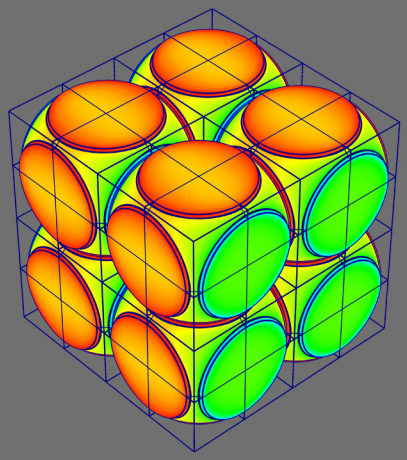
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Земсков А.В., Оконечников А.С., Сердюк Д.О. Моделирование изгибных волн в анизотропной вязкоупругой пластине Чоу. Математическое моделирование и численные методы, 2026, № 2(50), с. 20–43.

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/405/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.216.253
06.11.2026 02:37:26

УДК 539.31 DOI: 10.18698/2309-3684-2026-2-2043

Моделирование изгибных волн в анизотропной вязкоупругой пластине Чоу

© А.В. Земсков, А.С. Оконечников, Д.О. Сердюк

МАИ (НИУ), г. Москва, 125993, Россия

В работе аналитическими методами найдены новые фундаментальные решения задачи механики деформируемого твердого тела, а именно нестационарные фундаментальные решения для неограниченной тонкой вязкоупругой анизотропной пластины на упруго-инерционном основании. В качестве математической модели пластины использованы гипотезы Чоу, согласно которым общее нормальное перемещение определяется как сумма компонент нормального перемещения пластины, вызванных её изгибом и сдвигом. Рассмотренная в работе модель анизотропии подразумевает наличие одной плоскости симметрии упругой среды, геометрически совпадающей со срединной плоскостью пластины. Вязкость описана моделью Кельвина–Фойгта. Упруго-инерционное основание характеризуется жесткостью и массовым коэффициентом. Фундаментальные решения построены с использованием прямых и обратных интегральных преобразований Лапласа по времени и Фурье по пространственным координатам. Обратные преобразования Лапласа найдены при помощи вычетов. Оригиналы функций по Фурье восстановлены путем связи обратного преобразования Фурье с рядами Фурье на переменном интервале. Достоверность полученных решений подтверждена путем сравнения с известными фундаментальными решениями для изотропных пластин по гипотезам Кирхгофа и гипотезам Тимошенко. Показано, что фундаментальные решения математической модели пластины Чоу включают в себя результаты, которые можно получить по математическим моделям пластин Кирхгофа и Тимошенко в отдельности. Дана качественная оценка влияния вязких свойств материала на характеры фундаментальных решений. Продемонстрировано, что решения для вязкоупругого материала имеют более плавный характер по отношению к аналогичным решениям для упругого материала. Приведен пример расчета нестационарных нормальных перемещений пластины при воздействии подвижной сосредоточенной нагрузки с переменной во времени амплитудой.

Ключевые слова: *анизотропный материал, вязкоупругий материал, изгибные волны, пластина Чоу, упруго-инерционное основание, фундаментальное решение*

Введение. В условиях современной эксплуатации авиационной и морской техники особую значимость приобретает живучесть конструкций при экстремальных нестационарных воздействиях. К таким воздействиям относятся ударные нагрузки от поражающих элементов, взрывные волны, а также резкие маневренные перегрузки, характеризующиеся высокой интенсивностью и кратковременностью приложения сил. Внедрение анизотропных конструкционных материалов, в том числе композиционных материалов, в силовые элементы планера самолета и корпуса судна ставит перед исследователями

сложную задачу прогнозирования их поведения в этих условиях. В частности, изучение процессов деформирования анизотропных пластин при высокоскоростном ударе необходимо для обеспечения баллистической стойкости авиационных бронеэлементов и защиты борта судна от столкновений с преградами. Нестационарный характер воздействия требует исследования волновых процессов, распространяющихся в анизотропной среде с разной скоростью в зависимости от направления. Понимание этих механизмов является неотъемлемым условием для создания надежной и безопасной техники нового поколения.

Вопросы динамики вязкоупругих сред актуальны в настоящее время. Так, в серии работ [1], [2], [3], [4] представлены результаты исследований волновых вязкоупругих процессов в таких объектах как функционально-градиентный вязкоупругий слой, полый шар и цилиндр.

Аналогичные данные имеются для тонкостенных конструкций из функционально-градиентных материалов. В частности, в работах [5], [6] решены квазистатическая и динамическая задачи для вязкоупругой пластины из подобных материалов, в том числе на упругом основании. Исследованию вопросов, связанных с прочностью композитных пластин, посвящены публикации [7], [8], [9], [10], [11].

Вопросы динамики двухслойных и трехслойных пластин также вызывают интерес у исследователей. Так, в статье [12] рассматривается бесконечная двухслойная пластина из вязкоупругого материала, для которой асимптотическими методами выводятся уравнения движения. В работе [13] численными методами исследуются гармонические колебания вязкоупругой изотропной трёхслойной пластины.

