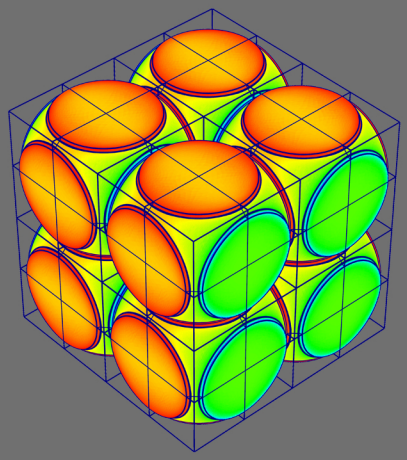
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Тукмаков А.Л., Тукмаков Д.А., Ахунов А.А. Численное моделирование колебаний коагулирующей двухфракционной газовзвеси в акустическом резонаторе. Математическое моделирование и численные методы, 2026, № 2, с. 66–85.

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/407/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.216.140
11.11.2026 09:39:29

УДК 51-72.533 DOI: 10.18698/2309-3684-2026-2-6685

Численное моделирование колебаний коагулирующей двухфракционной газовзвеси в акустическом резонаторе

© А.Л. Тукмаков[1], Д.А. Тукмаков[1], А.А. Ахунов[2]

[1]ИММ ФИЦ КазНЦ РАН, 420111 Казань, Россия
[2]КНИТУ-КАИ, 420111 Казань, Россия

Одной из наиболее эффективных технологий очистки газа от дисперсных примесей является жидкостная очистка, обусловленная неспособностью инерционных сепараторов улавливать мелкодисперсные частицы. В связи с этим возникает проблема повышения эффективности очистки газодисперсных сред указанным способом. Одним из направлений решения данной задачи является укрупнение размера дисперсных включений с помощью коагуляции мелкодисперсных и крупных капель. В рамках оптимизации технологий жидкостной очистки задача возникает задача исследования процессов коагуляции в том, числе коагуляции дисперсных частиц в акустических полях. Для описания течения многофазной среды применялась континуальная методика моделирования динамики неоднородных сред, в которой предполагалось решение полной гидродинамической системы уравнений движения для каждой из компонент смеси. Дисперсная фаза моделировалась как многофракционная полидисперсная, где фракции отличались плотностью материала и размером дисперсных включений. Учитывался межфазный теплообмен и обмен импульсом, включавший в себя силу аэродинамического сопротивления, динамическую силу Архимеда и силу присоединенных масс. Динамика несущей среды описывалась системой уравнений Навье – Стокса для вязкого, сжимаемого теплопроводного газа. Математическая модель учитывала столкновительную коагуляцию частиц различных фракций. Система уравнений математической модели дополнялась граничными условиями. Для интегрирования уравнений применялся явный конечно-разностный метод, для преодоления численных осцилляций – схема нелинейной коррекции. В работе моделировались процессы коагуляции капель двухфракционного аэрозоля в акустическом резонаторе на частоте первого линейного резонанса. Представлены временные зависимости для скорости и средней плотности фракций дисперсной фазы.

Ключевые слова: *численное моделировние, многофазные среды, коагуляция*

Введение. Одним из разделов механики жидкости и газа является разработка математических моделей, в том числе математических моделей различных течений, в том числе течений неоднородных сред. Интерес к моделированию течений неоднородных сред связан с тем, что такого рода процессы протекают в природе и в различных технических процессах [1-25]. В монографии [1] представлена общая теория динамики многофазных сред, описаны основные методики математического моделирования течений многофазных сред, в том

числе континуальная методика. В монографии [2] в одномерном приближении, без учета вязкости среды разработаны математические модели проведены численные расчеты динамики запыленных, газокапельных и порошковых сред. В монографии [3] представлены различные подходы, которые используются при математическом моделировании динамики газовзвесей и приводятся результаты численного моделирования течений газа с твердыми частицами. В монографии [4] разработаны математические модели, численные алгоритмы моделирования и приведены результаты расчетов ударно-волновых и детонационных процессов в газовзвесях металлических частиц.

В работе [5] проведен обзор расчетно-теоретических и экспериментальных работ, посвященных изучению различных видов двухфазных потоков, рассмотрены проблемы изучения и моделирования двухфазных потоков. Высказывается мнение, что при моделировании потоков газодисперсных сред с большим объемным содержанием дисперсной фазы имеют преимущество эйлерово-эйлеровые математические модели, так как позволяют описать эффекты, связанные с межфазным взаимодействием, при этом отмечается, что процессы коагуляции существенным образом оказывают влияние на динамику несущей среды.

В статье [6] экспериментально исследовалось влияние коагуляции и седиментации на процесс очитки аэрозолей, возникающих при выбросе продуктов работы атомных электростанций в атмосферу. Отмечается высокая эффективность осаждения мелкодисперсных твердых частиц методом «мокрой» очистки, основанной на коагуляции дисперсных включений.

В публикации [7] разработаны математические модели акустических колебаний в двухфазном газожидкостном потоке. Приведен численный пример модельного диагностирования фазового состава теплоносителя в циркуляционном контуре ядерной реакторной установки. В исследовании [8] рассматривается течение смеси газа и твердых частиц в канале с проницаемыми стенками, которое отражает основные особенности течений в камере сгорания ракетного двигателя на твердом топливе. Математическая модель описывала движение несущей среды в эйлеровых координатах. При этом динамика дисперсной фазы потока многофазной среды, имевшей в данной модели полидисперсный состав, реализовывала лагранжев подход моделирования дисперсных включений, в качестве межфазного обмена импульсом рассматривалась только сила аэродинамического сопротивления, математическая модель пренебрегала коагуляцией дисперсных включений. В статье [9] рассматривается динамика слияния двух капель ньютоновской жидкости. С помощью численного моделирования для двухфазной системы «жидкость - воздух» показано

изменение форм капель во времени для разных свойств жидкостей. Математическая модель предполагала решение уравнения сохранения импульса для всей смеси в целом.

Работы, посвященные моделированию течений газодисперсных сред часто с вопросами очистки промышленных выбросов от дисперсных включений.

