



# Математическое моделирование и численные методы

Максимов Ф. А. Сверхзвуковое течение в осесимметричном канале. Математическое моделирование и численные методы, 2015, №1 (5), с. 109-120

Источник: <https://mmcm.bmstu.ru/articles/41/>

## Сверхзвуковое течение в осесимметричном канале

© Ф.А. Максимов

Институт автоматизации проектирования РАН,  
Москва, 123056, Россия

*Разработанный метод расчета сверхзвукового течения внутри осесимметричного канала учитывает образование отраженных от стенок канала волн и их влияние на течение внутри канала. Благодаря этому удается прогнозировать не только аэродинамические свойства аэродинамической формы в зависимости от ее местоположения в канале, но и воздействие находящейся в этом канале аэродинамической формы на стенки такого канала.*

**Ключевые слова:** сверхзвуковое течение, осесимметричный канал, аэродинамическая форма.

**Введение.** Во многих технических устройствах реализуется сверхзвуковое течение в осесимметричном канале. Это течение в расширяющейся части сопла или в рабочей части сверхзвуковой аэrodинамической трубы. При предположении о сверхзвуковом характере потока вдоль оси канала на основе модели невязкого газа разработан метод расчета течения внутри осесимметричного канала [1]. Данный метод является адаптацией метода расчета внешнего обтекания ракет [2, 3]. В работе приведено описание метода расчета течения в канале с расположением в потоке тонких аэродинамических поверхностей.

**Метод расчета течения в канале.** Течение внутри канала предполагается сверхзвуковым вдоль оси. Следовательно, система уравнений Эйлера является гиперболической относительно пространственной координаты, а решение может быть получено посредством пошагового интегрирования по координате  $x$ . Система уравнений Эйлера в цилиндрической системе координат имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial r} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \phi} = \mathbf{H}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{E} = r \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{F} = r \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \rho w \\ \rho uw \\ \rho uv \\ \rho w^2 + p \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\rho vw \end{bmatrix}$ ,

$p$  — давление;  $\rho$  — плотность;  $(u, v, w)$  — составляющие вектора скорости соответственно в направлениях  $(x, r, \phi)$ . Ось  $x$  в цилиндрической системе координат совпадает с осью канала и одновременно

является направлением сверхзвукового течения. Система (1) представляет собой законы сохранения массы и импульса в проекциях на оси координат. Уравнение энергии в стационарном случае представляет собой интеграл Бернулли и для совершенного газа с показателем адиабаты  $\gamma$  имеет вид

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} + \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} = \text{const.} \quad (2)$$

Так как канал осесимметричный, его геометрия описывается зависимостью  $r = R(x)$ . Перейдем к новым независимым переменным:

$$x = x; \quad \xi = \frac{r}{R}; \quad \phi = \phi. \quad (3)$$

Преобразование (3) нормирует расчетную область в радиальном направлении. Система (1) в новых переменных имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \xi} (f_1 \mathbf{E} + f_2 \mathbf{F}) + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \phi} = \mathbf{H} - g \mathbf{E}, \quad (4)$$

где  $f_1 = \frac{R_x}{R} \xi$ ;  $f_2 = \frac{1}{R}$ ;  $g = \frac{R_x}{R}$ ; нижний индекс  $x$  означает производную функции по  $x$ .

Опишем построение расчетной сетки в случае расчета течения в канале с крестообразным оперением. Для выделения оперения необходимо построить четыре области (рис. 1). Количество секторов по углу определяется количеством плоскостей, в которых расположено оперение. Например, если рассматривается трехконсольное оперение, то выбираются три сектора. Оперение расположено в плоскостях между областями. В каждой из областей применяется преобразование (3). Функции  $f_1, f_2, g$  во всех областях имеют одинаковые значения.