Наиболее полно изучены вопросы динамики изотропных вязкоупругих пластин [14], [15], [16], [17], [18]. В этих работах исследуются вопросы стационарных и нестационарных колебаний. В работе [14] рассматривается задача о стационарных колебаниях полубесконечной вязкоупругой ледяной пластины. Вязкость льда моделируется в рамках модели Кельвина – Фойгта. В статье [15] исследуется динамическая реакция свободно опёртых кольцевых пластин на асимметричные гармонические поперечные нагрузки. Исследование [16] посвящено изучению динамики вязкоупругой пластины Тимошенко, подвергающейся одновременно гармонической поперечной нагрузке и сжатию. В публикации [17] изучаются вынужденные колебания вязкоупругой изотропной пластины, демпфирующие свойства которой описаны дробными производными. В работе [18] исследуется вязкоупругая изотропная пластина на вязкоупругом демпфирующем слое. Для описания вязкоупругости авторами используется модель Кельвина – Фойгта.

Менее изучены динамические процессы в анизотропных пластинах. Нестационарной динамике упругих анизотропных пластин посвящена серия работ [19], [20], [21], [22]. Здесь численно-аналитическими методами получены фундаментальные решения для анизотропных пластин Кирхгофа и Тимошенко как неограниченных размеров, так и произвольной формы. Вязкоупругие анизотропные пластины рассмотрены в таких работах как [23] и [24]. В [23] численными методами решена задача об устойчивости вязкоупругой анизотропной пластины под действием быстро возрастающей сдвигающей нагрузки в геометрически нелинейной постановке. В [24] численными методами исследуются колебания вязкоупругой армированной анизотропной пластины по гипотезам Кирхгофа.

В настоящей работе представлены новые результаты исследования волновых процессов в пластине по гипотезам Чоу [25]. Исходные уравнения для упругой ортотропной пластины [25] расширены и модифицированы для вязкоупругого анизотропного материала и связи пластины с упруго-инерционным основанием. Главной особенностью математической модели пластины по гипотезам Чоу является возможность эффективно оценивать вклад изгиба и сдвига пластины в ее нормальное перемещение.

Математическая постановка задачи.

Объектом исследования является тонкая пластина постоянной толщиной h (м). Движение пластины рассмотрено в прямоугольной декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$. Плоскость Ox_1x_2 совпадает со срединной плоскостью пластины. В начальный момент времени $t=0$ (с) пластина покоится, затем на неё действует нормальное давление $p\left(x_1,x_2,t\right)$ (Па). Давление распределено по произвольной области и переменно по времени t и координатам x_1, x_2 (см. рис. 1).

Материал пластины вязкоупругий и анизотропный. Его вязкоупругие свойства зависят от скорости деформации и описываются моделью Кельвина – Фойгта. Модель анизотропии подразумевает одну плоскость симметрии, совпадающую со срединной плоскостью пластины – моноклинный тип симметрии в терминологии кристаллов. Для пластины по гипотезам Чоу такой тип материала требует учета девяти независимых упругих постоянных c_{11}, c_{12}, c_{16}, c_{22}, c_{26}, c_{44}, c_{45}, c_{55}, c_{66} (Па) и девяти независимых вязких постоянных η_{11}, η_{12}, η_{16}, η_{22}, η_{26}, η_{44}, η_{45}, η_{55}, η_{66} (Па·с) соответствующих тензоров.

Пластина связана с упруго-инерционным основанием, математическая модель которого обладает жёсткостью c_6 (Па/м) и массовым коэффициентом m_b (кг/м^2).

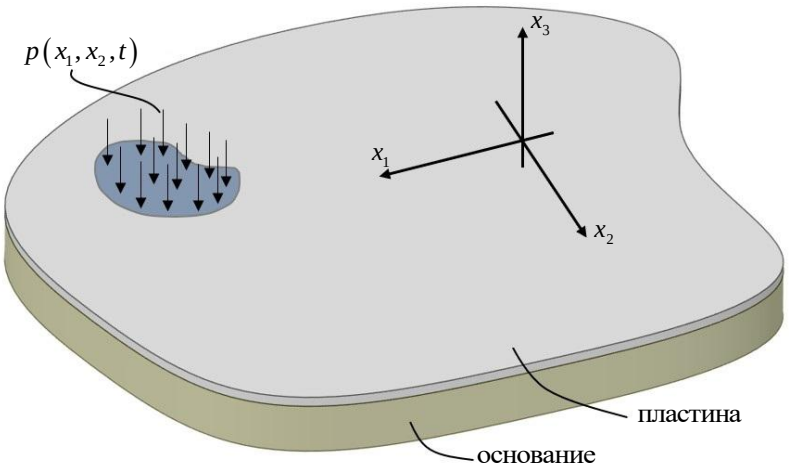


Рис. 1. Вязкоупругая анизотропная пластина на упруго-инерционном основании под действием нестационарного нормального давления