В публикации [10] выполнено численное решение научно-технической задачи определения эффективности насадочных скрубберов при конденсационном охлаждении и очистки от дисперсной фазы газов. Тепло- и массообмен и перенос дисперсной частиц между газовой и жидкой фазами учитывается с помощью объемных источниковых членов межфазного переноса. Показана зависимость эффективности очистки газов от тонкодисперсной фазы от скорости газа. Даны сравнительные характеристики насадок, а также научно-технические решения по модернизации скрубберов, внедренные в промышленности. Математическая модель не учитывала расчет динамики газовой фазы, математические уравнения даны в стационарном двухмерном виде. В исследовании [11] разработана общая математическая модель эволюции состояния трехфазной полидисперсной среды применительно к процессу очистки газов от твердых частиц в скруббере Вентури. В исследовании отмечается, что процесс мокрой очистки газов от твердых частиц изучен недостаточно. Применяемые в работе математические модели не учитывают газодинамических процессов в потоке газодисперсной среды. В статье [12] с помощью систем линейных уравнений разработана математическая модель жидкостного пылеподавления, основанная на коагуляции частиц пыли и капель жидкости в газе. Математическая модель не учитывала газодинамических эффектов, зависимость процесса коагуляции от временной и пространственной переменных. В публикации [13] построена математическая модель движения пылевых аэрозолей в условиях коагуляции, получены критерии подобия, обеспечивающие идентичность экспериментальных исследований и реальных аэрологических процессов в шахтах, критериальные уравнения для расчета коэффициента аэродинамического сопротивления и времени неустановившегося инерционного движения. При математическом моделировании жидкостной очистки твердодисперсных сред пренебрегалось решением газодинамических уравнений для несущей среды. В работе [14] представлены результаты исследования влияния гидродинамических взаимодействий на скорость коагуляции частиц. В расчетах предполагалась сферическая форма дисперсных включений. Выявлено, что в расчетах без учета гидродинамического взаимодействия между частицами интенсивность коагуляции имеет большее значение. Математическая модель реализовывала лагранжев

подход моделирования динамики дисперсных частиц, без учета воздействия дисперсной фазы на динамику несущей среды. В исследовании [15] проведено численное моделирование динамики столкновения двух капель азота в низкотемпературной среде при различных числах Вебера, числах Рейнольдса и параметров удара, а также моделирование столкновения двух капель воды проводится для сравнения. Несущая среда моделировалась как несжимаемая жидкость. В работе [16] построена модель движения газодисперсной среды при наличии процессов нуклеации, коагуляции и фазовых переходов. Для описания процесса нуклеации используется модель гомогенной нуклеации. Считается, что процесс коагуляции кластеров происходит за счет их броуновского движения. Математическая модель пренебрегает учетом газовой динамики несущей среды, динамика дисперсной фазы описывается в предположении одномерной геометрии течения и стационарном режиме течения. В статье [17] математически моделируется процесс коагуляции твердых дисперсных частиц с каплями орошаемой жидкости в аппаратах «мокрой» очистки запыленных сред на основе труб Вентури под действием ультразвуковых колебаний высокой интенсивности. В результате моделирования показана возможность повышения эффективности улавливания высокодисперсных частиц в скруббере Вентури за счет введения ультразвуковых -колебаний и определены оптимальные режимы (частота, уровень звукового давления) и условия направление, зона воздействия. Математическая модель предполагала стационарный характер течения несущей среды при этом в описании потока многофазной среды пренебрегалось межфазным взаимодействием. В исследовании [18] проведено математическое моделирование коагуляции капель конечного числа фракций размеров полидисперсной смеси, впрыскиваемых форсункой в область аэрохолодильной установки вдоль направления движения потока воздуха. Доказывается незначительность влияния тепломассобмена между веществом капель и окружающим воздухом на изменение их размеров за время движения от форсунки до рабочей части установки. Математическая модель пренебрегала расчетом динамики несущей среды. В работе [19] на основе системы обыкновенных дифференциальных уравнений разработана математическая модель коагуляции капель жидкости и пылевых частиц различных размеров в несущей среде, состоящей из двух газов. Математическая модель не предполагала учета уравнений газовой динамики.

В обзоре литературы представлены работы, посвященные динамике различных газодисперсных сред и дисперсных включений в потоке газа в том числе с учетом коагуляции частиц. При этом в некоторых представленных работах не учитывается воздействие дисперс-

ной фазы на динамику частиц, в ряде работ, посвященных исследованию коагуляции дисперсных включений, пренебрегается моделированием газовой динамики. При моделировании процессов динамики газодисперсных сред часто такие процессы полагаются стационарным. В обзоре представлена работа, в которой нестационарная математическая модель динамики газовзвеси учитывает воздействия дисперсной фазы, имеющей полидисперсный состав, на динамику несущей среды при этом пренебрегается механическими превращениями (дроблением или коагуляцией) дисперсных частиц в скоростном потоке газа.

Актуальность работы заключается в том, что течения коагулирующих газовзвесей часто встречаются в различных технологических процессах [20], в частности процессы коагуляции создаются для укрупнения частиц в технологии жидкостной очистки.

Технологии очистки запыленных сред от дисперсных включений [6], основанные на коагуляции могут быть эффективней технологий электрической фильтрации дисперсных сред [21], что может быть использовано в криогенной энергетике [22].

Новизна работы состоит в том, что для исследования процессов коагуляции, в рамках столкновительной модели коагуляции [20], в акустическом резонаторе применяется полностью эйлеровая континуальная математическая модель, учитывающая различные силы межфазного обмена импульса. Моделировались колебания двухфракционной газовзвеси с учетом поглощения мелкодисперсных частиц крупными дисперсными частицами за счет механизма скоростного скольжения фракций дисперсной фазы при колебаниях газа с частицами в акустическом поле. Процесс рассмотрен от начального момента, когда средняя плотность мелкодисперсных частиц существенно больше средней плотности крупнодисперсных частиц до момента, когда крупнодисперсные частицы почти полностью поглощают мелкодисперсную фракцию.

Целью данной работы являлось исследование применения эйлеровой модели динамики газовзвеси к изучению процессов коагуляции двухфракционного аэрозоля в акустическом резонаторе закрытого типа.

Математическая постановка задачи, принятые допущения. В работе используется континуальная математическая модель динамики газовзвеси в эйлеровых координатах. Течение несущей среды и дисперсной фазы описывается как двухмерное нестационарное. Несущая среда описывается как вязкий сжимаемый теплопроводный газ.

Дисперсная фаза моделируется как многофракционная с различными размерами дисперсных частиц и различными физическими

плотностями материала фракций. Все частицы дисперсной фазы рассматриваются как частицы сферической формы.

Основное содержание статьи. Движение несущей среды описывается системой уравнений [21-25]:

$$\frac{\partial(\alpha_0\rho)}{\partial t}+\frac{\partial(\alpha_0\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\alpha_0\rho v)}{\partial y}=0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho u^2+p-\tau_{xx}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho uv-\tau_{xy}\right)=-\sum_{i=1,n}F_{xi}+\sum_{i=1,n}\alpha_i\frac{\partial p}{\partial x}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho uv-\tau_{yx}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho v^2+p-\tau_{yy}\right)=-\sum_{i=1,n}F_{yi}+\sum_{i=1,n}\alpha_i\frac{\partial p}{\partial y}, \tag{3}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial(e)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\left[e+p-\tau_{xx}\right]u-\tau_{xy}v-\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\\+\frac{\partial}{\partial y}\left(\left[e+p-\tau_{yy}\right]v-\tau_{xy}u-\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right)=\\=\sum_{i=1,n}Q_i-\sum_{i=1,n}\left(|F_{xi}|(u-u_i)-|F_{yi}|(v-v_i)\right)+\\+\sum_{i=1,n}\alpha_i\left(\frac{\partial(pu)}{\partial x}+\frac{\partial(pv)}{\partial y}\right),\end{gathered} \tag{4}$$

$$\tau_{xx}=\mu\left(2\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{2}{3}D\right),\ \tau_{yy}=\mu\left(2\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{2}{3}D\right),\ \tau_{xy}=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right),$$

$$D=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y},\ \alpha_0=1-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i.$$