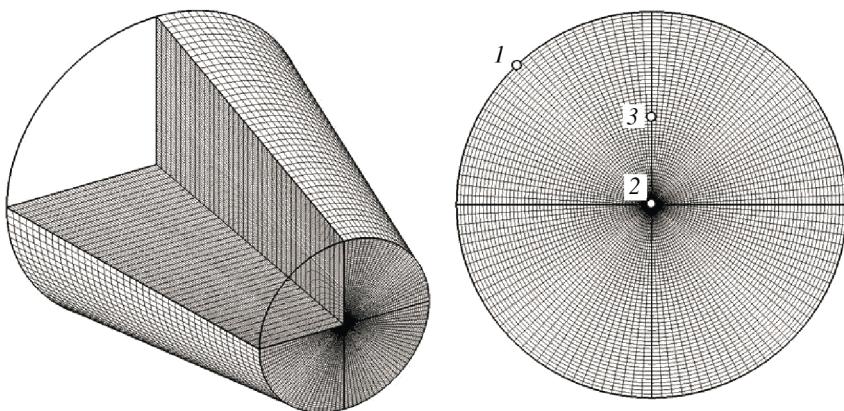


Рис. 1. Расчетная сетка

Уравнения (4) могут быть проинтегрированы по переменной  $x$ , в результате определяется консервативная переменная  $\mathbf{E}$ , по компонентам которой, с учетом (2) и предположения о сверхзвуковом характере течения, могут быть найдены физические переменные  $\rho$ ,  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $p$ . Для интегрирования системы (4) применяют схему Маккордака. Шаг интегрирования по координате  $x$  выбирают из условия устойчивости.

Рассмотрим граничные условия. В предложенном разбиении области расчета есть три типа границ (см. рис. 1): 1 — соответствующая поверхности канала; 2 — соответствующая оси канала; 3 — граница между соседними областями.

На границе 1 должно быть выполнено условие непротекания. Используемая схема удовлетворения данного условия приведена в [3]. Кратко схема выглядит следующим образом. После вычисления по разностным формулам находят значения физических переменных на новом слое по  $x$ . Полученное значение вектора скорости  $\mathbf{V}$  не удовлетворяет условию непротекания,  $\mathbf{V}$  должен быть повернут на угол  $\Delta = \arcsin(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} / |\mathbf{V}|)$ , где  $\mathbf{n}$  — нормаль к поверхности тела. Если  $\Delta > 0$ , то при повороте вектора скорости происходит расширение потока, если  $\Delta < 0$  — сжатие. При повороте  $\mathbf{V}$  на малый угол  $\Delta$  давление изменяется в соответствии с известным выражением. Плотность находят в предположении сохранения энтропии вдоль поверхности, а величину вектора скорости определяют из интеграла Бернулли (2).

На границе 2, размещенной на оси канала, расчетная сетка имеет особенность. Расчетная сетка в каждой области имеет по радиусу  $N$  узлов, а по  $\varphi$  —  $M$  узлов, оси канала соответствуют узлы со значением индекса  $n = 1$ . Все  $Mk$  узлов ( $k$  — число областей) при  $n = 1$  совпадают. Значения газодинамических функций в этом случае получаются как среднее арифметическое значений газодинамических функций при  $n = 2$  всех областей (при вычислении среднего арифметического учитывается направление вектора скорости).

На границах 3 может быть расположено оперение. Именно с целью возможности расположения оперения на данных границах предложено рассматриваемое разбиение расчетной области. Предполагается, что толщина крыльев мала, они слабо отклонены от азимутальных плоскостей, их кромки острые. При выполнении этих условий применимо приближение тонкого крыла, согласно которому граничное условие непротекания, включающее в себя только направляющие косинусы поверхности крыла, но не координаты этой поверхности, задается не на истинной поверхности крыла, а на близкой к ней азимутальной плоскости. Точные граничные условия на консоли заменяются приближенными, которые получаются в пределе при стремлении к нулю толщины консоли. Граничные условия могут быть

построены с учетом профиля, поворота консоли в целом и вращения по крену [2]. На границе типа 3 расчетные узлы могут быть либо внутренними (и тогда должны быть поставлены условия непрерывности течения между областями), либо узлами, принадлежащими поверхности оперения. В последнем случае граничным условием служит условие непротекания. Для удовлетворения данных граничных условий на общей границе для каждой области вводят два дополнительных луча. Схема удовлетворения граничных условий выполняется после перехода на следующий слой по  $x$  и строится следующим образом:

1) если граничный узел внутренний, то условие непрерывности реализуется путем замены значений газодинамических функций на двух крайних лучах области значениями данных функций на этих же лучах (в физическом пространстве), но из другой соседней области, которые являются внутренними для нее. Пусть  $[m - 2]$  — номер луча, например, в области 1, соответствующей границе рассматриваемого типа. Данная граница соответствует лучу 3 в области 2. Тогда лучи  $[m - 1], [m]$  (дополнительные лучи) из области 1 соответствуют лучам  $[4], [5]$  из области 2, а лучи  $[1], [2]$  из области 2 соответствуют лучам  $[m - 4], [m - 3]$  из области 1. Условие непрерывности течения реализуется по формулам:  $U_{m-1}^1 = U_4^2; U_m^1 = U_5^2; U_1^2 = U_{m-4}^1; U_2^2 = U_{m-3}^1$ . Здесь  $U_i^1, U_i^2$  — газодинамические функции соответственно в первой и второй областях на  $i$ -м луче. Данный способ позволяет сделать шаг в каждой области независимо, а после выполнения шага интегрирования производится обмен информацией;

2) если граничный узел принадлежит поверхности крыла: когда крыло не изогнуто, проекция от нормали к поверхности крыла на ось  $r$  равна нулю. Тогда нормаль к поверхности крыла с симметричным профилем (профиль характеризуется углом наклона к срединной линии  $\mu$ ) и отклоненную на угол  $\delta$  можно записать в виде:

на подветренной стороне (область 1):  $\mathbf{n} = \sin(\delta - \mu)\mathbf{e}_x - \cos(\delta - \mu)\mathbf{e}_\phi$ ;

на наветренной стороне (область 2):  $\mathbf{n} = -\sin(\delta + \mu)\mathbf{e}_x + \cos(\delta + \mu)\mathbf{e}_\phi$ .

После определения нормали к поверхности крыла удовлетворение граничных условий происходит так же, как и на поверхности канала. При этом используются и корректируются значения газодинамических функций на  $[m - 2]$ -м луче для области 1 (в терминах, приведенных выше). Затем корректируются значения функций на лучах  $[m]$  и  $[m - 1]$  по формулам:  $U_m^1 = U_{m-2}^1; U_{m-1}^1 = U_{m-2}^1$ . Такая замена газодинамических функций на «мнимых» лучах имитирует плоский поток газа, одинаково направленный с потоком на соответствующей поверхности крыла.

В результате разработан достаточно простой метод расчета сверхзвукового течения внутри осесимметричного канала с учетом расположения в потоке тонкого оперения. Метод основан на построении многообластной осесимметричной сетки и линеаризации граничных условий на поверхности оперения.

**Течение в канале без оперения.** В качестве теста были проведены расчеты течения в коническом сопле, результаты сравнивались с приближением одномерной теории течения газа. При условии задания в начальном сечении профиля скорости таковым, что в каждой точке вектор скорости направлен вдоль лучей из центра конического сопла, течение в каждом сечении остается близким к однородному, а распределение газодинамических параметров вдоль оси сопла соответствует одномерной теории. На рис. 2 приведено сравнение давления по оси конического сопла: 1 — кривая соответствует одномерной теории, 2 — в начальном сечении задается поток, параллельный оси сопла, маркеры 3 — в начальном сечении в соответствии с конической симметрией. В начальном сечении число Маха  $M = 3$ . Видно, что в случае 2 течение не согласуется с одномерной теорией, так как при таком задании начальных условий поток становится в сопле существенно двумерным (рис. 3).

