Phi_{\alpha\alpha}^{h\{m\}(1)} &= \dot{\lambda}^{\{m\}(0)} (A_{\alpha\alpha}^{\{m\}(1)} H + H_2^{(-1)} \gamma \varepsilon_{\alpha\alpha}^{p\{m\}(1)} A_u^{\{m\}(1)}), \\ \Phi^{h\{m\}(0)} &= \gamma \dot{\lambda}^{\{m\}(0)} H_1^{(-1)} A_u^{\{m\}(1)}, \quad A_{\alpha\alpha}^{\varepsilon\{m\}(-1)} = \chi \sum_{\beta=1}^3 \bar{A}_{\beta\beta}^{\{m\}(-1)} \tilde{C}_{\beta\beta\alpha\alpha}^{(0)},\end{aligned}\tag{86}$$

где $\alpha, \beta, \gamma \in \{1, 2, 3\}$ — циклически меняющиеся индексы.

Численные результаты решения задачи для многослойной упруго-пластической пластины. Численное моделирование по разработанной методике проводилось для 4-х слойной пластины, для которой были выбраны: $\kappa = 0.02$, $L = 1$ м, а толщины слоев имели значения 0.25 в безразмерной координате ξ . Внешние слои с номерами 1 и 4 соответствовали высокопрочной стали 34CrNiMo6 [26], а внутренние слои с номерами 2 и 3 — менее прочной стали S 275 [27]. Все материальные константы модели AFKB-D этих сталей были определены в работе [15]. Давление на нижней поверхности пластины было нулевым $\tilde{p}_- = 0$, а на внешней поверхности оно менялось по моногармоническому закону $\tilde{p}_+ = p_{\max} \sin(2nvt)$. Физическая реализа-

ция таких граничных условий может быть приближенно осуществлена, например, конструктивным способом с помощью механических устройств, создающих переменную величину давления $\tilde{p}_+$ на одной поверхности пластины.

На рисунке 1 приведена диаграмма деформирования пластины давление-максимальный приведенный прогиб в центре пластины $\tilde{p}_+$ — $\tilde{u}_{\max}$, где

$$\tilde{u}_{\max} = \int_0^t \tilde{v}_{\max}(\tilde{t}) d\tilde{t}, \quad \tilde{v}_{\max}(t) = \tilde{v}_3|_{x=0.5}(t).$$

Давление $\tilde{p}_+$, напряжения $\sigma_{ij}^{\{m\}}$, напряжения упрочнения $h_{\alpha\alpha}^{\{m\}}$ на рисунках приведены в ГПа, а приведенный прогиб $\tilde{u}_{\max}$ — в безразмерном виде. Цифрами 1...19 отмечены моменты $t^{\{m\}}$, для которых вычислялись напряжения $\sigma_{ij}(x, \xi, t^{\{m\}})$ в слоях пластины в виде распределений по поперечной координате ξ .

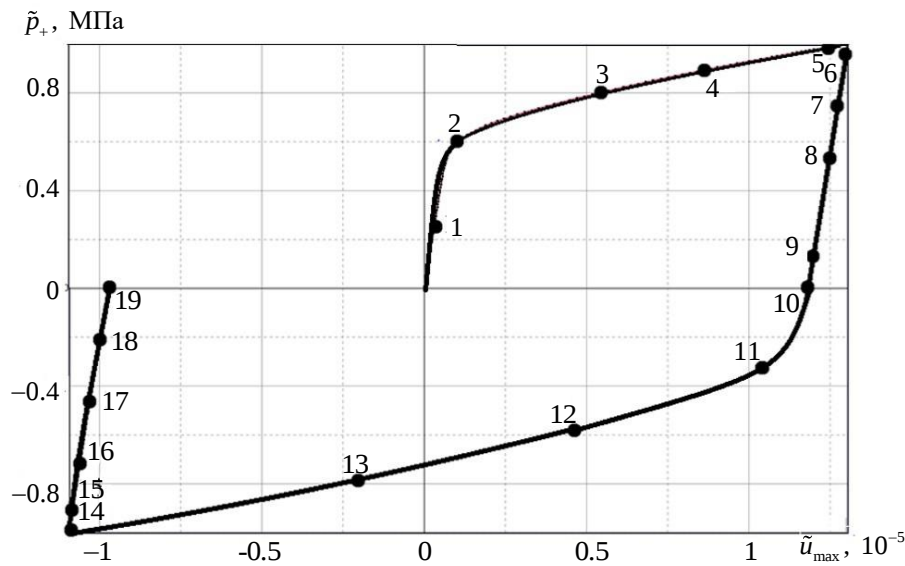


Рис. 1. Диаграмма деформирования $\tilde{p}_+$ — $\tilde{u}_{\max}$ для одного полного цикла в областях растяжения-сжатия 4-х слойной пластины