Для моделирования динамики i-ой фракции дисперсной фазы применялась система уравнений, аналогичная системе уравнений динамики невязкого газа [21-25]:

$$\frac{\partial\rho_i}{\partial t}+\frac{\partial(\rho_i u_i)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho_i v_i)}{\partial y}=0, \tag{5}$$

$$\frac{\partial(\rho_i u_i)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_i u_i^2\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_i u_i v_i\right)=F_{xi}-\alpha_i\frac{\partial p}{\partial x}, \tag{6}$$

$$\frac{\partial(\rho_i v_i)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_i u_i v_i\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_i v_i^2\right)=F_{yi}-\alpha_i\frac{\partial p}{\partial y}, \tag{7}$$

$$\frac{\partial(e_i)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(e_i u_i)+\frac{\partial}{\partial y}(e_i v_i)=-Q_i, \qquad (8)$$

$$\rho_i=\alpha_i\rho_{i0},\quad e_i=\rho_i C_{vi}T_i,$$

$$F_{xi}=\frac{3}{4}\frac{\alpha_i}{d_i}C_d\,\rho_1\sqrt{(u-u_i)^2+(v-v_i)^2}\,(u-u_i)+\alpha_i\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)+$$

$$+0.5\alpha_i\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial u_i}{\partial t}-u_i\frac{\partial u_i}{\partial x}-v_i\frac{\partial u_i}{\partial y}\right),$$

$$F_{yi}=\frac{3}{4}\frac{\alpha_i}{d_i}C_d\,\rho\sqrt{(u-u_i)^2+(v-v_i)^2}\,(v-v_i)+\alpha_i\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)+$$

$$+0.5\alpha_i\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial v_i}{\partial t}-u_i\frac{\partial v_i}{\partial x}-v_i\frac{\partial v_i}{\partial y}\right),$$

$$C_{di}=\frac{24}{Re_i}+\frac{4}{Re_i^{0.5}}+0.4,\ M_i=\left|\bar{V}-\bar{V}_i\right|/c,$$

$$Re_i=\rho\left|\bar{V}-\bar{V}_i\right|d_i/\mu,\ Pr=C_p\mu/\lambda,$$

$$Nu_i=2\exp(-M_i)+0.459\,\mathrm{Re}_i^{0.55}\,\mathrm{Pr}^{0.33},$$

$$Q_i=6a_i lNu_i(T-T_i)/d_i^{\,2},\ i=2,..n.$$

Использовались следующие обозначения u_1, v_1, p, ρ_1 — декартовы составляющие скорости несущей среды давление и плотность газа; e_1, T_1 — полная энергия и температура несущей среды; те же параметры фракций дисперсной фазы обозначены индексом i. Для описания изменения объемного содержания i-ой фракции дисперсной фазы применялась функция «средней плотности» [4] — $\rho_i=\rho_{i0}\alpha_i$, являющаяся произведением физической плотности материала фракции дисперсной фазы — ρ_{i0}, остающейся неизменной на объемное содержание фракции — α_i, являющееся функцией временной и пространственных переменных; μ и λ соответственно вязкость и теплопроводность газа. Температура несущей среды находится из уравнения:

$$T=\frac{(\gamma\text{-}1)}{R}\left(\frac{e}{\rho}-\frac{u^2+v^2}{2}\right),$$

где R — газовая постоянная несущей фазы, γ —постоянная адиабаты.

Межфазный обмен импульсом включал в себя силу аэродинамического сопротивления — F_{AD}, динамическую силу Архимеда — F_{DA}, силу присоединенных масс — F_{MA}:

$$F_{ADxi} = \frac{3}{4}\frac{\alpha_i}{d_i} C_d \rho \sqrt{\left(u-u_i\right)^2+\left(v-v_i\right)^2}\left(u-u_i\right),$$

$$F_{DAxi} = \alpha_i \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

$$F_{AMxi} = 0.5\alpha_i\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial u_i}{\partial t}-u_i\frac{\partial u_i}{\partial x}-v_i\frac{\partial u_i}{\partial y}\right).$$

Модель столкновительной коагуляции дисперсных включений изложена в работах [20,22]. Предполагается, что частицы i-ой фракции поглощают все частицы меньших размеров, то есть частицы фракций $j = 2\ldots i-1$:

$$\frac{\partial m_i}{\partial t} = \sum_{j=1}^{i-1} k_{ij} n_j m_j,\ k_{ij} = \frac{\pi}{4}\left(d_i + d_j\right)^2\left[u_i + v_i - \sqrt{u_j^2+v_j^2}\right].$$

Здесь k_{ij} — константа коагуляции. Полученные значения массы частиц i-й фракции в данном узле конечно-разностной сетки определяет новое значение диаметра частицы d_i. Уменьшение концентрации мелких частиц i-х фракций вследствие поглощения их частицами j-ых ($j = i+1,\ i+2,\ \ldots,\ n$) фракций, чьи дисперсные включения имеют больший размер описывается уравнением:

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} = -n_i \sum_{j=i+1}^{n} k_{ij} n_j .$$

Новое значение объемного содержания i-й фракции — α_i^* изменившегося вследствие коагуляции, определяется следующим выражением — $\alpha_i^* = \frac{\pi d_i^3 n_i}{6}$. После вычисления изменения объемного содержания i-ой фракции вычисляется изменение диаметра частицы — $d_i^* = \sqrt[3]{\frac{6\alpha_i^*}{\pi n_i}}$. Объемное содержание и физическая плотность вещества, определяет среднюю плотность фракции, изменившуюся вследствие коагуляции: $\rho_i^* = \alpha_i^* \rho_{i0}$.

Слияние мелких капель с более крупными приводит к изменению скорости капель укрупнившейся фракции:

$$\frac{\partial \mathrm{u_i}}{\partial t} = \frac{1}{m_i}\sum_{j=1}^{i-1} k_{ij}\left(u_j - u_i\right) m_j n_j,$$

$$\frac{\partial \mathrm{v_i}}{\partial t} = \frac{1}{m_i}\sum_{j=1}^{i-1} k_{ij}\left(v_j - v_i\right) m_j n_j,$$

$$T_{i*} = \frac{1}{C_{i*} m_{i*}}\left(\sum_{j=1}^{i-1} k_{ij} n_j C_j m_j T_j + C_i m_i T_i\right).$$

Здесь T_{i*} температуры частицы i-й фракции после коагуляции, m_i — масса частицы i-й фракции, n_i — концентрация частиц i-й фракции — концентрация.