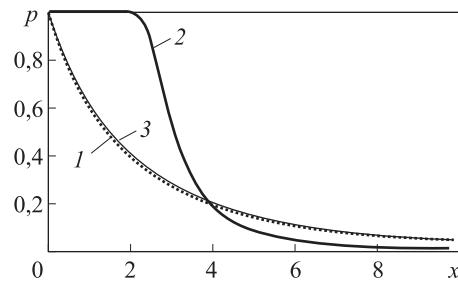


Рис. 2. Распределение давления на оси конического сопла

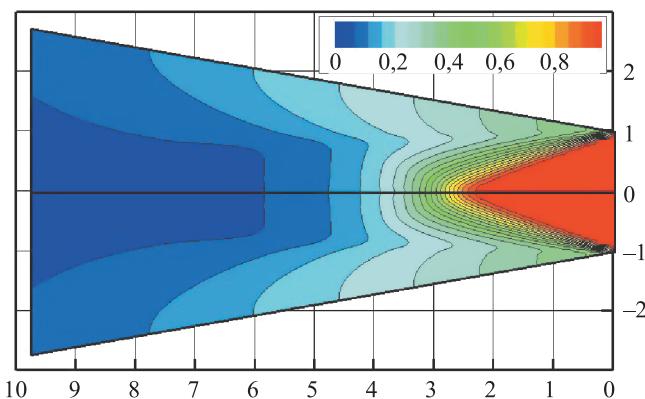


Рис. 3. Течение в коническом сопле  
в виде распределения давления

На рис. 4 приведен пример расчета течения в канале конус + цилиндр, что моделирует течение за срезом конического сопла ракеты, движущейся в цилиндрическом канале (контейнере).

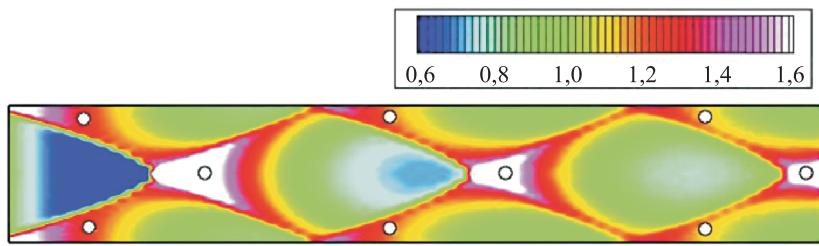


Рис. 4. Течение в канале конус + цилиндр

В начальном сечении, соответствующем точке перехода конуса в цилиндр  $M = 3$ , вектор скорости направлен вдоль лучей из центра конического сопла с углом полурасшлага  $\varphi = 10^\circ$ . Далее канал становится цилиндрическим, при этом от точки излома образуется волна сжатия. В канале, состоящем из расширяющегося сопла и длинного цилиндра, в цилиндрической части образуется «периодическое» течение из зон сжатия и разрежения, ограниченных ударными волнами. На рис. 4 представлено распределение давления в сечении, проходящем через ось канала (течение направлено слева направо, в качестве характерного значения — давление в начальном сечении). Отношение длины рассматриваемой части канала к диаметру начального сечения  $L/d = 6$ . Кружками обозначены начала зон повышенного давления.

**Течение в канале с аэродинамическими поверхностями.** На рис. 5 приведено течение в цилиндрическом канале при расположении в нем одной консоли около стенки канала (течение направлено справа налево).