Постановка задачи состоит из уравнений движения в перемещениях $\left(w_b = w_b\left(x_1, x_2, t\right),\ w_s = w_s\left(x_1, x_2, t\right),\ p = p\left(x_1, x_2, t\right)\right)$:

$$\begin{gathered}\left(\rho h + m_b\right)\frac{\partial^2\left(w_b + w_s\right)}{\partial t^2} = k^2 h\left(E_1\left(w_s\right) + V_1\left(w_s\right)\right) - c_b\left(w_b + w_s\right) + p, \\ \rho I\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w_b}{\partial x_2^2}\right) = I\left(E_2\left(w_b\right) + V_2\left(w_b\right)\right) + k^2 h\left(E_1\left(w_s\right) + V_1\left(w_s\right)\right),\end{gathered} \tag{1}$$

где

$$E_1\left(w_s\right) = c_{44}\frac{\partial^2 w_s}{\partial x_2^2} + c_{55}\frac{\partial^2 w_s}{\partial x_1^2} + 2c_{45}\frac{\partial^2 w_s}{\partial x_1 \partial x_2},$$

$$V_1\left(w_s\right) = \eta_{44}\frac{\partial^3 w_s}{\partial x_2^2 \partial t} + \eta_{55}\frac{\partial^3 w_s}{\partial x_1^2 \partial t} + 2\eta_{45}\frac{\partial^3 w_s}{\partial x_1 \partial x_2 \partial t},$$

$$E_2\left(w_b\right) = c_{11}\frac{\partial^4 w_b}{\partial x_1^4} + c_{22}\frac{\partial^4 w_b}{\partial x_2^4} + 2\left(c_{12} + 2c_{66}\right)\frac{\partial^4 w_b}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + $$

$$+4c_{16}\frac{\partial^4 w_b}{\partial x_1^3 \partial x_2} + 4c_{26}\frac{\partial^4 w_b}{\partial x_1 \partial x_2^3},$$

$$V_2\left(w_b\right) = \eta_{11}\frac{\partial^5 w_b}{\partial x_1^4 \partial t} + \eta_{22}\frac{\partial^5 w_b}{\partial x_2^4 \partial t} + 2\left(\eta_{12} + 2\eta_{66}\right)\frac{\partial^5 w_b}{\partial x_1^2 \partial x_2^2 \partial t} + $$

$$+4\eta_{16}\frac{\partial^5 w_b}{\partial x_1^3 \partial x_2 \partial t} + 4\eta_{26}\frac{\partial^5 w_b}{\partial x_1 \partial x_2^3 \partial t}.$$

Начальных условий:

$$w_b\big|_{t=0} = w_s\big|_{t=0} = 0,\ \left.\frac{\partial w_b}{\partial t}\right|_{t=0} = \left.\frac{\partial w_s}{\partial t}\right|_{t=0} = 0. \tag{2}$$

Условий ограниченности решений на бесконечности:

$$\lim_{r\to\infty} w_b = 0,\ \lim_{r\to\infty} w_s = 0,\ r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}. \tag{3}$$

В соотношениях (1) – (3): w_b (м) — нормальное перемещение пластины, вызванное её изгибом, w_s (м) — нормальное перемещение пластины, вызванное её сдвигом, ρ (кг/м^3) — плотность материала пластины, $I = h^3/12$ (м^3) — погонный момент инерции, $k = \sqrt{5/6}$ — коэффициент сдвига.

Цель работы — решение задачи (1) – (3) и поиск новых нестационарных функций $w_b(x_1, x_2, t)$ и $w_s(x_1, x_2, t)$. Полное нормальное перемещение пластины $w(x_1, x_2, t)$ определяется как сумма $w_b(x_1, x_2, t)$ и $w_s(x_1, x_2, t)$:

$$w(x_1, x_2, t) = w_b(x_1, x_2, t) + w_s(x_1, x_2, t). \tag{4}$$

Для удобства параметрического анализа постановка задачи приводится к безразмерному виду с использованием следующих безразмерных параметров, обозначенных штрихами:

$$x_1' = \frac{x_1}{L},\ x_2' = \frac{x_2}{L},\ w_b' = \frac{w_b}{L},\ w_s' = \frac{w_s}{L},\ p' = \frac{pL}{c_1^2(\rho h + m_b)},\ \tau' = \frac{c_1 t}{L},$$
$$L = \frac{h}{\sqrt{12}},\ c_1 = \sqrt{\frac{c_{11}}{\rho}},\ C_1 = \frac{k^2 h}{c_1^2(\rho h + m_b)},\ C_2 = \frac{k^2 h}{c_1 L(\rho h + m_b)}, \tag{5}$$
$$C_3 = \frac{1}{c_1^2 \rho},\ C_4 = \frac{1}{c_1 \rho L},\ C_5 = \frac{L^2 k^2 h}{c_1^2 \rho I},\ C_6 = \frac{L k^2 h}{c_1 \rho I},\ C_7 = \frac{L^2 c_b}{c_1^2(\rho h + m_b)}.$$

В (5) τ' — безразмерное время, L — характерный линейный размер, c_1 — скорость волны растяжения/сжатия.

