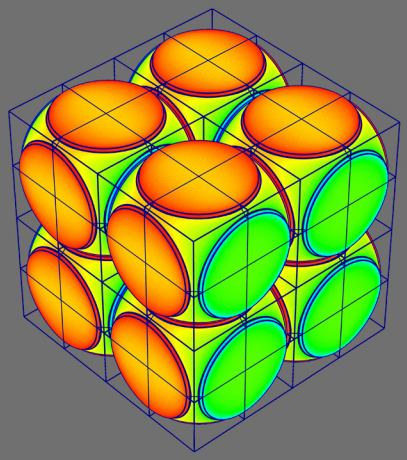
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Генералова А.А., Никулин А.А., Бычков Д.С. Математическое моделирование формирования волнистости шкивов бесступенчатой трансмиссии на основе операционноориентированного генетического алгоритма. Математическое моделирование и численные методы, 2026, № 2, с. 97–118

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/409/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.216.140
11.11.2026 09:39:29

УДК 51-74 DOI: 10.18698/2309-3684-2026-2-97118

Математическое моделирование формирования волнистости шкивов бесступенчатой трансмиссии на основе опероноориентированного генетического алгоритма

© А.А. Генералова, А.А. Никулин, Д.С. Бычков

Пензенский государственный университет, Пенза, 440026, Россия

Рассмотрен подход решения задачи формирования высотного параметра волнистости шкивов вариаторной трансмиссии путём оптимизации параметров операции чистового точения. При расчётах учитываются области варьирования факторов, определяющих выполнение процесса токарной обработки. Предложен алгоритм расчёта на основе эвристического подхода с использованием генетического алгоритма. Отмечено, что варьируемые параметры выделены в разные группы генов, представляющие собой опероны особи. Описана математическая формализация функции приспособленности, состоящей из двух этапов. Представлена MathCad-программа, автоматизирующая процесс математического моделирования поверхности. Установлено, что разные опероны могут оказывать разное влияние на итог моделирования. Верификация разработанного генетического алгоритма проводилась путём сопоставления с опытными данными. Сравнительный анализ показал хорошую сходимость исследуемых параметров и подтвердил адекватность математической модели и работы опероноориентированного генетического алгоритма.

Ключевые слова: *бесступенчатая трансмиссия, шкив, волнистость, режимы обработки, параметры резца, математическое моделирования, генетический алгорит, оперон, функция приспособленности, MathCad*

Введение. Бесступенчатые коробки передач в настоящее время представляют значительный исследовательский интерес для сообщества конструкторов-механиков. Такой интерес обусловлен требованиями автомобильной промышленности к более энергоэффективным и экологически чистым транспортным средствам. Запрос на повышение энергоэффективности и сокращение выбросов углекислого газа и оксидов азота продиктован экологическими соображениями и подталкивает многих исследователей к поиску нового технического решения для улучшения показателей выбросов современных автомобилей с двигателем внутреннего сгорания. Более того, в отличие от обычных ступенчатых передач, вариатор не страдает от «удара при переключении», и что позволяет достичь оптимального диапазона скоростей, при которых срок службы силового агрегата будет максимальным. Как следствие становится всё более важным дальнейшее повышение производительности бесступенчатых коробок передач с точки зрения эффективности, надёжности и крутящего момента [1-5].

Исследователи и разработчики прибегают к различным инженерным и технологическим решениям, чтобы повысить производительность вариатора. В работах [6, 7] предложены возможности усовершенствования бесступенчатой коробки передач за счёт минимизации зажимных усилий вариатора. Коллектив авторов предлагает обеспечивать такие усилия с помощью технологии управления проскальзыванием, что позволяет обеспечивать максимально возможную эффективность трансмиссии в сочетании с повышенной надёжностью и устойчивостью к повреждениям от проскальзывания.

Исследования проскальзывания в бесступенчатой трансмиссии так же описаны в работах [8, 9]. Авторы предлагают повышать эффективность ременных приводов за счет снижение потерь электроэнергии. В работах отмечено, что добиться высокой производительности бесступенчатых ременных приводов с клиновым ремнем можно только при правильном выборе конструктивных параметров, что возможно только после точного определения эксплуатационных характеристик, уникальных для систем ременного привода этого класса.

В исследованиях [3, 5] предпринята попытка улучшить коэффициент трения между ремнём и шкивом путем регулирования свойств поверхности шкива и улучшения работы жидкости вариатора.

В работе [10] авторы также предлагают улучшить эксплуатационные параметры автомобильного вариатора путём регулирования свойств поверхности шкива, однако вместо шероховатости предлагают сделать акцент на таком показателе микронеровности как волнистость. Проведённые натурные эксперименты подтверждают справедливость такого предложения.

Волнистость поверхности в значительной степени является нежелательным показателем, так как приводит к снижению эксплуатационных характеристик контактных пар. Поэтому исследования волнистости направлены, как правило, на её минимизацию либо полное устранение [11, 12]. В своих работах [13, 14] авторы исследуют основные технологические параметры лезвийной обработки, которые позволяют обеспечивать необходимые количественные характеристики волнистости. За основную технологическую операцию, которая способна обеспечить необходимую поверхностную текстуру шкивов вариатора в данной работе предлагается принять операцию чистового точения. Данный подход объясняется тем, что операция чистового точения сопровождается высокими скоростями вращения шкива, что приводит к возрастанию центробежных сил и как следствие возникновению амплитуды автоколебаний. При воздействии силы резания через резец на заготовку в процессе вращения, возникают упругие отжатия заготовки, и возникают вынужденные колебания [13, 14]. Это способствует дальнейшему увеличению амплитуды

и снижению частоты колебаний, именно эти факторы обеспечивают формирование волнистости на поверхности шкива. Кроме того, операция чистового точения является завершающей процедурой при токарной обработке резанием.

В качестве основного параметра исследования выбран показатель качества поверхности изделия, а именно высотный параметр волнистости, который является основной характеристикой волнистого микропрофиля. Такой показатель качества поверхности как волнистость принято отображать кривой линией, которая отображается в виде графика и показывает волнограмму исследуемой поверхности. Волнограммы реального профиля получают при помощи измерительных приборов, называемых профилометрами. В данной работе волнограммы поверхности предлагается получать при помощи смоделированной текстуры поверхности [13]. Моделирование и измерение волнистости необходимо производить вдоль образующей конуса шкива. Такое измерение обусловлено характером обработки. Так как скорость вращения заготовки в разы выше скорости подачи, на обработанной поверхности шкива на большей части площади формируются продольные волны. Для оценки высотных и шаговых параметров волнистости снятие волнограмм необходимо проводить перпендикулярно траекториям волн, то есть вдоль образующей конуса.

При токарной обработке цилиндрических и конических деталей перед инженером-технологом стоит сложная задача выбора наиболее приемлемых режимов резания, для того чтобы получить поверхности с определенным микропрофилем. К режимам резания на этапе чистового точения относятся такие параметры процесса как время и глубина обработки, скорость, подача, частота вращения шпинделя станка, объём смазочно-охлаждающей жидкости. Параметры режущей части инструмента также формируют процесс точения, то есть отвечают за текстуру формируемой поверхности. В этой связи помимо параметризации процесса следует решать задачу оптимизации для получения требуемого значения параметра волнистости при заданных диапазонах факторов, определяющих выполнение процесса токарной обработки. В данной работе предложен алгоритм для выявления значения высотного параметра волнистости на основе эвристического подхода с использованием генетического алгоритма.