Численный алгоритм решения задачи. Рассмотрим применение численного алгоритма явного метода Мак-Кормака на примере скалярного нелинейного уравнения в частных производных (9):

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial a(f)}{\partial x} + \frac{\partial a(f)}{\partial y} = c(f). \tag{9}$$

Алгоритм явного конечно-разностного метода Мак-Кормака [26] для скалярного нелинейного уравнения (9) имеет вид (10)-(11):

$$f_{jk}^{*} = f_{jk}^{n} - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(a_{j+1k}^{n} - a_{jk}^{n}\right) - \frac{\Delta t}{\Delta y}\left(b_{jk+1}^{n} - b_{jk}^{n}\right) + \Delta t c_{jk}^{n}, \tag{10}$$

$$f_{jk}^{n+1} = 0.5\left[\left(f_{jk}^{n} + f_{jk}^{*}\right) - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(a_{jk}^{*} - a_{j-1k}^{*}\right) - \frac{\Delta t}{\Delta y}\left(b_{jk}^{*} - b_{jk-1}^{*}\right) + \Delta t c_{jk}^{*}\right]. \tag{11}$$

Здесь Δx, Δy — шаги по пространственному направлению, Δt — шаг по времени.

В расчетах применялась схема расщепления по пространственным переменным (12), состоящая из одномерных операторов — P_x, P_y, позволяющая построить решение на следующем временном слое [27] (12):

$$f_{j,k}^{n+1} = \mathbf{P}_x\left(\frac{\Delta t_x}{2}\right)\mathbf{P}_y\left(\frac{\Delta t_y}{2}\right)\mathbf{P}_y\left(\frac{\Delta t_y}{2}\right)\mathbf{P}_x\left(\frac{\Delta t_x}{2}\right) f_{j,k}^{n}. \tag{12}$$

Временные шаги $\Delta t_x = \Delta t_y = \Delta t$. Переход со слоя t^n на слой t^{n+1} осуществляется следующим образом [27]:

$$f_{j,k}^{(1)} = \mathbf{P}_x\left(\frac{\Delta t_x}{2}\right) f_{j,k}^{n}\,,\ f_{j,k}^{(2)} = \mathbf{P}_y\left(\frac{\Delta t_y}{2}\right) f_{j,k}^{(1)}\,,$$

$$f_{j,k}^{(3)} = \mathbf{P}_y\left(\frac{\Delta t_y}{2}\right) f_{j,k}^{(2)}\,,\ f_{j,k}^{n+1} = \mathbf{P}_x\left(\frac{\Delta t_x}{2}\right) f_{j,k}^{(3)}\,.$$

В явном методе Мак-Кормака в качестве условия устойчивости, рассматривается условие устойчивости типа Куранта-Фридрихса-Леви [26]:

$$\Delta t \le \frac{\Delta h^2}{4\nu + \left(|u| + |v|\right)\Delta h},\ \Delta h = \min\left(\Delta x, \Delta y\right),\ |u| = \max|u_i|,\ |v| = \max|v_i|\,.$$

Численные осцилляции преодолевались с помощью схемы нелинейной коррекции сеточной функции [28]:

если $\left(\delta\tilde{u}_{j-1/2}\cdot\delta\tilde{u}_{j+1/2}\right) < 0$

или $\left(\delta\tilde{u}_{j+1/2}\cdot\delta\tilde{u}_{j+3/2}\right) < 0$, то

$$f_j = \tilde{f}_j + k\left(\delta u_{j+1/2} - \delta u_{j-1/2}\right).$$

Использованы обозначения:

$$\delta\tilde{u}_{j-1/2} = \tilde{u}_j - \tilde{u}_{j-1},\ \delta\tilde{u}_{j+1/2} = \tilde{u}_{j+1} - \tilde{u}_j,\ \ \delta\tilde{u}_{j+3/2} = \tilde{u}_{j+2} - \tilde{u}_{j+1},$$

где $\tilde{u}_j$ — значение функции после перехода на $(n+1)$-ый временной слой по схеме Мак-Кормака, коэффициент коррекции — $k = 0.125$.

В численных расчетах задавались следующие граничные условия:

$$u\left(n,1,j\right) = A\omega\cos\left(\omega\Delta tn\right),\ \ u_k\left(n,1,j\right) = A\omega\cos\left(\omega\Delta tn\right),$$
$$v\left(n,1,j\right) = v_k\left(n,1,j\right) = 0,\ \ u\left(n,N_x,j\right) = u_k\left(n,N_x,j\right) = 0,$$
$$v\left(n,N_x,j\right) = v_k\left(n,N_x,j\right) = 0,\ \ u\left(n,i,1\right) = u_k\left(n,i,1\right) = 0,$$
$$v\left(n,i,1\right) = v_k\left(n,i,1\right) = 0,\ \ u\left(n,i,N_y\right) = u_k\left(n,i,N_y\right) = 0,$$
$$v\left(n,i,N_y\right) = v_k\left(n,i,N_y\right) = 0,$$
$$\rho\left(n,1,j\right) = \rho\left(n,2,j\right),\ \ \rho_k\left(n,1,j\right) = \rho_k\left(n,2,j\right),$$
$$\rho\left(n,N_x,j\right) = \rho\left(n,N_x-1,j\right),\ \ \rho_k\left(n,N_x,j\right) = \rho_k\left(n,N_x-1,j\right),$$
$$\rho\left(n,i,1\right) = \rho\left(n,i,2\right),\ \ \rho_k\left(n,i,1\right) = \rho_k\left(n,i,2\right),$$
$$\rho\left(n,i,N_y\right) = \rho\left(n,i,N_y-1\right),\ \ \rho_k\left(n,i,N_y\right) = \rho_k\left(n,i,N_y-1\right),$$

$$e(n,1,j)=e(n,2,j),\quad e_k(t,1,j)=e_k(t,2,j),$$
$$e(n,i,1)=e(n,i,2),\quad e_k(n,i,1)=e_k(n,i,2),$$
$$e(n,i,N_y)=e(n,i,N_y-1),\quad e_k(n,i,N_y)=e_k(n,i,N_y-1),$$
$$p(n,1,j)=p(n,2,j),\quad p(n,N_x,j)=p(n,N_x-1,j),$$
$$p(n,1,j)=p(n,2,j),\quad p(n,N_x,j)=p(n,N_x-1,j).$$

Здесь n — номер временного слоя, i — номер узла по координате x, j — номер узла по координате y.

В публикации [23] рассмотрено влияние коагуляции дисперсных включений на динамику несущей среды, также рассмотрены процессы коагуляции частиц с различными значениями константы коагуляции.

В работе [24] проведено сопоставление численных расчетов для колебаний инертной монодисперсной газовзвеси с результатами физического эксперимента, сопоставление дало приемлемое соответствие.

В статье [25] исследуется сеточная сходимость численной модели динамики коагулирующей газовзвеси.

Обсуждение полученных результатов. На рис. 1 представлена схема акустического резонатора заполненного аэрозолем.