Уравнения движения в безразмерном виде имеют следующий вид (здесь и далее штрихи в безразмерных величинах опущены):

$$\frac{\partial^2(w_b + w_s)}{\partial \tau^2} = \left(C_1 Z_1(w_s) + C_2 B_1(w_s)\right) - C_7(w_b + w_s) + p,$$
$$\frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w_b}{\partial x_2^2}\right) = \left(C_3 Z_2(w_b) + C_4 B_2(w_b)\right) + \left(C_5 Z_1(w_s) + C_6 B_1(w_s)\right), \tag{6}$$

где дифференциальные операторы имеют следующий вид:

$$
\begin{gathered}
Z_1\left(w_s\right)=c_{44}\frac{\partial^2 w_s}{\partial x_2^2}+c_{55}\frac{\partial^2 w_s}{\partial x_1^2}+2c_{45}\frac{\partial^2 w_s}{\partial x_1\partial x_2},\\
B_1\left(w_s\right)=\eta_{44}\frac{\partial^3 w_s}{\partial x_2^2\partial\tau}+\eta_{55}\frac{\partial^3 w_s}{\partial x_1^2\partial\tau}+2\eta_{45}\frac{\partial^3 w_s}{\partial x_1\partial x_2\partial\tau},\\
Z_2\left(w_b\right)=c_{11}\frac{\partial^4 w_b}{\partial x_1^4}+c_{22}\frac{\partial^4 w_b}{\partial x_2^4}+2\left(c_{12}+2c_{66}\right)\frac{\partial^4 w_b}{\partial x_1^2\partial x_2^2}+\\
+4c_{16}\frac{\partial^4 w_b}{\partial x_1^3\partial x_2}+4c_{26}\frac{\partial^4 w_b}{\partial x_1\partial x_2^3},\\
B_2\left(w_b\right)=\eta_{11}\frac{\partial^5 w_b}{\partial x_1^4\partial\tau}+\eta_{22}\frac{\partial^5 w_b}{\partial x_2^4\partial\tau}+2\left(\eta_{12}+2\eta_{66}\right)\frac{\partial^5 w_b}{\partial x_1^2\partial x_2^2\partial\tau}+\\
+4\eta_{16}\frac{\partial^5 w_b}{\partial x_1^3\partial x_2\partial\tau}+4\eta_{26}\frac{\partial^5 w_b}{\partial x_1\partial x_2^3\partial\tau}.
\end{gathered}
\tag{7}
$$

Фундаментальные решения. Решение (4) задачи (1) – (3) ищется с применением метода функций Грина (метода фундаментальных решений):

$$
\begin{gathered}
w_b\left(x_1,x_2,\tau\right)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{\tau}G_b\left(x_1-\xi,x_2-\zeta,\tau-\gamma\right)p\left(\xi,\zeta,\gamma\right)d\gamma d\zeta d\xi,\\
w_s\left(x_1,x_2,\tau\right)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{\tau}G_s\left(x_1-\xi,x_2-\zeta,\tau-\gamma\right)p\left(\xi,\zeta,\gamma\right)d\gamma d\zeta d\xi.
\end{gathered}
\tag{8}
$$

Постановка задачи о фундаментальных решениях для неограниченной пластины Чоу следует из соотношений (6), (7), (2) и (3) $\left(G_b=G_b\left(x_1,x_2,\tau\right),\ G_s=G_s\left(x_1,x_2,\tau\right),\ \delta=\delta\left(x_1,x_2,\tau\right)\right)$:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial^2\left(G_b+G_s\right)}{\partial\tau^2}=\left(C_1\tilde{Z}_1\left(G_s\right)+C_2\tilde{B}_1\left(G_s\right)\right)-C_7\left(G_b+G_s\right)+\delta,\\
\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\left(\frac{\partial^2 G_b}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 G_b}{\partial x_2^2}\right)=\left(C_3\tilde{Z}_2\left(G_b\right)+C_4\tilde{B}_2\left(G_b\right)\right)+\\
+\left(C_5\tilde{Z}_1\left(G_s\right)+C_6\tilde{B}_1\left(G_s\right)\right),\\
\tilde{Z}_1\left(G_s\right)=Z_1\left(G_s\right),\ \tilde{Z}_2\left(G_b\right)=Z_2\left(G_b\right),\\
\tilde{B}_1\left(G_s\right)=B_1\left(G_s\right),\ \tilde{B}_2\left(G_b\right)=B_2\left(G_b\right).
\end{gathered}
\tag{9}
$$

$$
G_b\big|_{\tau=0}=G_s\big|_{\tau=0}=0,\ \left.\frac{\partial G_b}{\partial\tau}\right|_{\tau=0}=\left.\frac{\partial G_s}{\partial\tau}\right|_{\tau=0}=0.
\tag{10}
$$

$$\lim_{r\to\infty} G_b = 0,\ \lim_{r\to\infty} G_s = 0,\ r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}. \tag{11}$$

В (9) – (11) G_b, G_s — фундаментальные решения для нормального перемещения, вызванного изгибом и сдвигом пластины, δ — дельта-функция Дирака.