Математическая постановка задачи, принятые допущения. Генетические алгоритмы (ГА) давно показали свою эффективность при решении задач различной направленности [15-19]. ГА позволяют обеспечивать оптимизацию состояния большого пространства. В отличие от других методов они не ломаются при незначительном изменении входных данных или наличии шума.

Как отмечено выше, варьируемыми параметрами процесса токарной обработки являются время и глубина обработки, скорость,

подача, частота вращения шпинделя станка, а также параметры инструмента. Существуют токарные проходные резцы с различным расположением режущей пластины (рис. 1). В связи с этим при изменении угла ее расположения относительно державки резца, можно изменять характер обработки (стружкообразование, глубину резания, получаемую чистоту поверхности).

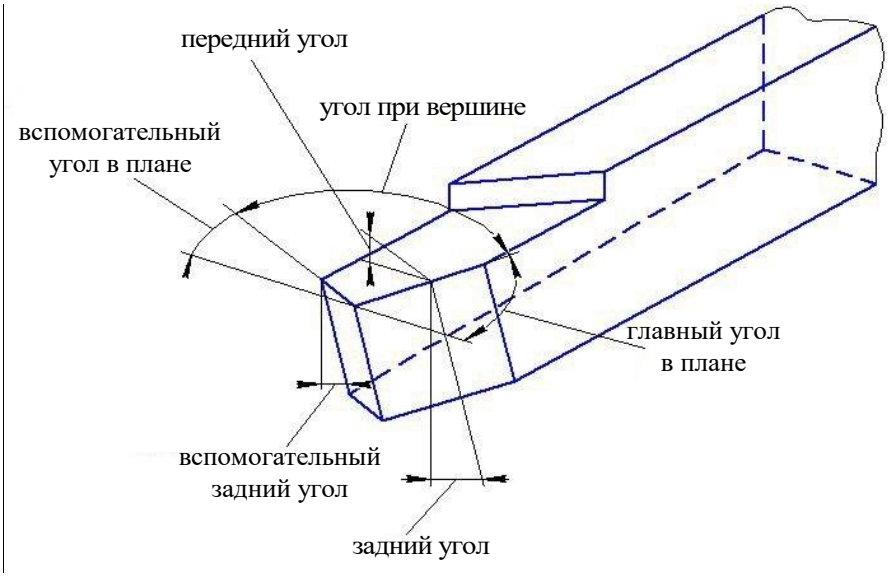


Рис. 1. Схема расположения углов режущей пластины

В зависимости от угла расположения режущей пластины относительно державки резца, различают углы, которые в наибольшей степени влияют на параметры формируемой волнистости: это главный и вспомогательный углы в плане, угол наклона главного лезвия, главный угол в плане. Кроме этого, на формируемую геометрию влияет также радиус при вершине режущей пластины. В соответствии с ГОСТ 18878-73 регламентируются стандартные углы заточки режущих пластин, меняющиеся в заданном диапазоне, то есть набор углов является фиксированным для каждого резца [20, 21]. Таким образом, варьируемые параметры процесса чистового точения при формировании волнистости можно разделить на две группы. Первая группа - кинематические параметры, такие как частота относительных колебаний резца и заготовки, частота вращения заготовки, амплитуда относительных колебаний резца и заготовки и подача режущего инструмента вдоль образующей. В первой группе параметры являются распределёнными непрерывно и равномерно в области поиска. Вторая группа – статические параметры, такие как углы резца и радиус скругления вершины резца. Эта группа параметров является дискретной.

Каждый параметр процесса обработки в ГА является отдельным геном. Исходя из того, что варьируемые параметры выделены в две группы генов, предлагается работать с ними как с естественными, обусловленными физикой и механикой процесса резания, генетическими единицами – оперонами.

Термин «Оперон» заимствован из молекулярной биологии и означает участок бактериальной хромосомы, состоящий из группы функционально связанных структурных генов и регуляторных элементов [22-25]. Таким образом, формируемая особь аналогично биологическому смыслу представляет собой структуру из двух оперонов, кодирующих форму резца и характеристики его движения. Решаемая задача состоит в нахождении таких двух оперонов, которые приведут к минимизации отклонений формы моделируемой поверхности от формы искомой «волнистости», задаваемой пользователем.

Математическая формулировка задачи. Математическая формулировка задачи состоит в следующем. Формируемую особь, состоящую из двух оперонов, с математической точки зрения удобно представить в виде блочной совокупности (1) параметров. При программной обработке блочная структура, по сравнению с гомогенным набором параметров, в среде математического моделирования MathCad позволяет удобно и наглядно раскрывать такие системы, кроме того, уменьшается вероятность ошибки в индексации при доступе к переменной по индексу. Аналогичный подход применяется в ряде других полноценных языков программирования по типу Python или JavaScript и носит название «деструктуризация массива».

$$O = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} \chi \\ \omega \\ A \\ s \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \\ i_\rho \end{pmatrix} \end{bmatrix}, \qquad (1)$$

где χ — частота относительных колебаний резца и заготовки;

ω — частота вращения заготовки;

A — амплитуда относительных колебаний резца и заготовки;

s — подача режущего инструмента вдоль образующей;

i_α — индекс в массиве допустимых главных углов резца;

i_β — индекс в массиве допустимых вспомогательных углов резца;

i_ρ — индекс в массиве допустимых радиусов скругления вершины резца.

Как отмечено выше количественным и качественным параметром волнистости является волнограмма. В соответствии с ГОСТ 2789–73 сновной характеристикой волнистости поверхности детали является «коэффициент волнистости», определяемый как отношение длины шага S_w к высоте волны W_z, находящейся в диапазоне [50…1000]. В данной работе предлагается использовать имитационное моделирование процесса точения для получения виртуальной волнограммы.

Каждая виртуальная волнограмма представляет собой набор точек вдоль одной прямой (в радиальном направлении), то есть дискретную функцию. Волнограммы поверхности на различных рассматриваемых участках в пределах диапазона волнистости могут отличаться своими параметрами в следствии того, что процесс токарной имеет в своём составе стахостические факторы [13], в ряде случаев, приводящих к текстуре поверхности заготовки в виде системы наложенных друг на друга волн спирального вида. В этой связи в данной работе предлагается рассматривать виртуальную волнограмму относительно двусторонне-ограниченного функционала $F^{\min,\max}$. Такой подход можно объяснить тем, что функционал определён сразу в двух точках для одного аргумента функции, а математический вид функционала может быть практически любым. Верхнюю $f^{\max}$ и нижнюю $f^{\min}$ границы этого функционала удобно задать периодическими функциями (синусоидами), так как волнистость, в сущности, это периодическая форма поверхности, причём желаемые длина S_w и высота W_z искомой волнограммы заклыдаваются в этих функциях. Такая идея по своей геометрической сути напоминает лекало, у которого двусторонне-ограниченно функционал – это трафарет, в соответствии с которым ищется нужная виртуальная волнограмма.