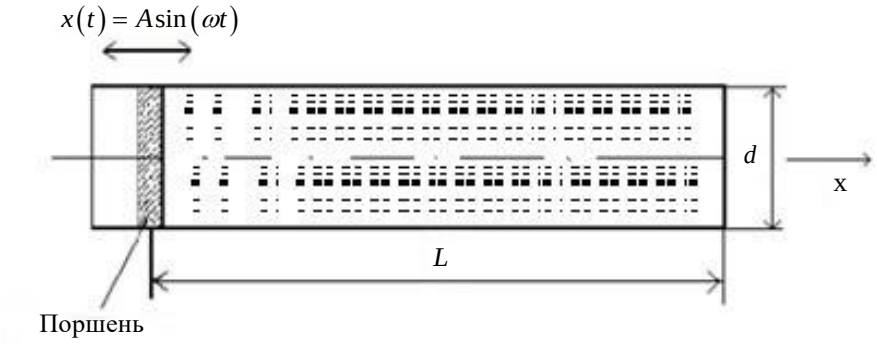


Рис. 1. Схематическое изображение акустического резонатора

Длина которого составляла $L=1$ м, ширина канала — $d=0.06$ м. На левой границе канала располагается поршень, колеблющийся по гармоническому закону — $x(t)=A\cdot sin(\omega\cdot t)$ с частотой первого линейного резонанса для закрытой трубы — $\omega=\pi c/L$, заполненной воздухом с температурой $T=343$ К и плотностью $\rho=1.2$ кг/м^3. Предполагается, что в воздухе взвешены две фракции частиц с диаметрами $d=2$ мкм со средней плотностью $\rho_1=1$ кг/м^3 и $d=200$

мкм со средней плотностью $\rho_2 = 0.2$ кг/м^3, физические плотности материала обеих фракций дисперсной фазы — $\rho_{10} = \rho_{20} = 1000$ кг/м^3. Приведенных ниже результаты расчетов получены для амплитуды колебаний поршня $A = 0.005$ м. С течением времени происходит изменение дисперсности системы вследствие коагуляции частиц мелкой и крупной фракции, относительное скоростное скольжение которых в течение периода на оси трубы при $x = L/2$ достигает $|u_2 - u_1| \approx 4$ м/с (рис. 2).

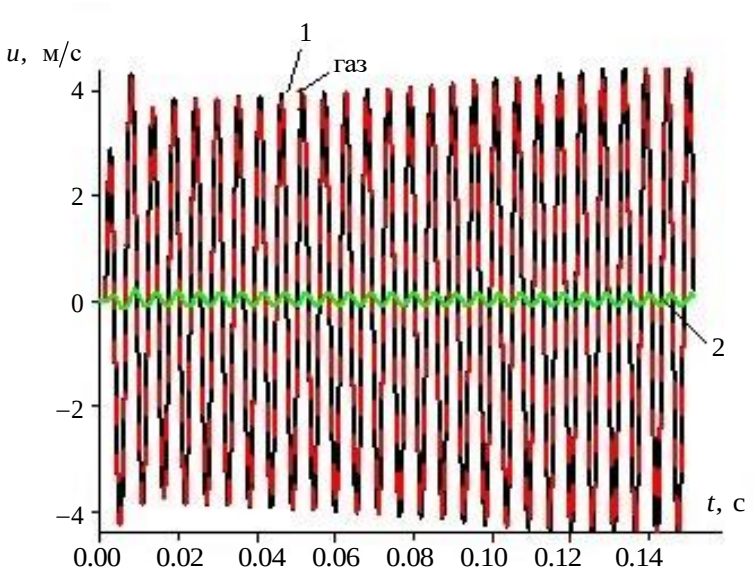


Рис. 2. Временные зависимости продольной составляющей скорости газа, мелкодисперсной (1) и крупнодисперсной фракции (2) в точке $x = L/2$ на оси канала

Колебания газовзвеси сопровождаются ростом температуры несущей среды, а, следовательно, и ростом давления газа (рис. 3.). На рис. 4 приведены временные зависимости плотностей газа, мелкодисперсной (1) и крупнодисперсной фракции (2) в точке $x = L/2$ на оси канала. Средняя плотность мелкодисперсной фракции монотонно снижается к моменту времени $t = 0.18$ с на величину $\Delta p \approx 0.51$ кг/м^3. Приблизительно на ту же величину возрастает средняя плотность крупной фракции (рис. 4). К моменту времени $t \approx 0.143$ с достигается равенство средних плотностей фракций. К моменту времени $t \approx 0.5$ с происходит снижение скорости коагуляции и установление стационарной структуры газовзвеси с плотностью мелкодисперсной фракции $\rho_1 = 0.01$ кг/м^3 и плотностью крупнодисперсной фракции $\rho_2 = 1.19$ кг/м^3.

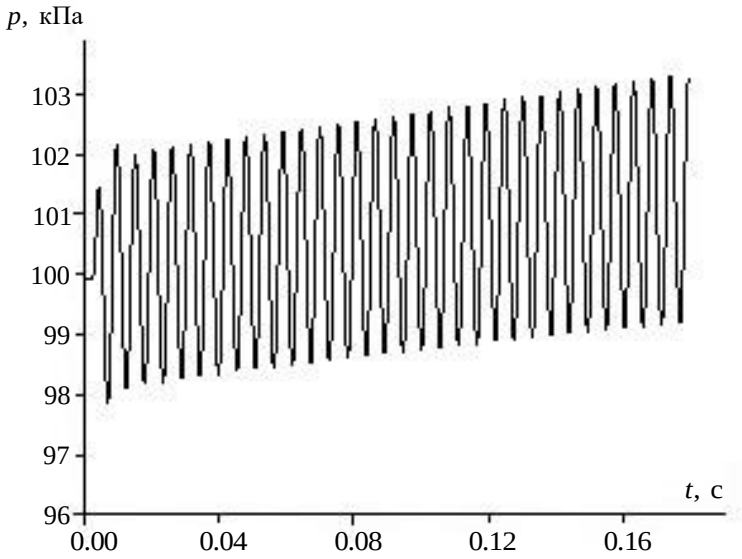


Рис. 3. Зависимость давления от времени в точке $x = L/2$ на оси канала

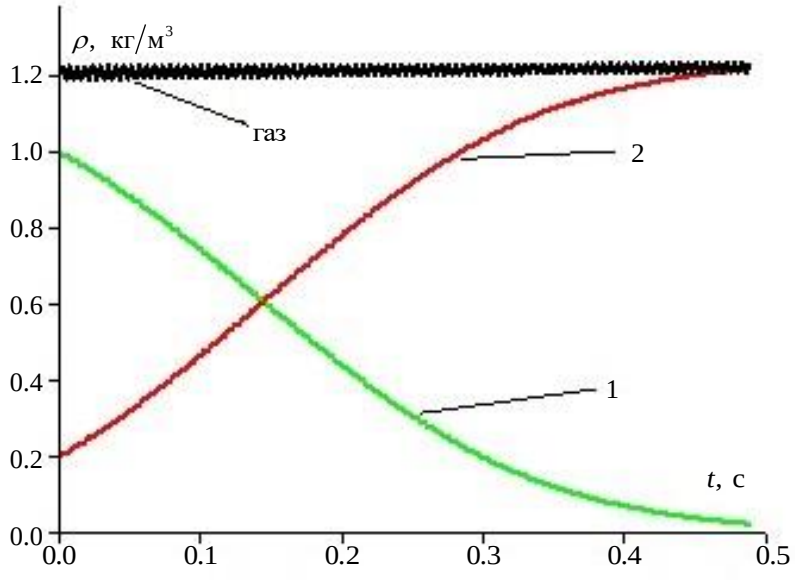


Рис. 4. Временные зависимости плотностей газа, мелкодисперсной (1) и крупнодисперсной фракции (2) в точке $x = L/2$ на оси канала

На рис. 5 представлены пространственные распределения средних плотностей фракции донора с диаметром частиц $d_1 = 2$ мкм (рис. 5, а) и фракции акцептора с диаметром частиц $d_2 = 200$ мкм (рис. 5, б) в момент времени $t = 0.18$ с.