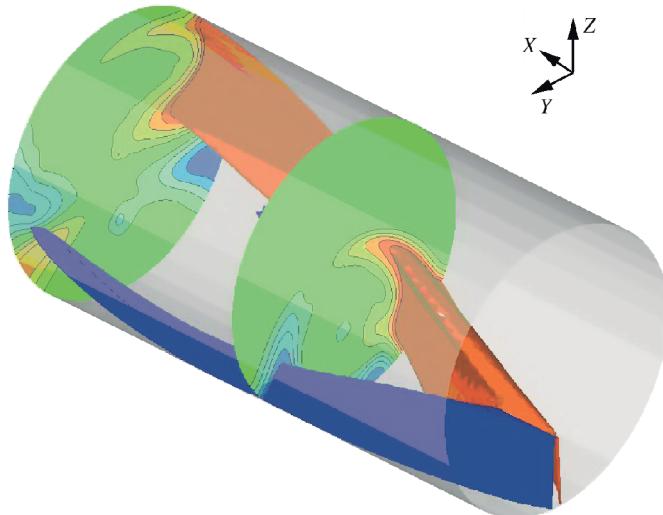


Рис. 5. Течение в цилиндрическом канале с одной консолью на стенке

Течение визуализируется выделением пространственных зон пониженного по уровню 0,9 (темным цветом) и повышенного по уровню 1,1 (более светлым цветом) давлений, генерируемых прямоугольной консолью, отклоненной на угол  $1^\circ$ . Размеры консоли: хорда  $b = 0,5R$ , размах одной консоли  $a = 0,5R$ , где  $R$  — радиус канала. Передняя кромка консоли расположена в начальном сечении канала. На рисунке консоль расположена между двумя выделенными зонами. В следе за консолью в двух сечениях приведены изолинии. Расчет выполнен при числе Маха в начальном сечении  $M = 3$ . Наветренная и подветренная стороны консоли генерируют соответственно волны сжатия и разрежения. За задней кромкой два данных потока взаимодействуют, что приводит к образованию зоны разрежения за волной сжатия и зоны сжатия за волной разрежения. Волны по длине канала развиваются в виде спирали. Увеличение числа  $M$  приводит к увеличению длины, на которой спираль делает половину оборота.

На рис. 6 представлено течение при наличии в канале двух консолей, отклоненных в разные стороны — для создания момента по крену. На начальном участке канала течение можно представить в виде суперпозиции двух течений с одной консолью. Образуется течение, обладающее свойствами симметрии. Несмотря на создание зон повышенного и пониженного давления на стенки канала, суммарная сила, действующая на канал в целом, равна нулю.

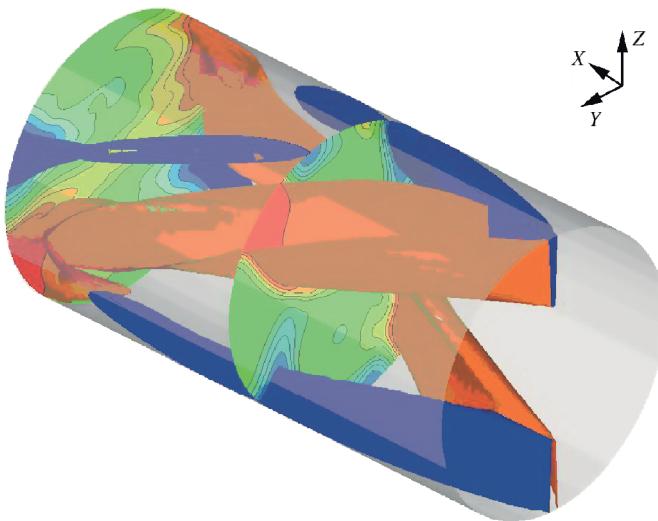


Рис. 6. Течение при наличии двух консолей

На рис. 7 приведены результаты расчета коэффициента подъемной силы консоли  $C_L$  (при отклонении её на  $1^\circ$ ) в цилиндрическом канале. За характерную площадь принята площадь двух консолей, за скоростной напор — скоростной напор в начальном сечении. На рис. 7, а приведено изменение подъемной силы консоли при изменении размаха

консоли  $a$ ; рассматривается консоль с размером хорды  $b$ , равным радиусу канала, установленная на границе канала. Линейная теория дает

оценку величины подъемной силы в виде  $Cn = \frac{4\alpha}{\sqrt{M^2 - 1}}$  (кривая 1)

или уточнение [4] в виде  $Cn = \frac{4\alpha}{\sqrt{M^2 - 1}} \left[ 1 - \frac{1}{2\lambda\sqrt{M^2 - 1}} \right]$  (кривая 3),

где  $\alpha$  — угол атаки;  $M$  — число Маха;  $\lambda = \frac{L^2}{S}$  — удлинение крыла;  $L$ ,

$S$  — размах и площадь двух консолей. Результаты расчетов представлены кривой 2. Уточнение позволяет учесть отрыв потока от кромок, однако при малых углах атаки дает заниженную оценку.