На рисунке 2 показаны распределения изгибного напряжения $\sigma_{11}(0.5, \xi, t^{\{m\}})$ по поперечной координате ξ 4-х слойной пластины при $x=0.5$ на различных этапах нагружения в области растяжения. Проведенные расчеты показывают, что изгибные напряжения $\sigma_{11}(0.5, \xi, t^{\{m\}})$ в многослойной пластине являются разрывными функциями поперечной координаты, как и в линейной теории

упругости для многослойных пластин [41]. С увеличением давления $\tilde{p}_+$ на первом этапе происходит рост максимальных значений напряжения $\sigma_{11}(0.5, \xi, t^{\{m\}})$, а на этапе разгрузки эти значения уменьшаются. При полной разгрузке в слоях пластины остаются остаточные напряжения в каждом слое, поскольку на первом этапе нагружения (моменты нагружения 2...6) все слои вышли в пластическую область деформирования.

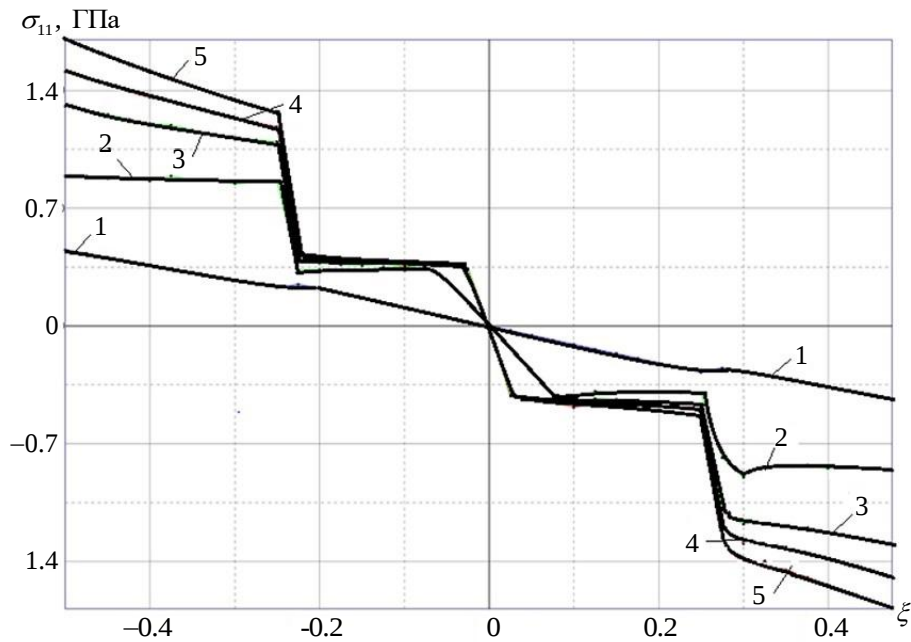


Рис. 2. Распределение изгибного напряжения σ_{11} по толщине 4-х слойной пластины при $x = 0.5$ на различных этапах нагружения в области растяжения (моменты 1,...5 соответствуют точкам на диаграмме на рис. 1)

На рисунке 3 показаны распределения напряжения упрочнения $h_{11}(0.5, \xi, t^{\{m\}})$ по поперечной координате ξ 4-х слойной пластины при $x = 0.5$ для тех же моментов нагружения.

Распределения напряжений упрочнения h_{11} по поперечной координате ξ на этапах активного пластического нагружения повторяют по виду распределение изгибных напряжений σ_{11} : экстремумы функции $h_{11}(0.5, \xi, t^{\{m\}})$ находятся на внешней и внутренней поверхностях пластины.