Таким образом, математическая формализация функции приспособленности [26, 27] представляет собой последовательность из двух этапов. На первом этапе происходит формирование виртуальной волнограммы путём моделирования точной формы обработанной поверхности. Эта форма полностью определена параметрами (хромосомами/оперонами) текущей особи. На втором этапе вычисляются отклонения виртуальной волнограммы от заданного двусторонне-ограниченного функционала.

Так как в данном случае для работы алгоритма важно, чтобы величина отклонения была обратно пропорциональна величине приспособленности особи (то есть высокая приспособленность это низкое отклонение от искомой формы волны), а также учитывая такие особенности двусторонне-ограниченного функционала $F^{\min,\max}$, как разрыв области определения (область между функций $\left\{ f^{\min}, f^{\max} \right\}$, то в

качестве функции вычисления отклонений предлагается использовать самую простейшую метрику на основе L_1-нормы [28, 29], так как она пропорциональна и эквивалентна в обе стороны отклонений.

Норма L_1 так же выглядит более предпочтительной ещё и потому, что она зависит от отклонений линейно, тогда как L_2 и более высокие нормы имеют степенные зависимости. Это будет приводить к тому, что ГА будет более остро реагировать на большие отклонения и менее остро на малые, то есть ухудшится локальная сходимость оптимизации (хотя и улучшает макросходимость на средних масштабах в рамках задачи).

Всё вышеизложенное в совокупности приводит к тому, что в качестве приспособленности каждой особи популяции был выбран показатель $E(g)$, заданный формулой (2):

$$E(g) = \sum_{i=0}^{n} \min\left(\left|g_i - f_i^{\min}\right|_1, \left|g_i - f_i^{\max}\right|\right), \tag{2}$$

где $E(g)$ — показатель приспособленности особей (фитнесс-функция);

g — виртуальная волнограмма (линейный массив точек / дискретная функция;

скобками вида $\left|\ \right|_1$ обозначена L_1 — норма.

Функции $f^{\min}$ и $f^{\max}$, используемые при поиске решения, удобно определить одной и той же функцией, смещённой по оси ординат. В таком случае они не пересекаются и одна из них $\left(f^{\max}\right)$ всегда выше другой $\left(f^{\min}\right)$, следовательно формула (2) может быть заменена на систему уравнений (3), которая проще в реализации:

$$E\left(g\right) = \sum_{i=0}^{n} \begin{cases} \left|g_i - f_i^{\max}\right|_1 \ если\left(g_i > f_i^{\max}\right), \\ 0, если\left(g_i \le f_i^{\max} \wedge g_i \ge f_i^{\min}\right), \\ \left|g_i - f_i^{\min}\right|_1 \ если\left(g_i < f_i^{\min}\right). \end{cases} \tag{3}$$

В следствии того, что поиск опимального набора параметров процесса резания происходит в ограниченной области, был введён массив ограничений $\max\min_wave$, заданный в виде таблицы из двух столбцов, в первом из которых указываются минимальные границы области поиска параметра, а во втором максимальные границы. Набор ограничений $\max\min_wave$ области поиска выглядит следующим образом (4):

$$\max\min_wave = \begin{pmatrix} \chi_\min & \chi_\max \\ \varpi_\min & \varpi_\max \\ A_\min & A_\max \\ s_\min & s_\max \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Как отмечено выше, параметры поиска разделены на два оперона (две группы). Первый оперон – параметры, распределённые непрерывно равномерно в области поиска:

– частота относительных колебаний резца и заготовки, $\chi \in [10...300]$, (Гц);

– частота вращения заготовки, $\varpi \in [700...2000]$, (об/мин);

– амплитуда относительных колебаний резца и заготовки, $A \in [0,005...0,07]$, (мм);

– подача режущего инструмента вдоль образующей обрабатываемого шкива, $s \in [0,1...0,8]$, (мм/об).

Второй оперон – дискретные параметры, заданные индексами в массивах допустимых наборов:

– индекс в массиве допустимых главных углов резца i_α, где $\alpha \in list_\alpha = \{30, 45, 80, 90\}$, (градусы);

– индекс в массиве допустимых вспомогательных углов резца i_β, где $\beta \in list_\beta = \{10, 15, 20, 30\}$, (градусы);

– индекс в массиве допустимых радиусов скругления вершины резца i_ρ, где $\rho \in list_\rho = \{0.5, 1.0, 2.0, 3.0, 4.0\}$, (мм).

Численный алгоритм решения задачи. В рамках реализации двустороннеограниченного функционала $F^{\min,\max}$, задаваемого в виде двух параллельных функций, в среде MathCad было принято использовать в качестве носителя специальные *callback*-функции в виде параметризованных гармонических функций *baseFunc*, сочетающую в себе амплитуду A_f, частоту k и фазу базовой функции φ. В общем виде эта функция имеет следующий вид:

$$baseFunc(x, A_f, k, \varphi, d) = A_f \cdot \sin(k \cdot x - \varphi) + d, \quad (5)$$

где x — аргумент гармонической функции;

A_f — амплитуда гармонической функции;

k — частота гармонической функции;

φ — фаза гармонической функции;

d — смещение уровней максимума и минимума.

Смещение d необходимо назначать так, чтобы амплитуда A_f в совокупности с длинной волны S_w определяла желаемый коэффициент волнистости. Для получения адекватных результатов поиска необходимо соблюдать важное условие: вершины волн синусоиды $f^{\min}$ должны быть выше впадин волн синусоиды $f^{\max}$. Это перекрытие будет вынуждать ГА искать решение с колебаниями. В противном случае ГА может найти режим без колебаний (например, с минимальной амплитудой или с колебаниями, идущими в противофазе, такими что результирующая волнограмма будет практически плоской, находящейся между двумя функциями $f^{\max}$ и $f^{\min}$). Визуальное представление *callback*-функций показано на рис. 2.

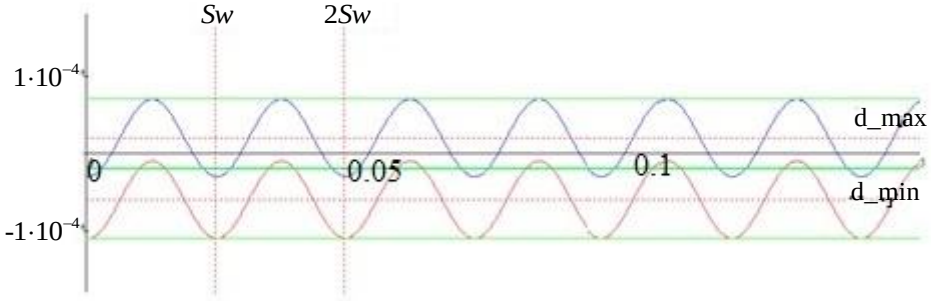


Рис. 2. График *callback*-функций, реализующих двусторонне-ограниченный функционал

В основе формирования виртуальной волнограммы лежит блочная структура особи O (6), состоящей из двух оперонов: оперон p_view, кодирующий кинематику движения и оперон p_geom, который кодирует статические параметры:

$$O = \begin{bmatrix} (p_view) \\ (p_geom) \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Наборы p_view и p_geom представляют собой два списка данных, которые содержат необходимые настройки для формирования правильного «вида» $(view)$ модели (симуляции обработки правильного участка нужного размера и формы для использования в ГА) и заданной геометрии (внешний и внутренний радиусы обрабатываемой заготовки). Деструктуризация параметров «вида» p_view и геометрии p_geom описывается зависимостями (7) и (8).

$$p_view = \begin{pmatrix} scale \\ H \\ W \\ x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \tag{7}$$

где $scale$ — масштаб, охватывающий всю образующую полностью;

H — высота матрицы моделирования результирующей поверхности после лезвийной обработки;

W — ширина матрицы моделирования результирующей поверхности после лезвийной обработки;

x_0 — центр по оси абсцисс отображения результатов моделирования, который расположен точно в центре образующей;

y_0 — центр по оси ординат.

$$p_geom = \begin{pmatrix} R \\ r \end{pmatrix}, \tag{8}$$

где R — внешний радиус холста;

r — внутренний радиус холста.