Решение задачи (9) – (11) строится с использованием интегральных преобразований Лапласа и Фурье [26]:

$$\begin{gathered}
f^{FL}(q_1,q_2,s) = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty f(x_1,x_2,t)\,\mathrm{e}^{-i(q_1x_1+q_2x_2)-s\tau}\,dx_1dx_2d\tau,\\
\left[\frac{\partial^n f(x_1,x_2,\tau)}{\partial t^n}\right]^L = s^n f^L(x_1,x_2,s),\\
\left[\frac{\partial^n f(x_1,x_2,\tau)}{\partial x_1^n}\right]^F = (iq_1)^n\ f^F(q_1,q_2,\tau),\\
\left[\frac{\partial^n f(x_1,x_2,\tau)}{\partial x_2^n}\right]^F = (iq_2)^n\ f^F(q_1,q_2,\tau),\\
\left[\delta(\tau)\right]^L = 1,\ \left[\delta(x_1,x_2)\right]^F = 1.
\end{gathered} \tag{12}$$

В (12) и далее верхний индекс F и L обозначает, что функция является изображением по Фурье и Лапласу соответственно, при этом q_1, q_2 и s — параметры этих интегральных преобразований, i — мнимая единица.

Применение (12) к задаче (9) – (11) приводит к системе линейных алгебраических уравнений относительно изображений искомых функций. В матричном виде искомая система имеет следующий вид:

$$\begin{gathered}
\mathbf{M}\mathbf{g}^{FL} = \mathbf{q}^{FL},\\
\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix},\ \mathbf{g}^{FL} = \left(G_b^{LF}, G_s^{LF}\right)^T,\ \mathbf{q}^{FL} = (1,0)^T,
\end{gathered} \tag{13}$$

где

$$\begin{gathered}
m_{11} = s^2 + C_7,\quad m_{12} = s^2 + sC_2R_1 + C_1R_2 + C_7,\\
m_{21} = -\left(s^2R_3 + sC_4R_4 + C_3R_5\right),\quad m_{22} = sC_6R_1 + C_5R_2,\\
R_1 = R_1(q_1,q_2) = q_2^2\eta_{44} + q_1^2\eta_{55} + 2q_1q_2\eta_{45},\\
R_2 = R_2(q_1,q_2) = q_2^2c_{44} + q_1^2c_{55} + 2q_1q_2c_{45},\quad R_3 = R_3(q_1,q_2) = q_1^2 + q_2^2,\\
R_4 = R_4(q_1,q_2) = q_1^4\eta_{11} + q_2^4\eta_{22} + 2q_1^2q_2^2\left(\eta_{12} + 2\eta_{66}\right) + 4q_1^3q_2\eta_{16} + 4q_1q_2^3\eta_{26},\\
R_5 = R_5(q_1,q_2) = q_1^4c_{11} + q_2^4c_{22} + 2q_1^2q_2^2\left(c_{12} + 2c_{66}\right) + 4q_1^3q_2c_{16} + 4q_1q_2^3c_{26}.
\end{gathered}$$

Решение системы (13) получается с помощью правила Крамера. В результате трансформанты Фурье-Лапласа функций G_b^{LF} и G_s^{LF} записываются так:

$$G_b^{LF}\left(q_1,q_2,s\right)=\frac{N_1\left(q_1,q_2,s\right)}{D\left(q_1,q_2,s\right)},\quad G_s^{LF}\left(q_1,q_2,s\right)=\frac{N_2\left(q_1,q_2,s\right)}{D\left(q_1,q_2,s\right)},\qquad(14)$$

где

$$N_1\left(q_1,q_2,s\right)=C_6R_1s+C_5R_2,\quad N_2\left(q_1,q_2,s\right)=R_3s^2+C_4R_4s+C_3R_5,$$

$$D\left(q_1,q_2,s\right)=d_1s^4+d_2s^3+d_3s^2+d_4s+d_5,$$

$$d_1=d_1\left(q_1,q_2\right)=R_3,\quad d_2=d_2\left(q_1,q_2\right)=C_2R_1R_3+C_4R_4+C_6R_1,$$

$$d_3=d_3\left(q_1,q_2\right)=C_2C_4R_1R_4+C_1R_2R_3+C_3R_5+C_5R_2+C_7R_3,$$

$$d_4=d_4\left(q_1,q_2\right)=C_1C_4R_2R_4+C_2C_3R_1R_5+C_4C_7R_4+C_6C_7R_1,$$

$$d_5=d_5\left(q_1,q_2\right)=C_1C_3R_2R_5+C_3C_7R_5+C_5C_7R_2.$$

Обратное интегральное преобразование Лапласа функций (14) находится аналитически при помощи вычетов:

$$f^F\left(q_1,q_2,\tau\right)=\sum_k\operatorname*{res}_{s_k}f^{FL}\left(q_1,q_2,s\right)\mathrm{e}^{s_k\tau}=$$
$$=\sum_k\frac{1}{\left(l_k-1\right)!}\lim_{s\to s_k}\frac{d^{l_k-1}}{ds^{l_k-1}}\left(s-s_k\right)^{l_k}f^{FL}\left(q_1,q_2,s\right)\mathrm{e}^{s_k\tau},\qquad(15)$$

где сумма берется по особым точкам (полюсам), которыми в данном случае являются нули s_k знаменателя $D\left(q_1,q_2,s\right)=0$, l_k — кратность этих нулей.