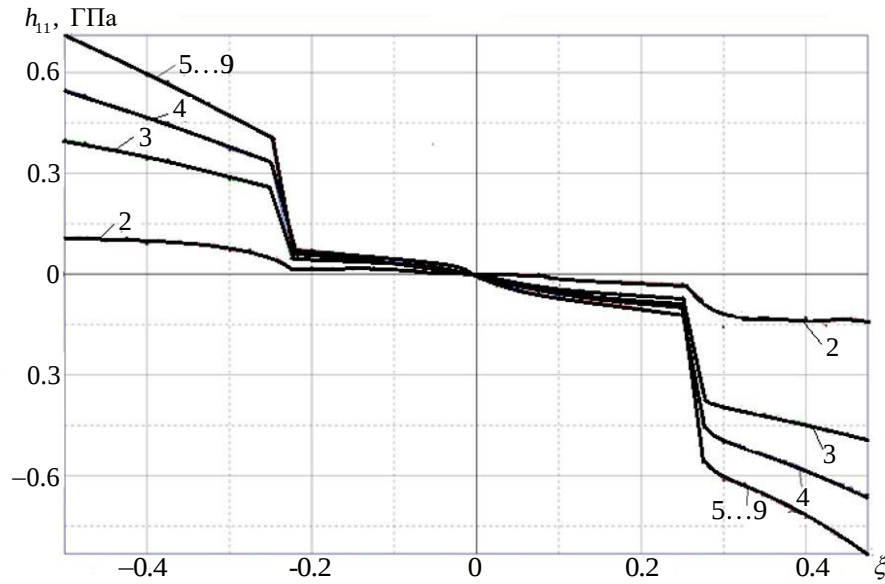


Рис. 3. Распределение напряжения упрочнения h_{11} по толщине 4-х слойной пластины при $x = 0.5$ на различных этапах нагружения и разгрузки в области растяжения (моменты 1,...,9 соответствуют точкам на диаграмме деформирования на рис. 1)

График функции $h_{11}(0.5, \xi, t^{(m)})$ является кусочно-непрерывным для всех значений $t^{(m)}$, как и функции $\sigma_{11}(0.5, \xi, t^{(m)})$: в каждом слое эти функции являются непрерывными.

На активном участке пластического деформирования в области растяжения (моменты 1...4) происходит рост экстремальных значений $h_{11}(0.5, \xi, t^{(m)})$, а на участке активного пластического деформирования в области сжатия (моменты 10...14) сначала происходит уменьшение экстремальных значений по абсолютной их величине, а затем снова происходит рост, причем знаки экстремумов при переходе от момента 10 к моменту 14 меняются на противоположные. На участках разгрузки (моменты 5...9 и 15...19) графики функций $h_{11}(0.5, \xi, t^{(m)})$ не меняются.

На рисунке 4 показана диаграмма деформирования пластины в координатах $\tilde{p}_+ - \tilde{\lambda}$, где $\tilde{\lambda} = \dot{\lambda}^{(0)} / \dot{\lambda}_0$ — безразмерный параметр нагружения, $\dot{\lambda}_0 = 10^{-12} \text{ ГПа}^{-1} \text{ с}^{-1}$ — характерное значение параметра нагружения, а значение $\dot{\lambda}^{(0)}$ взято для точки с координатами $x = 0.5$, $\xi = -0.5$. На первом этапе нагружения (момент 1) параметр пластического нагружения $\dot{\lambda}^{(0)}$ равен нулю. При достижении начального предела текучести в точке $x = 0.5$, $\xi = -0.5$ начинается рост пара-

метра $\dot{\lambda}^{(0)}$ (момент 2). Этот рост достигает максимума и, начиная с некоторого момента пластического деформирования, значения $\dot{\lambda}^{(0)}$ начинают снижаться до нуля (моменты 3, 4 и 5). На этапе разгрузки значение параметра $\dot{\lambda}^{(0)}$ остается нулевым (моменты 6, 7 и 8). В момент 10 начинается пластическое деформирование в области сжатия, значения $\dot{\lambda}^{(0)}$ при этом снова возрастают (момент 11). После достижения максимального значения параметр $\dot{\lambda}^{(0)}$ снова начинает уменьшаться еще на этапе пластического деформирования (моменты 12, 13, 14). На этапе повторной разгрузки после сжатия (моменты 15, 16, 17, 18 и 19) значения параметра $\dot{\lambda}^{(0)}$ остаются равными нулю.