Так как в данной работе оптимальные параметры резания определяются на основе сравнения виртуальной волнограммы результата моделирования с двусторонне-ограниченным функционалом, то моделировать обработку всей поверхности нет необходимости, это только увеличит накладные временные расходы. Поэтому с целью оптимизации вычислительных расходов параметры вида p_view предлагается устанавливать в зависимости от параметров геометрии p_geom и коэффициента качества моделирования поверхности K. Коэффициент K фактически является эквивалентом дискретности моделирования, так как он указывает на количество пикселей (длинну дискретной функции g_i от которой зависит приспособленность особи $E(g)$) вдоль всей длинны образующей. В этом случае уравнение (7) преобразуются к следующему виду:

$$p_view = \begin{pmatrix} \frac{R-r}{K} \\ 1 \\ K \\ \frac{R+r}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

где $\frac{R-r}{K}$ — это масштаб моделирования $scale$, зависящий от геометрии;

$H=1$ — высота холста 1 пикселю, то есть в данном случае матрица результатов моделирования вырождается в вектор-строку, и фактически будет являться линейным массивом g_i;

K — ширина W матрицы моделирования, имеющая K штук пикселей;

$\frac{R+r}{2}$ — центр x_0 по оси абсцисс между внешним R и внутренним r радиусами;

$y_0=0$ — центр y_0 по оси ординат не смещён.

С целью упрощения и автоматизации задания параметров в автоматизированной среде MathCad была создана функция $view_from_geom(p_geom,K)$, показанная на рис. 3, реализующая генерацию параметров «вида» p_view в зависимости от геометрии заготовки p_geom показателя разрешения моделирования K.

$$\text{view_from_geom}(\text{p_geom},\text{K}) := \left| \begin{pmatrix} \text{R} \\ \text{r} \end{pmatrix} \leftarrow \text{p_geom} \right. \\ \left(\begin{matrix} \frac{\text{R}-\text{r}}{\text{K}} \\ 1 \\ \text{K} \\ \frac{\text{R}+\text{r}}{2} \\ 0 \end{matrix} \right)$$

Рис. 3. Функция-генератор параметров «вида» в автоматизированной среде MathCad

В целом используемый генетический алгоритм по своей базовой структуре эквивалентен классическому генетическому алгоритму, описанному в литературе [15 – 19]. В нем реализована базовая структура эпох, в рамках каждой из которых происходит отбор лучших особей, их скрещивание, мутации и расчёт функции приспособленности.

В процессе мутации каждая особь из популяции с вероятностью ε_mut подвергается случайным мутациям величиной λ_mut. В данном ГА были использованы «относительные» мутации, отличающиеся от «абсолютных» тем, что величина мутации λ_mut задаётся

в процентах от области поиска (заданной в массиве $\max \min_ wave$), это позволяет задавать величину мутаций универсально не зависимо от диапазона варьирования переменной, так как варьируются одновременно и паарметры имеющие величины порядка 10^{-6} и величины имеющие порядок 103 единиц.

При скрещивании для каждой особи из популяции выбирается случайная (с равномерным распределением) особь из той же популяции и генерируется особь-потомок. Потомок получает каждый ген от каждого из родителей с вероятностью 50/50.

Далее для каждой особи из популяции, прошедшей скрещивание и мутации, моделируется виртуальная волнограмма и рассчитывается её отклонение от двусторонне-ограниченного функционала. На рис. 4 показана функция вычисления приспособленности одной особи $fit(\ )$, в которой реализована деструктуризация параметров, моделирование и вычисление отклонений для каждой особи.

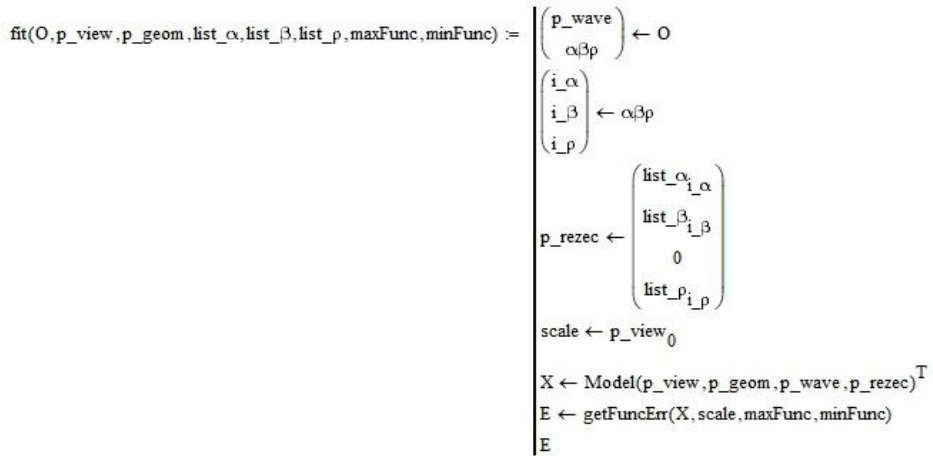


Рис. 4. Вид функции вычисления приспособленности каждой особи

Функция $Model(\square)$ на рис. 4 реализует моделирование виртуальной волнограммы. Подробно алгоритм геометрического моделирования текстуры волнистости шкива описан в работе авторов [13]. Функция $getFuncErr(\ )$ вычисляет отклонение результата моделирования процесса резания от желаемой формы как отличие волнограммы, полученной в виде линейного массива значений неровностей обработанной поверхности, от заданной в двусторонне-ограниченном функционале пары функций.

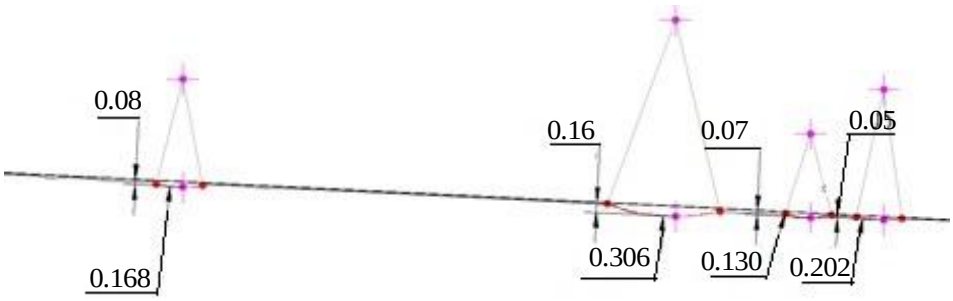
Для избежание попадания в локальные экстремумы в ГА введена возможность генерации случайных особей на каждой эпохе. Особи со случайными оперонами (характеристиками) генерируются функцией

используемой и для генерации начальной популяции и добавляются в конец списка особей всей популяции.