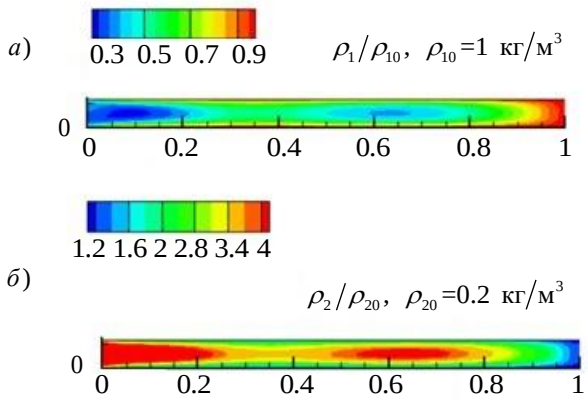


Рис. 5. Распределение плотностей мелкодисперсной (а) и крупной фракции (б) в момент времени $t = 0.18$ с

Области, в которых уменьшается объемное содержание фракции донора совпадают с областями, в которых возрастает средняя плотность фракции акцептора.

На рис. 6 представлена временная зависимость для диаметра частиц крупнодисперсной фракции с начальным радиусом $d_2 = 100$ мкм, полученная для точки на оси канала при $x = L/2$.

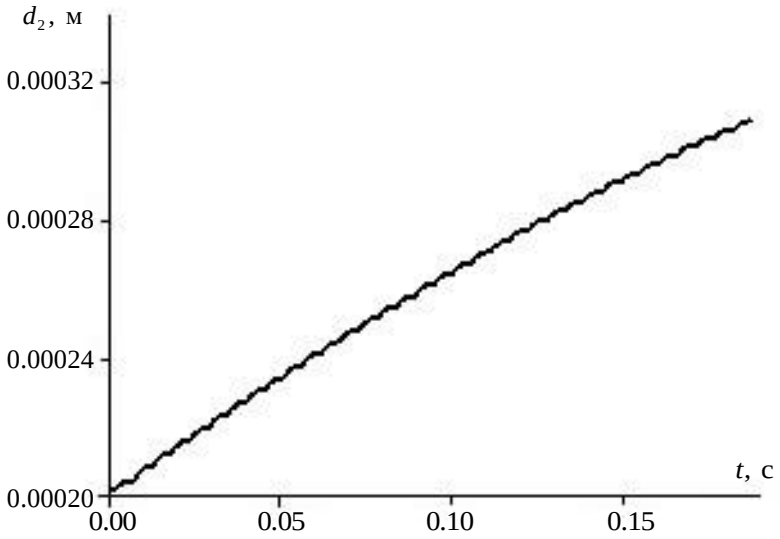


Рис. 6. Временная зависимость радиуса частиц крупной фракции в точке $x = L/2$ на оси канала

Расчеты позволяют сопоставить рост средней плотности крупнодисперсной фракции в точке $x = L/2$ на оси канала с изменением

диаметра частиц в той же точке. Средняя плотность возрастает в этой точке приблизительно в 4 раза (рис. 5, б), что достигается вследствие коагуляции фракций и роста радиуса частиц акцепторов приблизительно в 1.6 раза (рис. 6). Этот результат свидетельствует, также и о работоспособности численного метода.

Выводы и рекомендации. В работе численно моделировались колебания двухфракционной газовзвеси в закрытом акустическом резонаторе на частоте первого линейного резонанса с учетом коагуляции. Выявлено, что в процессе коагуляции, возникающем из за скоростного скольжения фракций дисперсной фазы, в акустическом поле происходит монотонное уменьшение средней плотности мелкодисперсной фракции и увеличение средней плотности крупнодисперсной фракции, а также монотонный рост размера частиц крупнодисперсной фракции.

Работа выполнялась в рамках государственного задания Федерального исследовательского центра Казанского научного центра Российской академии наук.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Нигматулин Р. И. *Основы механики гетерогенных сред*. Москва, Наука, 1978, 336 с.

[2] Кутушев А.Г. *Математическое моделирование волновых процессов в аэродисперсных и порошкообразных средах*. Санкт-Петербург, Недра, 2003, 284 с.

[3] Волков К. Н., Емельянов В.Н. *Течения газа с частицами*. Москва, ФИЗМАТЛИТ, 2008, 598 с.

[4] Федоров А.В., Фомин В.М., Хмель Т.А. *Волновые процессы в газовзвесях частиц металлов*. Новосибирск, Параллель, 2015, 301 с.

[5] Вараксин А.Ю. Двухфазные потоки с твердыми частицами, каплями и пузырями: проблемы и результаты исследований (обзор). *Теплофизика высоких температур*, 2020, т. 58, № 4, с. 646-669.

[6] Wu L., Lei S., Wang Y., Yang S., Lin X., Wang H. A highly efficient biomass compound aerosol suppressant in purifying radioactive cesium droplet aerosols. *Molecules*, 2022, vol. 27, no. 19, art. 6480.

[7] Сулимов В.Д., Шкапов П.М. Гибридные методы вычислительной диагностики двухфазного потока в циркуляционном контуре. *Математическое моделирование и численные методы*, 2015, № 3 (7), с. 68-88.

[8] Волков К.Н. Нестационарное турбулентное течение газовзвеси в канале при наличии вдува в условиях вынужденных колебаний давления. *Прикладная механика и техническая физика*, 2013, т. 54, № 2 (318), с. 65-80.

[9] Федюшкин А.И., Рожков А.Н. Моделирование коалесценции капель. *Математическое моделирование и численные методы*, 2020, № 2 (26), с. 46-58.

[10] Лаптева Е.А., Лаптев А.Г., Аласгарли С.У. Математическая модель контактного охлаждения и очистки от дисперсной фазы газов в насадочных

скрубберах. *Теоретические основы химической технологии*, 2022, т. 56, № 2, с. 244-251.

[11] Шрайбер А.А., Фединчик И.В., Протасов М.В. О влиянии турбулентности газового потока на эффективность улавливания частиц в скруббере Вентури. *Теплофизика высоких температур*, 2015, т. 53, № 1, с. 85-90.

[12] Макаров В.Н., Угольников А.В., Макаров Н.В., Антропов Л.А. Выбор параметров высоконапорных гидровихревых форсунок для пылеподавления. Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых, 2022, № 1, с. 102-111.

[13] Косарев Н.П., Макаров В.Н., Угольников А.В., Макаров Н.В., Дылдин Г.П. Шахтная аэрология пылевых аэрозолей в условиях гидровихревой коагуляции. *Известия Уральского государственного горного университета*, 2020, № 4 (60), с. 155-165.