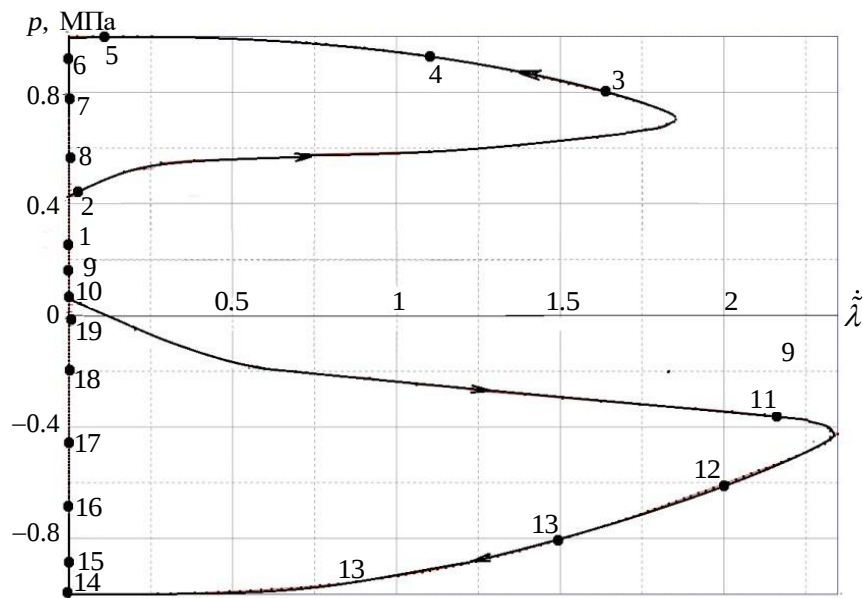


Рис. 4. Диаграмма нагружения $\bar{p}_+ - \dot{\lambda}$ за один полный цикл растяжения и сжатия 4-х слойной пластины для точки пластины с координатой $\xi = -0.5$, цифры на диаграмме соответствуют точкам на диаграмме деформирования на рис. 1

На рисунке 5 показано распределение касательного напряжения $\sigma_{13}(1, \xi, t^{(m)})$ (в МПа) по поперечной координате ξ 4-х слойной пластины при $x=1$ на различных этапах нагружения в области растяжения (рисунок 3.14). Касательные напряжения $\sigma_{13}(1, \xi, t^{(m)})$ в многослойной пластине являются непрерывными функциями поперечной координаты для всех моментов $t^{(m)}$. Графики зависимости σ_{13} от ξ являются функциями «параболического» типа.

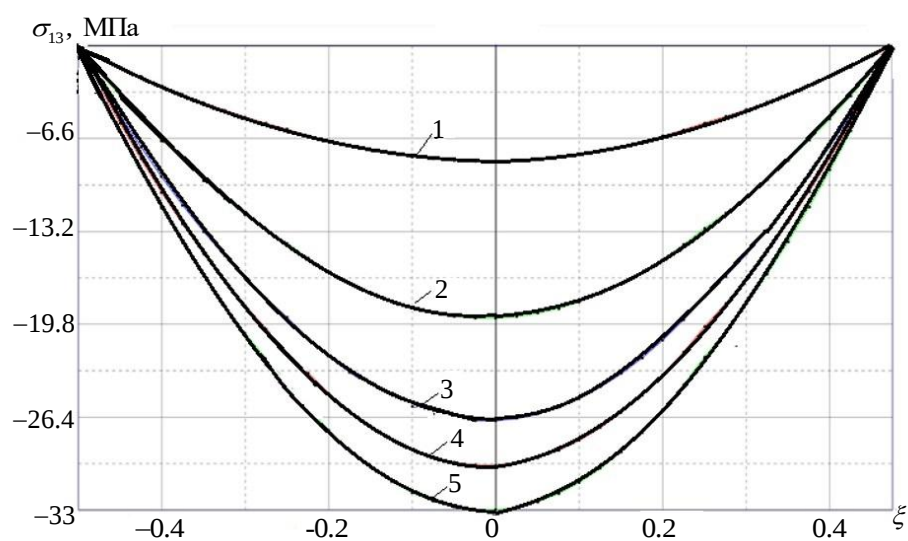


Рис. 5. Распределение касательного напряжения σ_{13} по толщине 4-х слойной пластины при $\chi = 1$ на различных этапах нагрузки (моменты 1,...,5 соответствуют точкам на диаграмме деформирования на рис. 1)