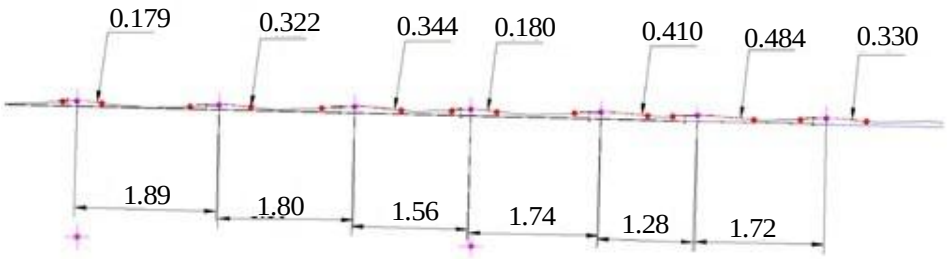
Кроме того, важно выделить особенности мутирования оперонов, точнее их отдельных параметров. Так как одна группа параметров (кинематические) имеет непрерывное распределение в области определения, а другая группа параметров (статические/геометрические) дискретна и задана в специальных списках, особи содержат в опероне отвечающем за геометрию резца не сами параметры, а индексы из списков параметров ($list_\alpha$, $list_\beta$, $list_\rho$). Чтобы сохранить некую форму направленности поиска, все параметры расположены в линейном порядке, чтобы мутации индекса (его увеличение, либо уменьшение) сочетались с изменениями лежащих в ячейках под этими индексами величин, то есть при увеличении индекса, увеличивается и значение под этим индексом. При этом, сам порядок не важен, он может быть и обратным, главное, чтобы он был линейно упорядочен. В противном случае, если параметры будут случайно распределены между индексами, их поиск будет сводиться сугубо к случайному перебору всех параметров. В этом случае ГА в некотором смысле выродится в алгоритм локального поиска, оценивающий случайные точки окрестности. Таким образом, функция поиска оптимальных значений параметров лезвийной обработки шкивов представляет собой оперонориентированный генетический алгоритм.

Примеры численного решения задачи. Верификация разработанного ГА проводилась путём сопоставления с опытными данными. В работе [30] авторами установлено, что при высоте волнистости $W_z = 110...117$ мкм и средней длины волны $S_w = 12.8$ мм коэффициент полезного действия (КПД) вариаторной передачи будет максимальным. При увеличении высоты волнистости сила трения между ремнём и шкивом будет превышать силу тяги. Это приведёт к тому, что крутящий момент не будет полностью реализовываться передачей, и будет наблюдаться проскальзывание ремня и, как следствие, снижение КПД. Если же лонистость будет меньше, то будет наблюдаться рост силы трения за счет возрастания фактической площади контакта. Это приведет росту температуры в области контакта ремня со шкивом. За счет этого часть передаваемой мощности станет направлена на нагрев ремня и шкива и будет наблюдаться снижение КПД. Кроме того, в результате перегрева будет наблюдаться изменение физических свойств материалов ремня и шкива, что поспособствует более интенсивному износу [30, 31]. Исследуемый шкив изготовлен на обрабатывающем центре с ЧПУ DMG MORI NTX1000 со следующими режимами токарной обработки: частота вращения шпинделя 20.83 об/с, подача 0.48 мм/об, скорость резания 194 м/мин, глубина резания 1.2 мм. Обработка исследуемой поверхности шкива проводилась при

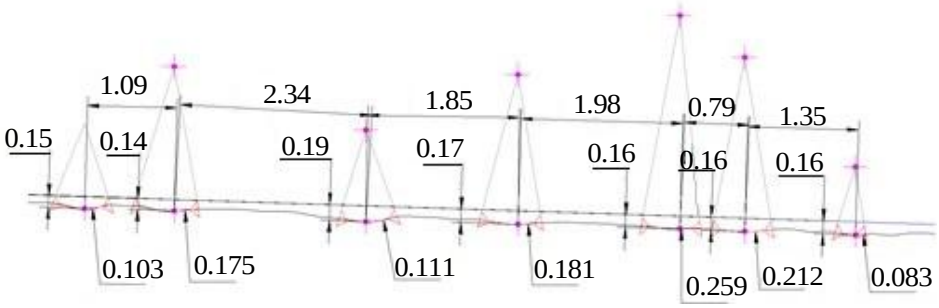
помощи токарного резца с режущей частью из материала Т5К12В. Используемый резец имеет следующие параметры режущей части: главный угол в плане – 30^0, передний угол – 10^0, угол наклона главного лезвия – 5^0, радиус при вершине – 2^0. В качестве заготовки для шкивов использовался прокат «Круг» диаметром 180 мм, материал соответствует заложенному производителем – Сталь 45 ГОСТ 1050-2013 [14]. Микропрофиль шкива исследован при помощи профилометра CONTUROMATIC TS. Измерение параметров волнистости происходило в 4 областях (вдоль образующих конического шкива), равномерно распределенных по рабочей поверхности шкива (рис. 5).



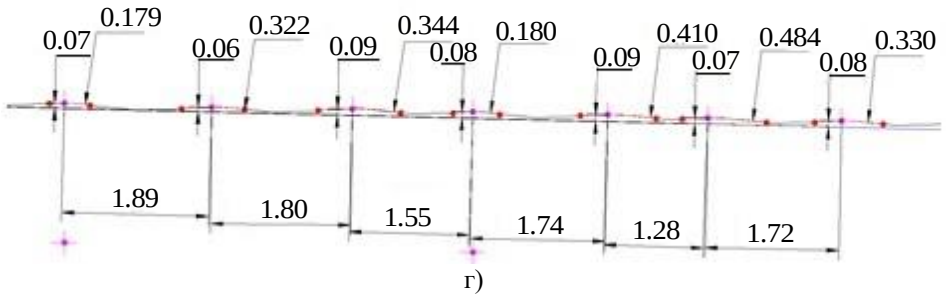
а)



б)



в)



г)

Рис. 5. Волнограммы поверхности экспериментального шкива:
а) — волнограмма области № 1 $W_z = 90$ мкм;
б) — волнограмма области № 2 $W_z = 120$ мкм;
в) — волнограмма области № 3 $W_z = 160$ мкм;
г) — волнограмма области № 4 $W_z = 77$ мкм

В этой связи пределы двусторонне-ограниченного функционала будут для каждой из двух функций: амплитуда $A_f = 55$ мкм; частота $k = 490.874$; фаза $\varphi = 0$; смещение $d = 5$ мкм для верхней границы и $d = -5$ мкм для нижней границы.

По истечении работы ГА выводится лучшая найденная особь и график истории приспособленностей (рис. 6), на графике видно, что алгоритм завершился за 100 итераций.