Решение уравнения $D\left(q_1,q_2,s\right)=0$ ищется методом Феррари с численным контролем отсутствия кратных корней ($l_k=1$), что позволяет представить знаменатель $D\left(q_1,q_2,s\right)$ в виде:

$$D\left(q_1,q_2,s\right)=\prod_{k=1}^{4}s-s_k=d_1\left(s-s_1\right)\left(s-s_2\right)\left(s-s_3\right)\left(s-s_4\right),\qquad(16)$$

а соотношение (15) упростить следующим образом [27]:

$$f^F\left(q_1,q_2,\tau\right)=\sum_k\operatorname*{res}_{s_k}f^{FL}\left(q_1,q_2,s\right)\mathrm{e}^{s_k\tau}=\sum_k\frac{N_i\left(s_k\right)}{D'\left(s_k\right)}\mathrm{e}^{s_k\tau}.\qquad(17)$$

Применяя формулу (17) к функциям (14) с учетом (16) получаем:

$$G_b^F\left(q_1,q_2,\tau\right)=\frac{1}{d_1\left(q_1,q_2\right)}\Bigg(N_1\left(q_1,q_2,s_1\right)\frac{\mathrm{e}^{s_1\tau}}{S_1}+N_1\left(q_1,q_2,s_2\right)\frac{\mathrm{e}^{s_2\tau}}{S_2}+ \\ +N_1\left(q_1,q_2,s_3\right)\frac{\mathrm{e}^{s_3\tau}}{S_3}+N_1\left(q_1,q_2,s_4\right)\frac{\mathrm{e}^{s_4\tau}}{S_4}\Bigg), \tag{18}$$

$$G_s^F\left(q_1,q_2,\tau\right)=\frac{1}{d_1\left(q_1,q_2\right)}\Bigg(N_2\left(q_1,q_2,s_1\right)\frac{\mathrm{e}^{s_1\tau}}{S_1}+N_2\left(q_1,q_2,s_2\right)\frac{\mathrm{e}^{s_2\tau}}{S_2}+ \\ +N_2\left(q_1,q_2,s_3\right)\frac{\mathrm{e}^{s_3\tau}}{S_3}+N_2\left(q_1,q_2,s_4\right)\frac{\mathrm{e}^{s_4\tau}}{S_4}\Bigg), \tag{19}$$

где

$$S_1=\left(s_1-s_2\right)\left(s_1-s_3\right)\left(s_1-s_4\right),\quad S_2=\left(s_2-s_1\right)\left(s_2-s_3\right)\left(s_2-s_4\right),$$
$$S_3=\left(s_3-s_1\right)\left(s_3-s_2\right)\left(s_3-s_4\right),\quad S_4=\left(s_4-s_1\right)\left(s_4-s_2\right)\left(s_4-s_3\right).$$

Оригиналы функций (18) и (19) по Фурье находятся аналитическим методом, основанным на связи интегралов обращения преобразования Фурье с рядом Фурье на переменном интервале [19]:

$$f\left(x_1,x_2,\tau\right)=\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f^F\left(q_1,q_2,\tau\right)e^{i\left(q_1x_1+q_2x_2\right)}dq_1dq_2= \\ =\frac{H\left(T^2-x_1^2-x_2^2\right)}{4T^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}f^F\left(\frac{\pi n}{T},\frac{\pi m}{T},\tau\right)e^{i\left(\frac{\pi n}{T}x_1+\frac{\pi m}{T}x_2\right)}. \tag{20}$$

Здесь $H\left(\bullet\right)$ — функция Хэвисайда, $T=J\tau\sqrt{c_{11}/c_{66}}$, $J=1,2..j$ — интервал разложения. Коэффициент J может быть выбран произвольно, но для повышения скорости сходимости целесообразно вычислить его по относительной погрешности θ_* с заданной точностью θ:

$$\frac{\left\|f_{J+1}\left(x_1,x_2,\tau\right)-f_J\left(x_1,x_2,\tau\right)\right\|}{\left\|f_J\left(x_1,x_2,\tau\right)\right\|}\cdot 100=\theta_*,\ \theta_*\le\theta, \tag{21}$$

где $\left\|\bullet\right\|$ — равномерная норма.

Применяя к соотношениям (18) и (19) формулу (20) и заменяя ряды частичными суммами, получаем аналитические представления для оригиналов фундаментальных решений:

$$G_b\left(x_1,x_2,\tau\right)=\Psi\sum_{n=-N}^{N}\sum_{m=-M}^{M}G_b^F\left(\lambda_{1n},\lambda_{2m},\tau\right)e^{i\left(\lambda_{1n}x_1+\lambda_{2m}x_2\right)},$$
$$G_s\left(x_1,x_2,\tau\right)=\Psi\sum_{k=-K}^{K}\sum_{p=-P}^{P}G_s^F\left(\mu_{1k},\mu_{2p},\tau\right)e^{i\left(\mu_{1k}x_1+\mu_{2p}x_2\right)}, \qquad (22)$$

где

$$\Psi=\frac{H\left(T^2-x_1^2-x_2^2\right)}{4T^2},$$
$$\lambda_{1n}=\frac{\pi n}{T},\ \lambda_{2m}=\frac{\pi m}{T},\ \mu_{1k}=\frac{\pi k}{T},\ \mu_{2p}=\frac{\pi p}{T}.$$