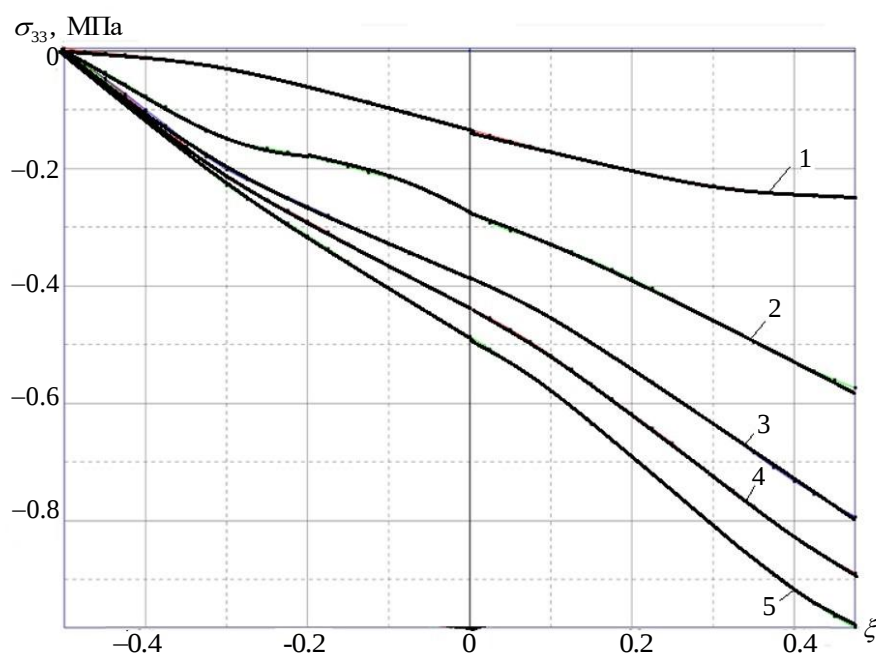


Рис. 6. Распределение поперечного напряжения σ_{33} по толщине 4-х слойной пластины при $\chi = 1$ на различных этапах нагрузки (моменты 1,...,5 соответствуют точкам на диаграмме деформирования на рис. 1)

На рисунке 6 показаны распределения поперечного напряжения $\sigma_{33}(1, \xi, t^{(m)})$ по поперечной координате ξ 4-х слойной пластины при $x=1$ на различных этапах нагружения в области растяжения. Поперечные напряжения $\sigma_{33}(1, \xi, t^{(m)})$ в многослойной пластине, как и касательные напряжения, являются непрерывными функциями поперечной координаты для всех моментов $t^{(m)}$.

На этапе активного нагружения максимум поперечных напряжений по абсолютной величине, реализующийся на внешней поверхности $\xi = 0.5$, возрастает, а на этапе разгрузки – падает. В момент полной разгрузки (моменты 9, 10) график поперечного напряжения не является монотонной функцией от ξ . При переходе в область сжатия на диаграмме 1 знак поперечных напряжений меняется, при этом напряжения возрастают.

Выводы. Разработана асимптотическая теория деформирования тонких многослойных упруго-пластических пластин, слои которой подчиняются модифицированной модели теории АФКВ-D пластического течения, учитывающей различие пластических свойств при растяжении и сжатии. Теория основана на асимптотических разложениях уравнений общей 3-х мерной постановки задачи теории пластичности в скоростях по малому геометрическому параметру. Показано, что для корректного построения асимптотической теории в моделях пластического течения, относящимся к классу кинематического упрочнения, необходимы дополнительные допущения относительно согласования малости параметров упрочнения с геометрическим параметром. Сформулированы локальные постановки задач теории пластичности и осредненная постановка, получены выражения для всех 6 компонент тензора напряжений в слоях. Приведенный численный пример решения задачи о циклическом изгибе 4-х слойной пластины позволил выявить основные особенности распределения переменных полей напряжений в слоях, меняющихся в процессе циклов растяжения-сжатия.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ильюшин А.А. *Пластичность: основы общей математической теории*. Москва, УРСС, 2020, 272 с.
- [2] Москвитин В.В. *Циклические нагружения элементов конструкций*. Москва, УРСС, 2019, 344 с.
- [3] Кадашевич Ю. И., Новожилов В. В. Теория пластичности, учитывающая остаточные микронапряжения. *Прикладная математика и механика* (ПММ), 1958, т. 22, вып. 1, с. 78–89.