[14] Suresh V., Liu Z., Perry Z., Gopalakrishnan R. Modeling particle-particle binary coagulation rate constants for spherical aerosol particles at high volume fractions using langevin dynamics simulations. *Journal of Aerosol Science*, 2022, vol. 164, №5, art. 106001.

[15] Zhou D., Liu X., Yang S., Hou Y., Zhong X. Collision dynamics of two liquid nitrogen droplets under a low-temperature condition. *Cryogenics*, 2022, vol. 124, art. 103478.

[16] Amanbaev T.R., Tilleuov G.E., Zuparbekova A. Mathematical modeling of dispersed media flows in the presence of nucleation, coagulation and phase transitions. Bulletin of the Karaganda University. *Physics Series*, 2021, vol. 102, № 2, pp. 14-24.

[17] Хмелев В.Н., Шалунов А.В., Доровских Р.С., Нестеров В.А., Голых Р.Н. Моделирование процесса мокрой очистки газов с наложением ультразвуковых полей. *Южно-Сибирский научный вестник*, 2017, № 4 (20), с. 57-63.

[18] Тимофеева М.В. Влияние коагуляции капель воды на их распределение по размерам в рабочей части аэрохолодильной установки. *Журнал технической физики*, 2019, т. 89, № 4, с. 491-496.

[19] Trivedi M., Tripathi R. N., Sundar S. Modeling the removal by rain of two interacting gases forming distinct particulate matters in the atmosphere. *Advances in Mathematical Modelling, Applied Analysis and Computation*, 2024, pp. 126-142.

[20] Алемасов В.Е., Дрегалин А.Ф., Тишин А.П., Худяков В.А. *Термодинамические и теплофизические свойства продуктов сгорания: справочник в 5-ти томах. Т. 1 Методы расчета*. Москва, Изд-во ВИНИТИ, 1971, 267 с.

[21] Тукмаков А. Л., Тукмаков Д. А. Численное исследование влияния параметров дисперсных частиц на осаждение твердой фазы электрически заряженной полидисперсной газовзвеси. *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика*, 2022, т. 22, № 1, с. 90-102.

[22] Тукмаков А.Л., Тонконог В.Г., Арсланова С.Н. Волновая коагуляция полидисперсной газовзвеси в технологии газификации и криостатирования сжиженного природного газа. *Акустический журнал*, 2016, т. 62, № 1, с. 125-131.

[23] Тукмаков А.Л., Тукмаков Д.А. Численное исследование влияния коагуляции на динамику двухфракционной газовзвеси. *Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование*, 2024, т. 17, № 4, с. 66-81.

[24] Тукмаков Д.А. Исследование сеточной сходимости численной модели динамики полидисперсной коагулирующей газовзвеси. *Моделирование систем и процессов*, 2025, т.18, № 2, с. 107-115.

[25] Тукмаков Д. А. Численное моделирование колебаний вязкого газа с дисперсными включениями с частотой первого линейного резонанса в закрытом канале. Известия высших учебных заведений. *Поволжский регион. Физико-математические науки*, 2022, № 3 (63), с. 58–71.

[26] Флетчер К. *Вычислительные методы в динамике жидкостей. Т. 2. Методы расчета различных течений*. Москва, Мир, 1991, 551 с.

[27] Ковеня В.М. Тарнавский Г.А., Черный С.Г. *Применение метода расщепления в задачах аэродинамики*. Новосибирск, Наука, 1990, 247 с.

[28] Музафаров И.Ф., Утюжников С.В. Применение компактных разностных схем к исследованию нестационарных течений сжимаемого газа. *Математическое моделирование*, 1993, т. 5, №3, с.74-83.

Статья поступила в редакцию 13.12.2025

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Тукмаков А.Л., Тукмаков Д.А., Ахунов А.А. Численное моделирование колебаний коагулирующей двухфракционной газовзвеси в акустическом резонаторе. *Математическое моделирование и численные методы*, 2026, № 2, с. 66–85.

Тукмаков Алексей Львович — д-р физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник, Институт механики и машиностроения Казанского научного центра Российской академии наук. e-mail: altukmakov@kai.ru

Тукмаков Дмитрий Алексеевич — канд. физ.-мат. наук, научный сотрудник, Институт механики и машиностроения Казанского научного центра Российской академии наук. e-mail: tukmakovda@imm.knc.ru

Ахунов Адель Айратович — научный сотрудник, Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева. e-mail: white-bars95@yandex.ru

Numerical simulation of coagulating two-fraction gas suspension fluctuations in acoustic resonator

© A.L. Tukmakov[1], D.A. Tukmakov[1], A.A. Akhunov[2]

[1]FIC KazanSC of RAS, Kazan, 420111, Russia
[2]FSBEI HE «KNRTU–KAI», Kazan, 420111, Russia

One of the most effective technologies for gas purification from dispersed impurities is liquid purification, due to the inability of inertial separators to capture fine particles. This raises the problem of increasing the efficiency of gas-dispersed media purification using this method. One approach to solving this problem is to increase the size of dispersed inclusions through the coagulation of fine and large droplets. Optimizing liquid purification technologies requires studying coagulation processes, including the coagulation of dispersed particles in acoustic fields. To describe the flow of a multiphase medi-

um, a continuum method for modeling the dynamics of inhomogeneous media was used, which involved solving a complete hydrodynamic system of equations of motion for each component of the mixture. The dispersed phase was modeled as a multifraction polydisperse phase, where the fractions differed in material density and the size of the dispersed inclusions. Interphase heat and momentum transfer were considered, including aerodynamic drag, the dynamic Archimedes force, and the added mass force. The dynamics of the carrier medium were described by a system of Navier-Stokes equations for a viscous, compressible, heat-conducting gas. The mathematical model took into account the collisional coagulation of particles of different fractions. The system of equations of the mathematical model was supplemented with boundary conditions. An explicit finite-difference method was used to integrate the equations, and a nonlinear correction scheme was used to overcome numerical oscillations. The study simulated the coagulation of two-fraction aerosol droplets in an acoustic resonator at the frequency of the first linear resonance. Time dependences for the velocity and average density of the dispersed phase fractions are presented.

***Keywords**: numerical modeling, multiphase media, coagulation*

REFERENCES

[1] Nigmatulin R. I. *Osnovy mekhaniki geterogennykh sred* [Fundamentals of Mechanics of Heterogeneous Media]. Moscow, Nauka Publ., 1978, 336 p.

[2] Kutyshev A. G. *Matematicheskoe modelirovanie volnovykh protsessov v aerodispersnykh i poroshkoobraznykh sredakh* [Mathematical Modeling of Wave Processes in Aerodisperse and Powder-like Media]. St. Petersburg, Nedra Publ, 2003, 284 p.

[3] Volkov K. N., Emelianov V. N. *Gas-particle flows*. Moscow, Fizmatlit, 2008, 598 p.

[4] Fedorov A. V., Fomin V. M., Khmel T. A. *Volnovye protsessy v gazovzvesyakh chastits metallov* [Wave Processes in Gas Suspensions of Metal Particles]. Novosibirsk, Parallel', 2015, 301 p.