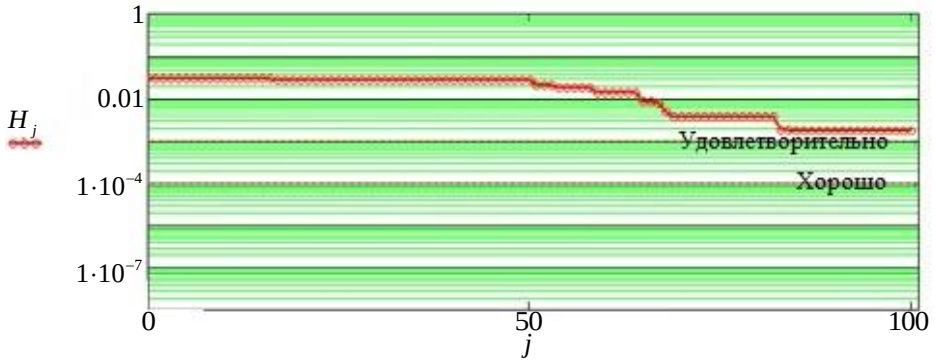


Рис. 6. График приспособленностей H_j лучшей особи по эпохам j

Лучшая найденная особь содержит следующие параметры:
- частота колебаний резца: 20.049 Гц;
- частота вращения шпинделя: 20.83 об/с;
- амплитуда колебаний: 0.059 мм;
- подача инструмента: 0.48 мм/об;
- главный угол: 30^0;
- вспомогательный угол: 20^0;
- радиус скругления вершины резца: 2 мм;

– высота волнистости $W_z = 0.112$ мм.

Участок поверхности соответствующих этой особи представляет собой следующую карту высот (рис. 7), на ней легко прослеживается волнистость, имеющая среднюю длину волны порядка $S_w = 12.8$ мм и амплитуду $W_z = 0.112$ мм, что соответствует коэффициенту волнистости 114 единиц.



Рис. 7. Карта высот, получаемая при найденных оптимальных параметрах обработки заготовки

Эту же карту высот (рис. 7) обработанной поверхности можно вывести на дисплей в совокупности с поисковыми кривыми (рис. 8). Установлено, что двусторонне-ограниченный функционал позволяет получать решения с заданной волнистостью (а точнее не ниже неё).

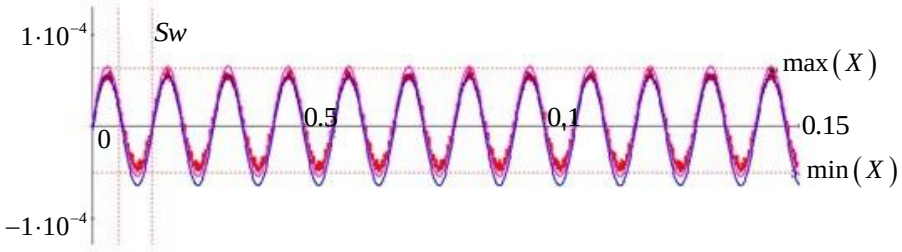


Рис. 8. График карты высот при оптимальном режиме и поисковые кривые, ограничивающие функционал

Визуализация работы ГА показала, что при переборе случайных углов резца для одинаковой динамики резания разные опероны оказывают разное влияние на процесс моделирования поверхности. Оперон, отвечающий за кинематику, кодирует более масштабные преобразования, касающиеся в общей «формы» всей обрабатываемой поверхности. Тогда как оперон, отвечающий за статические параметры, кодирует локальные преобразования касающиеся формы конкретных неровностей по типу формы «волн» волнистости.

Значения экспериментальных показателей процесса точения и высоты волнистости практически совпадают со значениями параметров, полученным при помощи ГА. Таким образом, анализ полученных результатов позволяет судить об адекватности предлагаемого ГА. Высокая точность оптимизируемых параметров обуславливается глубокой проработкой теоретических положений.

Выводы и рекомендации. Предложен способ представления блочной структуры особи с помощью оперонов. Каждый оперон

представляет собой группу параметров процесса чистового точения, таких как кинематические и статические. Установлено, что каждый оперон оказывает разное влияние на итог оптимизации.

Предложена математическая формализация функции приспособленности параметров волнистости шкивов бесступенчатой трансмиссии на основе L_1-нормы отклонений, состоящая из двух этапов. На первом этапе происходит моделирование волнограммы, определённой параметрами оперонов текущей особи. На втором этапе вычисляется отклонение смоделированной волнограммы от двустороннеограниченного функционала.

Разработан опероноориентированный генетический алгоритм поиска оптимальных значений параметров лезвийной обработки шкивов. Мутации оперона основана на линейной упорядоченности индексов параметров процесса.

Верификация результатов математического моделирования проводилась путём сопоставления с результатами натурного эксперимента. Сравнительный анализ показал хорошую сходимость исследуемых параметров и подтвердил адекватность математической модели и эффективности работы опероноориентированного генетического алгоритма.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Generalova A.A., Nikulin A.A. Increasing the vehicle's dynamic performance by developing a continuously variable transmission. *Journal of Engineering and Applied Sciences*, 2019, vol. 14, no. 18, pp. 6866-6875.

[2] Aladagli I. *Advanced CVT Modeling and Control. PhD Thesis*. Eindhoven: Technische Universiteit Eindhoven, 2015, 150 p.

[3] Yagyaev E., Shron L., Meniuk D. Increasing the operational reliability of car variators due to creating regular surface microrelief by laser ablation. *IOP Conference Series Materials Science and Engineering*, 2020, vol. 889, no. 1, art. no. 012007.

[4] Zverovshchikov A.E., Generalova A.A., Nikulin A.A. Ensuring the performance characteristics of a friction V-belt variator. *Journal of Physics: Conference Series*, 2020, vol. 1679, art. no. 042079.

[5] Yamazaki M., Kato Y., Nakahara T., Ichihashi T. Research on improvement of transmission efficiency by improving friction coefficient between elements and pulleys of a belt CVT. *Review of Automotive Engineering*, 2008, vol. 29, no. 4, pp. 485-492.

[6] Bonsen B., Klaassen Tim, Pulles R.J., Simons S.W.H., Steinbuch M., Veenhuizen P.A. Performance optimisation of the push-belt CVT by variator slip control. *International Journal of Vehicle Design*, 2005, vol. 39, no. 3, pp. 232-256.

[7] Abo K., Kobayashi M., Kurosawa, M. Development of a metal belt-drive CVT incorporating a torque converter for use with 2-liter class engines. *SAE Technical Papers, Conference: International Congress & Exposition*, 1998.

[8] Garud V., Awadhani L., Vivekanandan N., Panchawadkar A., Lakade S., Tiwari H. Investigation of slip and speed ratio in axially displaceable cone variator CVT drive. *Conference: International Conference on Electrical, Electronics, and Optimization Techniques (ICEEOT)*, 2016.

[9] Wojciech S-S., Dobaj K., Kot A. Frictional problems in continuously variable transmission belt drives. *Tribologia*, 2017, no. 5, pp. 93-100.

[10] Generalova A., Zverovshchikov A., Nikulin A. Surface undulation parameters of continuously variable transmission friction during turning. *Journal of King Saud University – Engineering Sciences*, 2022, vol. 36, no. 1.

[11] Витвинов М.К. *Технологическое наследование волнистости на операциях механической обработки на примере фрезерования и плоского шлифования. Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук: 05.02.07*. Новосибирск, 2015, 118 с.