- [4] Кадашев Ю.И. О различных тензорно-линейных соотношениях в теории пластичности. *Исследования по упругости и пластичности*. Ленинград, Изд-во ЛГУ, 1967, вып. 6, с. 39–45.
- [5] Armstrong, P.J., Frederick C.O. A mathematical representation of the multiaxial Bauschinger effect. *CEGB Report*, 1966, no. RD/B/N 731.
- [6] Ишлинский А.Ю. Общая теория пластичности с линейным упрочнением. *Украинский математический журнал*. 1954, т. 6, вып. 3, с. 314–324.
- [7] Зубчанинов В.Г. *Математическая теория пластичности*. Тверь, ТГТУ, 2002, 300 с.
- [8] Бондарь В.С., Даншин В.В. *Пластичность. Пропорциональные и непропорциональные нагружения*. Москва, Физматлит, 2008, 176 с.
- [9] Бондарь В.С. *Неупругость. Варианты теории*. Москва, Физматлит, 2004, 144 с.
- [10] Бондарь В.С., Бурчаков С.В., Даншин В.В. Математическое моделирование процессов упругопластического деформирования и разрушения материалов при циклических нагружениях. *Проблемы прочности и пластичности*, 2010, № 72, с. 18–27.
- [11] Chaboche J.L., On some modifications of kinematic hardening to improve the description of ratchetting effects. *International Journal of Plasticity*, 1991, vol. 7, no. 7, pp. 661–678.
- [12] Drucker, D.C. Relation of experiments to mathematical theories of plasticity. *Journal of Applied Mechanics*, 1949, vol. 16, no. 4, pp. 349–357.
- [13] Prager W. A new method of analyzing stresses and strains in work hardening plastic solids. *Journal of Applied Mechanics*, 1956, vol. 23, №4, pp. 493–496.
- [14] Димитриенко Ю. И., Юрин Ю. В., Сборщиков С. В. *Многомасштабное моделирование упругопластических композиционных материалов*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2024, 228 с.
- [15] Димитриенко А.Ю. Модель циклического деформирования и усталости упругопластических материалов, разносопротивляющихся растяжению и сжатию. *Математическое моделирование и численные методы*, 2026, № 1, с. 140–164.
- [16] Шешенин С.В. Асимптотический анализ периодических в плане пластин. *Известия РАН. Механика твердого тела*, 2006, № 6, с. 71–79.
- [17] Назаров С.А., Свирс Г.Х., Слуцкий А.С. Осреднение тонкой пластины, усиленной периодическими семействами жестких стержней. *Математический сборник*, 2011, т. 202, № 8, с. 41–80.
- [18] Димитриенко Ю.И. Асимптотическая теория многослойных тонких пластин. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия Естественные науки*, 2012, № 3 (46), с. 86–99.
- [19] Димитриенко Ю.И., Яковлев Д.О. Асимптотическая теория термоупругости многослойных композитных пластин. *Механика композиционных материалов и конструкций*, 2014, т. 20, № 2, с. 259–282.
- [20] Димитриенко Ю.И., Юрин Ю.В., Губарева Е.А. Асимптотическая теория термоползучести многослойных тонких пластин. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 4 (4), с. 18–36.
- [21] Dimitrienko Y.I., Dimitrienko I.D., Sborschikov S.V. Multiscale hierarchical modeling of fiber reinforced composites by asymptotic homogenization method. *Applied Mathematical Sciences*, 2015, vol. 9, no. 145, pp. 7211–7220.
- [22] Dimitrienko Y.I., Dimitrienko I.D. Modeling of the thin composite laminates with general anisotropy under harmonic vibrations by the asymptotic homogeni-

- zation method. *Journal for Multiscale Computational Engineering*, 2017, vol. 15, no. 3, pp. 219–237.
- [23] Димитриенко Ю.И., Черкасова М.С., Димитриенко А.Ю. Микроструктурная модель анизотропной теории течения для упруго-пластических слоистых композитов. *Математическое моделирование и численные методы*, 2022, № 3 (35), с. 47–70.
- [24] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. Т. 1. Тензорный анализ*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011, 463 с.
- [25] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. Т. 4. Основы механики твердых сред*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013, 623 с.
- [26] Branco R., Costa J. D. M., Antunes F.V., Perdigão S. Monotonic and Cyclic Behavior of DIN 34CrNiMo6 Tempered Alloy Steel. *Metals*, 2016, vol. 6, no. 5, pp. 1–14.
- [27] Versaillot P.D. *Effect of Cyclic Loading on the mechanical properties of steel*. Dissertation. Universitatea Politehnica Timisoara, Romania, 2017, 172 p.