Суммы в формулах (22) вычисляются по относительной погрешности γ_* с заданной точностью γ аналогично (21):

$$\frac{\left\|G_2\left(x_1,x_2,\tau\right)-G_1\left(x_1,x_2,\tau\right)\right\|}{\left\|G_1\left(x_1,x_2,\tau\right)\right\|}\cdot 100=\gamma_*,\ \gamma_*\le\gamma.$$

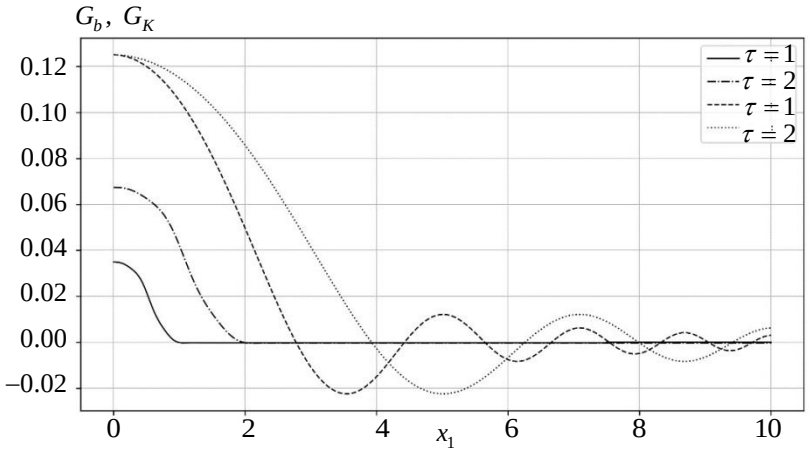
Функции G_1 вычисляются при удержании N, M, K, P а фундаментальные решения G_2 — при удержании $N+\Delta_N$, $M+\Delta_M$, $K+\Delta_K$, $P+\Delta_P$ членов суммы соответственно (Δ_N, Δ_M, Δ_K, Δ_P — const (приращение)).

Полученные в работе фундаментальные решения (22) позволяют исследовать влияние вязких и упругих анизотропных свойств материала пластины, а также упругих и инерционных параметров основания пластины на процесс распространения нестационарных нормальных перемещений.

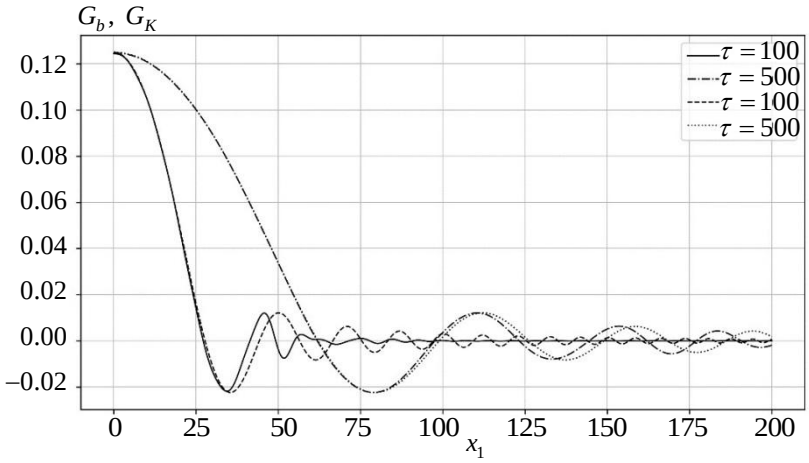
Достоверность фундаментальных решений. Достоверность полученных фундаментальных решений (22) обоснована сравнением новых результатов с известными фундаментальными решениями для тонких упругих неограниченных изотропных пластин Кирхгофа [26] и Тимошенко [28] (решения [26] и [28] построены для изотропной модели материала и не включают в себя вязкость и упруго-инерционное основание). Упругие постоянные c_{ij}, входящие в (22), рассчитаны для изотропного материала с модулем Юнга 200 ГПа и коэффициентом Пуассона 0.3 (значения c_{ij} в ГПа): $c_{11}=c_{22}=269.2,\ c_{12}=115.4,\ c_{44}=c_{55}=c_{66}=76.92,\ c_{16},\ c_{26},\ c_{45}=0$.

На рис. 2 а, б представлены решения G_b (22) — сплошные и штрихпунктирные кривые и решения G_K для пластины Кирхгофа – штриховые и пунктирные кривые. На рис. 2 а – в безразмерные мо-

менты времени $\tau = 1$ и $\tau = 2$. На рис. 2 б – в безразмерные моменты времени $\tau = 100$ и $\tau = 500$.