На рис. 7, б приведено значение  $Cn$  в зависимости от числа Маха  $M$ . Размеры консоли  $a = 0,5$ ,  $b = 0,5$ . Результаты расчетов можно аппроксимировать зависимостью  $Cn = \frac{4\alpha}{\sqrt{M^2 - 1}} \left[ 1 - \frac{1}{4\lambda\sqrt{M^2 - 1}} \right]$ , что является средним арифметическим между линейной теорией и уточнением [4].

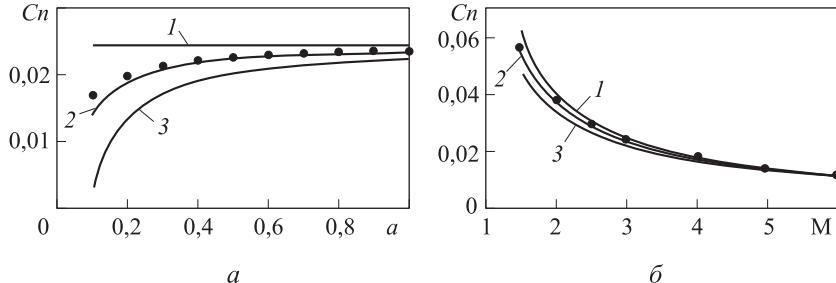


Рис. 7. Аэродинамические свойства консоли

При изменении наклона образующей канала по продольной координате в канале образуются волны сжатия и разрежения. Если производная растет, то образуется волна разрежения, если уменьшается — волна сжатия. Это свойство имеет место локально — около стенки канала. В целом течение в канале определяется площадью поперечного сечения. В реальных конструкциях аэродинамические поверхности устанавливают либо непосредственно в сопле в расширяющейся части, либо непосредственно за соплом, следовательно, представляет интерес течение именно в местах резкого изменения формы образующей — в местах существенно двумерного течения. На рис. 8 приведено изменение  $Cn$  в зависимости от угла  $\varphi$  наклона образующей канала. Передняя кромка расположена в начальном сечении  $S$  ( $M = 3$ ).

Размеры консоли  $a = 0,5$ ,  $b = 0,5$ . Одна из крайних точек передней кромки расположена на границе канала. Кривая 1 соответствует положению, когда до сечения  $S$  канал расширяется с углом наклона  $\varphi$ , а после становится цилиндрическим; кривая 2 — положению, когда до сечения  $S$  канал цилиндрический, а после расширяется с углом наклона  $\varphi$ , кривая 3 соответствует каналу с постоянным углом наклона  $\varphi$  — до и после сечения  $S$ . Величина  $C_n$  падает в условиях расширения потока и растет при его сжатии. В канале переменного сечения крыло попадает в неоднородный поток, что необходимо учитывать при оценке его аэродинамических свойств.

**Влияние отклонения консолей на канал.** При отклонении консолей в одну сторону — для создания момента по тангажу — суммарная сила, действующая на канал, не будет равна нулю, а именно: будет создаваться периодическая сила в направлении  $Y$ . На рис. 9 представлено течение ( $M = 3$ ) в цилиндрическом канале при отклонении двух консолей в одну сторону в виде зон повышенного и пониженного давления.

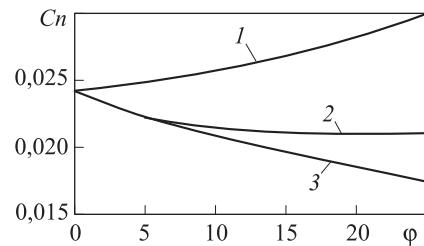


Рис. 8. Аэродинамическая характеристика консоли в местах изменения наклона образующей