Статья поступила в редакцию 18.02.2026

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Димитриенко Ю.И., Димитриенко А.Ю. Асимптотическая теория тонких многослойных упруго-пластических пластин, разносопротивляющихся растяжению – сжатию при циклических нагружениях. *Математическое моделирование и численные методы*, 2026, № 2, с. 119–150.

Димитриенко Юрий Иванович — д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, директор Научно-образовательного центра «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: dimit.bmstu@mail.ru

Димитриенко Александр Юрьевич — аспирант кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: sasha.dimit@mail.ru

Asymptotic theory of thin multilayer elastic-plastic plates with different resistance to tension and compression under cyclic loading

© Yu.I. Dimitrienko, A.Yu. Dimitrienko

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

An asymptotic theory of deformation of multilayer elastic-plastic plates under cyclic loading has been developed for the case where the layers obey the Armstrong–Frederick–Kadashevich–Bondar theory, modified in [15] to account for differences in plastic properties under tension–compression (AFKB-D model). A 3-dimensional formulation of the plasticity problem in rates for multilayer plates has been formulated, based on which recurrent local problems of plasticity theory have been derived using asymptotic expansions in a small geometric parameter, and an averaged problem of plasticity theory has been formulated. A distinctive feature of asymptotic theories of thin structures is the ab-

sence of the need for any assumptions regarding the distributions of displacements and stresses across the thickness. It is shown that for the considered class of plasticity theory models with kinematic hardening, constructing a correct asymptotic theory requires the introduction of a condition for the smallness of the plastic hardening parameters and the geometric small parameter. Analytical solutions to recurrent sequences of local problems are obtained, which are used to derive formulas for all six components of the stress tensor in the plate layers. As a numerical example, the problem of cyclic bending of a four-layer plate is considered, demonstrating the main features of the stress field changes in the plate layers during tension-compression cycles.

Keywords: asymptotic theory, asymptotic expansions, multilayer plates, plasticity, cyclic loading, resistance variation, tension-compression

REFERENCES

- [1] Il'yushin A.A. *Plastichnost': osnovy obshchey matematicheskoy teorii*. [Plasticity: Fundamentals of the general mathematical theory]. Moscow, URSS, 2020, 272 p.
- [2] Moskvitin V.V. *Tsiklicheskiye nagruzheniya elementov konstruksiy* [Cyclic loading of structural elements]. Moscow, URSS, 2019, 344 p.
- [3] Kadashevich YU. I., Novozhilov V. V. Teoriya plastichnosti, uchityvayushchaya ostatochnyye mikronapryazheniya [Plasticity theory taking into account residual microstresses]. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied Mathematics and Mechanics], 1958, vol. 22, no. 1, pp. 78–89.
- [4] Kadashevich YU.I. *O razlichnykh tenzorno-lineynykh sootnosheniyakh v teorii plastichnosti. Issledovaniya po uprugosti i plastichnosti* [On various tensor-linear relations in the theory of plasticity. Studies on Elasticity and Plasticity], Leningrad, LGU Publ, 1967, no. 6, pp. 39–45.
- [5] Armstrong, P.J., Frederick C.O. A mathematical representation of the multiaxial Bauschinger effect. *CEGB Report*, 1966, no. RD/B/N 731.
- [6] Ishlinskiy A.YU. Obshchaya teoriya plastichnosti s lineynym uprochneniyem [General theory of plasticity with linear hardening]. *Ukrainian Mathematical Journal*, 1954, vol. 6, no. 3, pp. 314–324.
- [7] Zubchaninov V.G. *Matematicheskaya teoriya plastichnosti* [Mathematical Theory of Plasticity]. Tver', TGTU, 2002, 300 p.
- [8] Bondar' V.S., Danshin V.V. *Plastichnost'. Proportional'nyye i neproportional'nyye nagruzheniya* [Plasticity. Proportional and Disproportionate Loads]. Moscow, Fizmatlit, 2008, 176 p.
- [9] Bondar' V.S. *Neuprugost'. Varianty teorii* [Inelasticity. Theory Variants]. Moscow, Fizmatlit, 2004, 144 p.
- [10] Bondar' V.S., Burchakov S.V., Danshin V.V. Mathematical Modeling of Elastoplastic Deformation and Fracture of Materials under Cyclic Loading. *Problems of Strength and Plasticity*, 2010, no. 72, pp.18–27.
- [11] Chaboche J.L., On some modifications of kinematic hardening to improve the description of ratchetting effects. *International Journal of Plasticity*, 1991, vol.7, no. 7, pp. 661– 678.
- [12] Drucker, D.C. Relation of experiments to mathematical theories of plasticity. *Journal of Applied Mechanics*, 1949, vol. 16, no. 4, pp. 349 – 357.
- [13] Prager W. A new method of analyzing stresses and strains in work hardening plastic solids. *Journal of Applied Mechanics*, 1956, vol. 23, №4, pp. 493–496.
- [14] Dimitrienko Yu. I., Yurin Yu. V., Sborshchikov S. V. *Mnogomasshtabnoe*