[12] Белов Е.Б. *Уменьшение волнистости поверхности при точении за счет прогнозирования и снижения уровня автоколебаний. Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук: 05.02.07*. Севастополь, 2017, 157 с.

[13] Генералова А.А., Никулин А.А., Бычков Д.С. Моделирование текстуры волнистости поверхности при токарной обработке шкивов. *Вестник Магнитогорского государственного технического университета им. Г.И. Носова*, 2024, т. 22, № 3, с. 101-112.

[14] Генералова А.А., Никулин А.А., Бычков Д.С. Аналитическое исследование характеристик стойкости инструмента и автоколебаний при токарной обработке шкивов. *Вестник Магнитогорского государственного технического университета им. Г.И. Носова*, 2024, т. 22, №1, с. 61-75.

[15] Иванов М.Ю., Бушуев А.Ю., Щербаков Н.С., Реш Г.Ф. Компьютерное моделирование динамических процессов в гидравлическом стабилизаторе расхода и его оптимизация на основе эволюционного алгоритма. *Математическое моделирование и численные методы*, 2024, т. 43, № 3, с. 100-119.

[16] Goldberg D. *Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning. Reading, Massachusetts, Addison*. Wesley Publishing Company, 1989, 412 p.

[17] Тлибеков А.Х. Сравнительный анализ методов свертывания критериев оптимальности в задачах многокритериальной оптимизации. *Математическое моделирование и численные методы*, 2024, т. 42, № 2, с. 112-125.

[18] Кошев А.Н., Салмин В.В., Генералова А.А., Бычков Д.С. Разработка генетического алгоритма с адаптивными мутациями для определения глобального экстремума функции n-переменных. *Интернет-журнал «НАУКОВЕДЕНИЕ»*, 2016, т. 8, № 6, с.32.

[19] Patel A. Design optimization and analysis of switched reluctance motor using genetic algorithm optimization technique. *Transactions on Energy Systems and Engineering Applications*, 2025, vol. 6, № 1, pp. 1-13.

[20] Гуревич Я.Л., Горохов М. В., Захаров В. И., Земина Н. Л., Пленина О. А. *Режимы резания труднообрабатываемых материалов: справочник*. Москва, Машиностроение, 1986, 240 с.

[21] Кожевников Д. В., Кирсанов С. В. *Резание материалов: учебник для вузов*. Москва, Машиностроение, 2007, 304 с.

[22] Jacob F., Perrin D., Sanchez C., Monod J. The operon: a group of genes whose expression is coordinated by an operator. *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, 1960, vol. 250, pp. 1727–1729.

[23] Ramos J. L., García-Salamanca A., Molina-Santiago C., Udaondo Z. *«Operon»*. *Brenner's Encyclopedia of Genetics*. London: Elsevier, 2013, pp. 176–180.

[24] Lichenstein H.S., Hamilton E.P., Lee N. Repression and catabolite gene activation in the araBAD operon. *Journal of Bacteriology*, 1987, vol. 169, no. 2, pp. 811-822.

[25] Ermolaeva M.D., White O., Salzberg S.L. Prediction of operons in microbial genomes. *Nucleic Acids Research*, 2001, Vol. 29, № 5, pp. 1216-1221.

[26] Кузенков О. А. Построение функции приспособленности, зависящей от множества конкурирующих стратегий, на основе анализа популяционной динамики. *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика*, 2022, т. 30, № 3, с. 276–298.

[27] Eiben, A.E.; Smith, J.E. *«Evaluation Function (Fitness Function)». Introduction to Evolutionary Computing*. Natural Computing Series (2nd ed.). Berlin, Heidelberg, Springer, p. 30.

[28] Канторович Л. В., Акилов Г. П. *Функциональный анализ в нормированных пространствах*. Москва, Наука, 1977, 648 с.

[29] Иродова, И. П. *Линейные функционалы и операторы в курсе функционального анализа: Учебное пособие*. Ярославль, ЯрГу, 2010, 124 с.

[30] Генералова А. А., Зверовщиков А. Е., Никулин А. А. Исследование влияния микропрофиля фрикционных элементов вариатора на коэффициент трения в зоне контакта и коэффициент полезного действия передачи. *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки*, 2023, № 3 (67), с. 154–172.

[31] Nakahara T. Tribological Technologies in Japanese National Projects. *Journal-Japanese Society of Tribologists*, 2012, vol. 57, № 11, pp. 727-732.

Статья поступила в редакцию 22.12.2025

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Генералова А.А., Никулин А.А., Бычков Д.С. Математическое моделирование формирования волнистости шкивов бесступенчатой трансмиссии на основе опероноориентированного генетического алгоритма. *Математическое моделирование и численные методы*, 2026, № 2, с. 97–118.

Генералова Александра Александровна — к.т.н., доцент, доцент кафедры «Математическое обеспечение и применение ЭВМ», Пензенский государственный университет. e-mail: generalova_aa@mail.ru

Никулин Артём Анатольевич — инженер-исследователь, Пензенский государственный университет. e-mail: artem.nikulin2003@yandex.ru

Бычков Дмитрий Сергеевич — инженер-исследователь, Пензенский государственный университет. e-mail: deciptikon@mail.ru

Mathematical modeling of waviness formation by a pulley of a continuously variable transmission based on an operon-oriented genetic algorithm

© A.A. Generalova, AA. Nikulin, D.S. Bychkov

Penza State University, Penza, 440026, Russia

An approach to solving the problem of forming the height parameter of the waviness of pulleys of a variator transmission by optimizing the parameters of the finishing turning operation is considered. The calculations take into account the areas of variation of the

factors determining the execution of the turning process. A calculation algorithm based on a heuristic approach using a genetic algorithm is proposed. It is noted that the variable parameters are allocated to different groups of genes representing the operons of the individual. The mathematical formalization of the fitness function, consisting of two stages, is described. MathCad, a program that automates the process of mathematical modeling of a surface, is presented. It is established that different operons can have different effects on the outcome of the simulation. The verification of the developed genetic algorithm was carried out by comparing it with experimental data. The comparative analysis showed good convergence of the studied parameters and confirmed the adequacy of the mathematical model and the operation of the operon-oriented genetic algorithm.

***Keywords**: continuously variable transmission, pulley, waviness, machining modes, cutter parameters, mathematical modeling, genetic algorithm, operon, fitness function, MathCad*

REFERENCES

[1] Generalova A.A., Nikulin A.A. Increasing the vehicle's dynamic performance by developing a continuously variable transmission. *Journal of Engineering and Applied Sciences*, 2019, vol. 14, no. 18, pp. 6866-6875.

[2] Aladagli I. *Advanced CVT Modeling and Control. PhD Thesis. Eindhoven: Technische Universiteit Eindhoven*, 2015, 150 p.

[3] Yagyaev E., Shron L., Meniuk D. Increasing the operational reliability of car variators due to creating regular surface microrelief by laser ablation. IOP *Conference Series Materials Science and Engineering*, 2020, vol. 889, no. 1, art. no. 012007.

[4] Zverovshchikov A.E., Generalova A.A., Nikulin A.A. Ensuring the performance characteristics of a friction V-belt variator. *Journal of Physics: Conference Series*, 2020, vol. 1679, art. no. 042079.