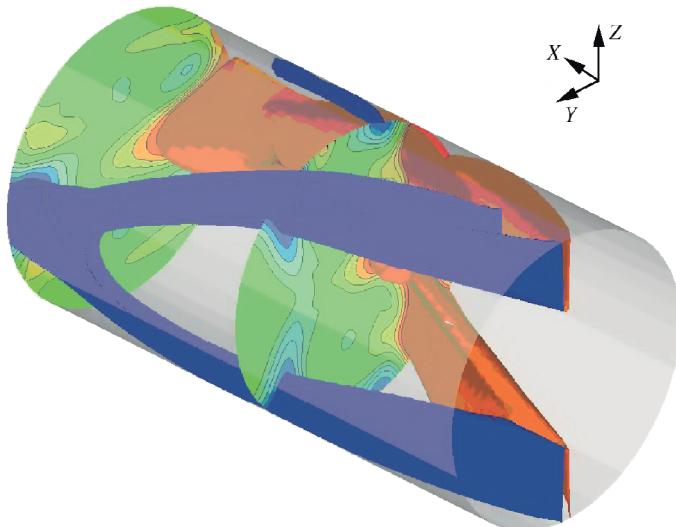
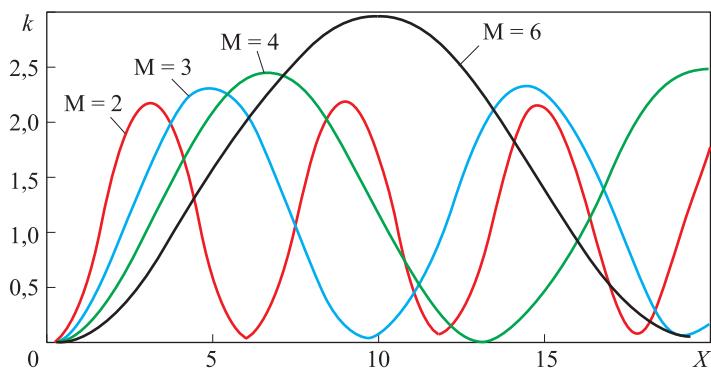


Рис. 9. Поле течения при отклонении консолей в одну сторону

При внешнем обтекании крыла, установленном на корпусе ракеты, введено понятие коэффициента интерференции: это отношение

подъемной силы, реализуемой на корпусе из-за скоса потока от крыла на корпус, к силе, созданной на крыле. Данное понятие может быть распространено и на рассматриваемую задачу. На рис. 10 приведен коэффициент интерференции в зависимости от длины цилиндрического канала (в радиусах канала) при различных числах Маха. Размеры консоли: размах  $a = 0,5R$ , хорда  $b = 0,5R$ . Передняя кромка консоли расположена в сечении  $X = 0$ . Максимальная сила, созданная на стенках канала, в 2 и более раз превышает силу, созданную на консолях. Коэффициент интерференции растет с увеличением числа Маха. После образования максимального воздействия суммарная сила, действующая на канал, уменьшается практически до нуля, затем опять растет. Сила по длине канала имеет выраженный периодический характер. Длина канала, на котором образуется максимальная сила, а затем сила уменьшается, увеличивается с числом Маха и составляет от 6 радиусов канала при числе Маха  $M = 2$  до 20 радиусов канала при  $M = 6$ . На одной половине длины волны создается сила в одном направлении, на другой половине — в другом.



**Рис. 10.** Влияние отклонения консолей на канал

Воздействие на канал определяется не только числом Маха, но и размерами хорды и размаха консоли (относительно диаметра канала). По результатам расчетов, хорда влияет на форму первой волны и максимальное значение интерференции, а размах — на форму воздействия.