[5] Varaksin A. Yu. Two-phase flows with solid particles, droplets, and bubbles: problems and research results (review). *High Temperature,* 2020, vol. 58, no. 4, pp. 595-614.

[6] Wu L., Lei S., Wang Y., Yang S., Lin X., Wang H. A highly efficient biomass compound aerosol suppressant in purifying radioactive cesium droplet aerosols. *Molecules*, 2022, vol. 27, no. 19, art. 6480.

[7] Sulimov V.D., Shkapov P.M. Gibridnye metody vychislitel'noi diagnostiki dvukhfaznogo potoka v tsirkulyatsionnom konture [Hybrid methods of computational diagnostics of two-phase flow in a circulation loop]. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2015, no. 3 (7), pp. 68-88.

[8] Volkov K.N. Unsteady turbulent flow of a gas suspension in a channel under conditions of injection and forced pressure oscillations. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics,* 2013, vol. 54, no. 2 (318), pp. 65-80.

[9] Fedyushkin A.I., Rozhkov A.N. Modeling of droplet coalescence. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2020, no. 2 (26), pp. 46-58.

[10] Lapteva E.A., Laptev A.G., Alasgarli S.U. Mathematical model of contact cooling and purification of the dispersed phase of gases in packed scrubbers. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 2022, vol. 56, no. 2, pp. 244-251.

[11] Shraiber A.A., Fedinchik I.V., Protasov M.V. On effect of gas flow turbulence

on the efficiency of particle collection in a venturi scrubber. *High Temperature*, 2015, vol. 53, no. 1, pp. 80-85.

[12] Makarov V.N., Ugol'nikov A.V., Makarov N.V., Antropov L.A. Identification of parameters for high-pressure hydro swirl nozzles for dust suppression. *Journal of Mining Science,* 2022, no. 1, pp. 90-97.

[13] Kosarev N.P., Makarov V.N., Ugolnikov A.V., Makarov N.V., Dyl'din G.P. Mine aerology of dust aerosols under conditions of hydro-vortex coagulation. *Izvestiya Ural'skogo gosudarstvennogo gornogo universiteta* [NEWS of the Ural State Mining University], 2020, no. 4 (60), pp. 155-165.

[14] Suresh V., Liu Z., Perry Z., Gopalakrishnan R. Modeling particle-particle binary coagulation rate constants for spherical aerosol particles at high volume fractions using langevin dynamics simulations. *Journal of Aerosol Science,* 2022, vol. 164, № 5, art. 106001.

[15] Zhou D., Liu X., Yang S., Hou Y., Zhong X. Collision dynamics of two liq-uid nitrogen droplets under a low-temperature condition. *Cryogenics,* 2022, vol. 124, art. 103478.

[16] Amanbaev T.R., Tilleuov G.E., Zuparbekova A. Mathematical modeling of dispersed media flows in the presence of nucleation, coagulation and phase transitions. *Bulletin of the Karaganda University. Physics Series,* 2021, vol. 102, no. 2, pp. 14-24.

[17] Khmelev V.N., Shalunov A.V., Dorovskikh R.S., Nesterov V.A., Golykh R.N. Modelirovanie protsessa mokroi ochistki gazov s nalozheniem ul'trazvukovykh polei [Modeling of the process of wet gas cleaning with the application of ultrasonic fields]. *South-Siberian Scientific Bulletin,* 2017, no. 4 (20), pp. 57-63.

[18] Timofeeva M.V. The effect of coagulation of water droplets on their size distribution in the operating part of an air-cooler device. Technical Physics, 2019, vol.64, no. 4, pp. 449-454.

[19] Trivedi M., Tripathi R. N., Sundar S. Modeling the removal by rain of two interacting gases forming distinct particulate matters in the atmosphere. *Advances in Mathematical Modelling, Applied Analysis and Computation,* 2024, pp. 126-142.

[20] Alemasov V.E., Dregalin A.F., Tishin A.P., Khudyakov V.A. *Termodinamicheskie i teplofizicheskie svoistva produktov sgoraniya: spravochnik v 5-ti tomakh. T. 1. Metody rascheta* [Thermodynamic and Thermophysical Properties of Combustion Products: Handbook in 5 Volumes. Vol. 1. Calculation Methods]. Moscow, VINITI Pub.l, 1971, 267 p.

[21] Tukmakov A.L., Tukmakov D.A. Numerical study of the influence of the parameters of dispersed particles on the deposition of the solid phase of an electrically charged polydisperse gas suspension. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika* [News of the Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics], 2022, no. 1, pp. 90-102.

[22] Tukmakov A.L., Tonkonog V.G., Arslanova S.N. Wave coagulation of a polydisperse gas suspension in the technology of gasification and cryostatting of liquefied natural gas. *Acoustical Physics*. 2016, vol. 62, no. 1, pp. 125-131.

[23] Tukmakov A.L., Tukmakov D.A. Numerical study of the influence of coagulation on the dynamics of a two-fraction gas suspension. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software,* 2024, vol. 17, no. 4, pp. 66-81.

[24] Tukmakov D.A. Study of grid convergence of a numerical model of dynamics of a polydispersonic coagulating gas suspension. *Modeling of Systems and Processes*, 2025, vol. 18, no. 2, pp. 107-115.

[25] Tukmakov D.A. Numerical simulation of oscillations of a viscous gas with dispersive inclusions with the frequency of the first linear resonance in a closed channel. *University Proceedings. Volga Region. Physical and Mathematical Sciences*, 2022, no. 3 (63), pp. 58–71.

[26] Fletcher K. *Vychislitel'nye metody v dinamike zhidkostei. T. 2. Metody rascheta razlichnykh techenii* [Computational Methods in Fluid Dynamics. Vol. 2. Methods for Calculating Various Flows]. Moscow, Mir Publ., 1991, 551 p.

[27] Kovenya V.M., Tarnavsky G.A., Cherny S.G. *Primenenie metoda rasshchepleniya v zadachakh aerodinamiki* [Application of the Splitting Method in Problems of Aerodynamics]. Novosibirsk, Nauka Publ, 1990, 247 p.

[28] Muzafarov I.F., Utyuzhnikov S.V. Primenenie kompaktnykh raznostnykh skhem k issledovaniyu nestatsionarnykh techenii szhimaemogo gaza [Application of Compact Difference Schemes to the Study of Unsteady Flows of a Compressible Gas]. *Mathematical Models and Computer Simulations,* 1993, vol. 5, no. 3, pp. 74-83.

Tukmakov A.L., Dr. Sci. (Phys. — Math.), Leading Researcher, Institute of Mechanics and Mechanical Engineering, Kazan Scientific Center, Russian Academy of Sciences. e-mail: altukmakov@kai.ru

Tukmakov D.A., Cand. (Phys. — Math.), Researcher, Institute of Mechanics and Mechanical Engineering, Kazan Scientific Center, Russian Academy of Sciences. e-mail: tukmakovda@imm.knc.ru

Akhunov A.A., Researcher, A.N. Tupolev Kazan National Research Technical University. e-mail: white-bars95@yandex.ru