[5] Yamazaki M., Kato Y., Nakahara T., Ichihashi T. Research on improvement of transmission efficiency by improving friction coefficient between elements and pulleys of a belt CVT. *Review of Automotive Engineering*, 2008, vol. 29, no. 4, pp. 485-492.

[6] Bonsen, B., Klaassen, Tim, Pulles, R.J., Simons, S.W.H., Steinbuch, M., Veenhuizen, P.A. Performance optimisation of the push-belt CVT by variator slip control. *International Journal of Vehicle Design*, 2005, vol. 39, no. 3, pp. 232-256.

[7] Abo K., Kobayashi M., Kurosawa, M. Development of a metal belt-drive CVT incorporating a torque converter for use with 2-liter class engines. *SAE Technical Papers, Conference: International Congress & Exposition*, 1998.

[8] Garud V., Awadhani L., Vivekanandan N., Panchawadkar A., Lakade S., Tiwari H. (2016). Investigation of slip and speed ratio in axially displaceable cone variator CVT drive. *Conference: International Conference on Electrical, Electronics, and Optimization Techniques (ICEEOT)*, 2016.

[9] Wojciech S-S., Dobaj K., Kot A. Frictional problems in continuously variable transmission belt drives. *Tribologia*, 2017, № 5, pp. 93-100.

[10] Generalova A., Zverovshchikov A., Nikulin A. Surface undulation parameters of continuously variable transmission friction during turning. *Journal of King Saud University – Engineering Sciences*, 2022, vol. 36, no. 1.

[11] Vitvinov M.K. *Tekhnologicheskoe nasledovanie volnistosti na operatsiyakh mekhanicheskoy obrabotki na primere frezerovaniya i ploskogo shlifovaniya*

[Technological inheritance of waviness in machining operations using the example of milling and surface grinding]. *PhD Thesis in Technical Sciences: 05.02.07*. Novosibirsk, 2015, 118 p.

[12] Belov E.B. *Umenshenie volnistosti poverkhnosti pri tochenii za schet prognozirovaniya i snizheniya urov nya avtokolebaniy* [Reducing surface waviness during lathe turning by predict ing and reducing self-oscillations]. *PhD Thesis in Technical Sciences: 05.02.07*. Sevastopol, 2017, 157 p.

[13] Generalova A.A., Nikulin A.A., Bychkov D.S. Modeling the texture of a wavy surface during pulley turning. *Vestnik of Nosov Magnitogorsk State Technical University*, 2024, vol. 22, no. 3, pp. 101-112.

[14] Generalova A.A., Nikulin A.A., Bychkov D.S. Analytical study on the characteristics of tool durability and self-*oscillations suring pulley turning. Vestnik* of Nosov Magnitogorsk State Technical University, 2024, vol. 22, no. 1, pp. 61-75.

[15] Ivanov M.Yu., Bushuev A.Yu., Shcherbakov N.S., Resch G.F. Computer simulation of dynamic processes in the hydraulic flow stabilizer and its optimization based on evolutionary algorithm. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2024, vol. 43, no. 3, pp. 100–119.

[16] Goldberg D. *Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning. Reading, Massachusetts, Addison*. Wesley Publishing Company, 1989, 412 p.

[17] Tlibekov A.Kh. Comparative analysis of methods for converting optimality criteria in multi-criteria optimization problems. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2024, vol. 42, no. 2, pp. 112–125.

[18] Koshev A.N., Salmin V.V., Generalova A.A., Bychkov D.S. The development of a genetic algorithm with adaptive mutations to determine the global extremum function of n-variables. *Internet-zhurnal «NAUKOVEDENIE» [Online Journal «NAUKOVEDENIE»]*, 2016, vol. 8, № 6, p. 32.

[19] Patel, Amit. (2025). Design optimization and analysis of switched reluctance motor using genetic algorithm optimization technique. *Transactions on Energy Systems and Engineering Applications*, 2025, vol. 6, no. 1, pp. 1-13.

[20] Gurevich Ya.L., Gorokhov M.V., Zakharov V.I., Zemina N.L., Plenina O.A. *Rezhimy rezaniya trudnoobrabatyvaemyh materialov: spravochnik* [Cutting modes of hard-to-process materials: A reference guide]. Moscow, Mashinostroenie [Mechanical Engineering], 1986, 240 p.

[21] Kozhevnikov D. V., Kirsanov S. V. *Rezanie materialov: uchebnik dlya vuzov* [Cutting materials: Textbook for Universities]. Moscow, Mashinostroenie [Mechanical Engineering], 2007, 304 p.

[22] Jacob F., Perrin D., Sanchez C., Monod J. The operon: a group of genes whose expression is coordinated by an operator. *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, 1960, vol. 250, pp. 1727–1729.

[23] Ramos J. L., García-Salamanca A., Molina-Santiago C., Udaondo Z. *«Operon»*. *Brenner's Encyclopedia of Genetics*. London: Elsevier, 2013, pp. 176–180.

[24] Lichenstein H.S., Hamilton E.P., Lee N. Repression and catabolite gene activation in the araBAD operon. *Journal of Bacteriology*, 1987, vol. 169, no. 2, pp. 811-822.

[25] Ermolaeva M.D., White O., Salzberg S.L. Prediction of operons in microbial genomes. *Nucleic Acids Research*, 2001, vol. 29, no. 5, pp. 1216-1221.

[26] Kuzenkov OA. Construction of the fitness function depending on a set of competing strategies based on the analysis of population dynamics. Izvestiya vuzov. *Prikladnaya nelineinaya dinamika* [Bulletin of Higher Educational Institutions. Applied Nonlinear Dynamics], 2022, vol. 30, no. 3, pp. 276–298.

[27] Eiben, A.E.; Smith, J.E. (2015). *«Evaluation Function (Fitness Function)». Introduction to Evolutionary Computing*. Natural Computing Series (2nd ed.). Berlin, Heidelberg, Springer, p. 30.

[28] Kantorovich L. V. and Akilov G. P. Funkcional'nyj analiz v normirovannyh prostranstvah [Functional analysis in normalized spaces]. Moscow, Nauka [Nauka Publishers], 1977, 648 p.

[29] Irodova, I. P. *Linejnye funkcionaly i operatory v kurse funkcional'nogo analiza: Ucheb. posobie* [Linear functionals and operators in the course of functional analysis: Textbook]. Yaroslavl: Yaroslav State University named after P. G. Demidov, 2010, 124 p.

[30] Generalova A.A., Zverovshchikov A.E., Nikulin A.A. Research of microprofile impact on variable transmission's friction elements on the coefficient of friction in the contact zone and transmission efficiency. *University Proceedings. Volga Region. Technical Sciences*, 2023, no. 3, pp. 154-172.

[31] Nakahara T. Tribological Technologies in Japanese National Projects. *Journal-Japanese Society of Tribologists*, 2012, vol. 57, no. 11, pp. 727-732.

Generalova A.A., Cand. Sc. (Eng.), Associate Professor, Department of Mathematical Support and Computer Application, Penza State University. e-mail: generalova_aa@mail.ru

Nikulin A.A., Research engineer, Penza State University. e-mail: artem.nikulin2003@yandex.ru

Bychkov D.S., Research engineer, Penza State University. e-mail: deciptikon@mail.ru