- modelirovanie uprugoplasticheskikh kompozicionnykh materialov* [Multiscale modeling of elastic-plastic composite materials]. Moscow, BMSTU Publ, 2024, 228 p.
- [15] A.Yu. Dimitrienko A model of cyclic deformation and fatigue of elastic-plastic materials with different resistance in tension and compression. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2026, no. 1, pp. 140–164.
- [16] Sheshenin S.V. Asymptotic analysis of plates with periodic cross-sections. *Mechanics of Solids*, 2006, vol. 41, no. 6, pp. 57–63.
- [17] Nazarov S.A., Sweers G.H., Slutskij A.S. Homogenization of a thin plate reinforced with periodic families of rigid rods. *Sbornik: Mathematics*, 2011, vol. 202, no. 8, pp. 1127–1168.
- [18] Dimitrienko Yu.I. Asymptotic theory of multilayer thin plates. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2012, no. 3 (46), pp. 86–99.
- [19] Dimitrienko Yu.I., Yakovlev D.O. Asymptotic theory of thermoelasticity of multilayer composite plates. *Journal on Composite Mechanics and Design*, 2014, vol. 20, no. 2, pp. 259–282.
- [20] Dimitrienko Y.I., Gubareva E.A., Yurin Y.V. Asymptotic theory of thermocreeep for multilayer thin plates. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2014, no. 4, pp. 18–36.
- [21] Dimitrienko Y.I., Dimitrienko I.D., Sborschikov S.V. Multiscale hierarchical modeling of fiber reinforced composites by asymptotic homogenization method. *Applied Mathematical Sciences*, 2015, vol. 9, no. 145, pp. 7211–7220.
- [22] Dimitrienko Y.I., Dimitrienko I.D. Modeling of the thin composite laminates with general anisotropy under harmonic vibrations by the asymptotic homogenization method. *Journal for Multiscale Computational Engineering*, 2017, vol. 15, no. 3, pp. 219–237.
- [23] Dimitrienko Yu. I., Cherkasova M.S., Dimitrienko A.Yu. Microstructural model anisotropic flow theory for elastic-plastic layered composites. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2022, no. 3 (35), pp. 47–70.
- [24] Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika sploshnoj sredy. T. 1. Tenzornyj analiz* [Continuum Mechanics. Vol. 1. Tensor analysis]. Moscow, BMSTU Publ., 2011, 463 p.
- [25] Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika sploshnoi sredy. T. 4. Osnovy mekhaniki tverdykh sred* [Continuum Mechanics. vol. 4. Fundamentals of Solid Mechanics]. Moscow, BMSTU Publ., 2013, 623 p.
- [26] Branco R., Costa J. D. M., Antunes F.V., Perdigão S. Monotonic and Cyclic Behavior of DIN 34CrNiMo6 Tempered Alloy Steel. *Metals*, 2016, vol. 6, no. 5, pp.1-14.
- [27] Versaillot P.D. *Effect of Cyclic Loading on the mechanical properties of steel. Dissertation*. Universitatea Politehnica Timisoara, Romania, 2017, 172 p.

Dimitrienko Yu. I., Dr. Sci. (Phys. — Math.), Professor, Head of Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University, Director of Research and Education Center Scientific and Educational Centre of Supercomputer Engineering Modeling and Software Packages (Simplex), Bauman Moscow State Technical University. e-mail: dimit.bmstu@mail.ru

Dimitrienko A.Yu., Postgraduate Student of the Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: sasha.dimit@mail.ru