**Заключение.** Разработан метод расчета сверхзвукового течения внутри осесимметричного канала с учетом возможности расположения в потоке тонких аэродинамических поверхностей. Метод основан на построении многообластной осесимметричной сетки и линеаризации граничных условий на аэродинамических поверхностях. Тестирование метода показало хорошее соответствие известным экспериментальным данным. Метод учитывает геометрию задачи и влияние отраженных волн от стенок канала на течение внутри канала, что по-

зволяет прогнозировать аэродинамические свойства аэродинамической формы в зависимости от ее местоположения в канале, а также воздействие формы, находящейся в канале, на стенки канала.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Каширкин А.А., Максимов Ф.А. Сверхзвуковое течение газа в осесимметричном канале с препятствиями. *XII школа-семинар «Современные проблемы аэрогидродинамики»: тезисы докладов*. Москва, Изд-во МГУ, 2004, с. 56.
- [2] Максимов Ф.А. Моделирование течения около малогабаритной ракеты. *Изв. Тульского государственного университета. Сер. Проблемы специального машиностроения*, 2001, вып. 4, ч. 1, с. 257–261.
- [3] Дунаев В.А., Максимов Ф.А. *Моделирование сверхзвуковых течений невязкого газа*. Тула: Изд-во ТулГУ, 2006, 180 с.
- [4] Косых А.П., Минайлов А.Н. Аэродинамические характеристики крыльев простейших форм на сверхзвуковых скоростях. *Труды ЦАГИ*, вып. 1891. Москва, Издательский отдел ЦАГИ, 1977.

Статья поступила в редакцию 15.11.2014

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Максимов Ф.А. Сверхзвуковое течение в осесимметричном канале. *Математическое моделирование и численные методы*, 2015, № 1, с. 109–120.

**Максимов Федор Александрович** родился в 1960 г., окончил МГУ им. М.В. Ломоносова в 1983 г. Д-р техн. наук, ведущий научный сотрудник Института автоматизации проектирования РАН. Автор более 90 научных публикаций.

e-mail: maximov@cfdu.ru

## Supersonic flow in axisymmetric channel

© F.A. Maksimov

Institute for Computer Aided Design of the Russian Academy of Sciences,  
Moscow, 123056, Russia

*The supersonic flows are implemented in an axisymmetric channel in many technical devices. These flows are in an expanding part of the nozzle or in the working part of supersonic wind tunnel. The method of supersonic flow calculation in an axisymmetric channel is developed. The method is based on the construction of multi-block axisymmetric grid and linearization of boundary conditions on the aerodynamic surfaces. Testing the method has showed good agreement with known experimental data. The method allows predicting the aerodynamic properties of the aerodynamic form, depending on its location in the channel, as well as the effect of the aerodynamic form on the channel walls in the channel.*

**Key words:** supersonic flow, axisymmetric channel.

## REFERENCES

- [1] Kashirkin A.A., Maksimov F.A. Sverkhzvukovoe techenie gaza v osesimmetrichnom kanale s prepyatstviyami [Supersonic Gas Flow in Axisymmetric

- Channel with Obstacles]. *Sovremennye problemy aerogidrodinamiki* [Modern problems of aerohydrodynamics]. XII school-seminar. Abstracts, Moscow, Moscow State University Publ., 2004, p. 56.
- [2] Maksimov F.A. *Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta Seriya Problemy spetsial'nogo mashinostroeniya – Proceedings of the Tula State University. Series: Problems of Special machinery Engineering*, 2001, vol. 4, no. 1, pp. 257–261.
  - [3] Dunaev V.A., Maximov F.A. *Modelirovaniye sverkhzvukovykh techeniy nevyazkogo gaza* [Simulation of Supersonic Non-viscid Gas Flows]. Tula, Tula State University Publ., 2006, 180 p.
  - [4] Kosykh A.P., Minaylos A.N. Aerodinamicheskie kharakteristiki krylyev prosteyshikh form na sverkhzvukovykh skorostyakh [The Aerodynamic Characteristics of the Simplest Form Wings at Supersonic Speeds]. *Proceedings of the Central Aerohydrodynamics Institute*, 1977, no. 1891.

**Maksimov F.A.** (b. 1960) graduated from the Lomonosov Moscow State University in 1983. Dr. Sci. (Engineering), leading scientist at the Institute for Computer Aided Design of the Russian Academy of Sciences. Research interests: computational aerodynamics, aerodynamics of aircraft. The author of more than 90 scientific publications.  
e-mail: maximov@cfdu.ru.