а)



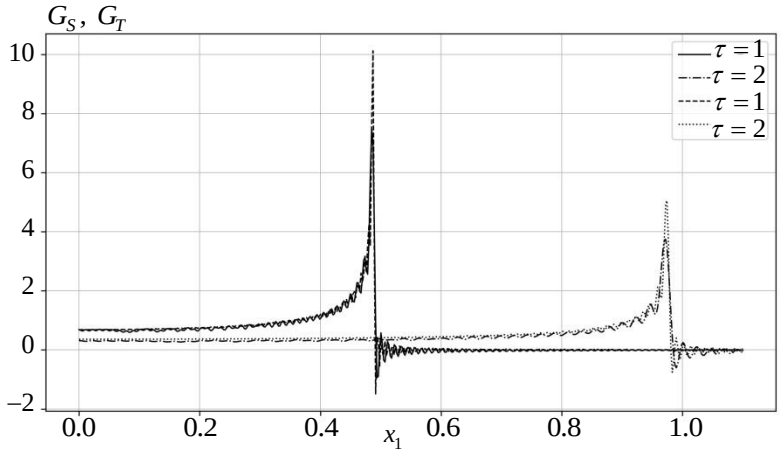
б)

Рис. 2. Сравнение фундаментальных решений G_b для пластины Чоу с решениями G_K для пластины Кирхгофа

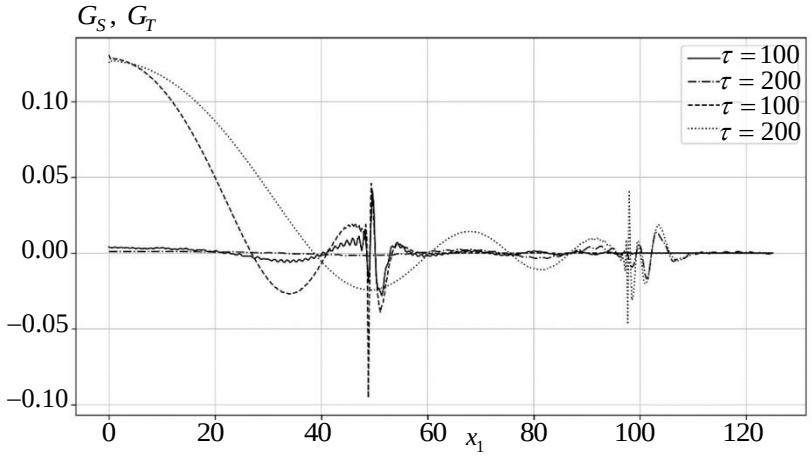
Из представленных на рис. 2 а результатов видно, что в начальные моменты времени нормальные перемещения G_b, вызванные изгибом пластины, существенно отличаются от нормальных перемещений G_K для изотропной пластины Кирхгофа, а именно: пластина Кирхгофа возмущена вся и мгновенно [26], а пластина Чоу имеет конечную скорость распространения волны. Из представленных на рис. 2 б результатов видно, что с течением времени функции G_b и G_K согласу-

ются по амплитуде и характеру в зоне действия дельта-функции Дирака (в области прошедшей волны для пластины Чоу).

На рис. 3 а, б представлены решения G_s (22) — сплошные и штрихпунктирные кривые и решения G_T для пластины Тимошенко — штриховые и пунктирные кривые. На рис. 3 а — в безразмерные моменты времени $\tau = 1$ и $\tau = 2$. На рис. 3 — б в безразмерные моменты времени $\tau = 100$ и $\tau = 200$.



а)



б)

Рис. 3. Сравнение фундаментальных решений G_S для пластины Чоу с решениями G_T для пластины Тимошенко

Из представленных на рис. 3 а результатов видно, что в начальные моменты времени нормальные перемещения G_s, вызванные сдвигом

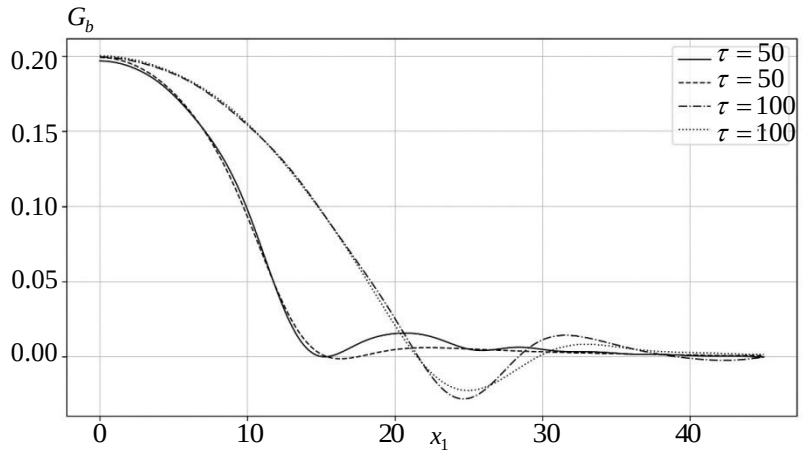
пластины, и нормальные перемещения G_T изотропной пластины Тимошенко имеют одинаковый характер и близки численно (пластина Тимошенко так же, как и пластина Чоу имеет конечную скорость распространения возмущений). Из представленных на рис. 3 б результатов видно, что с течением времени для функций G_s и G_T согласуется только фронт волны, в свою очередь характеры функций до фронта имеют значительные отличия. Так, функция G_T для пластины Тимошенко приобретает вид, аналогичный как для пластины Кирхгофа G_K.

Графики, приведенные на рис. 2 и рис. 3, наглядно демонстрируют, что математическая модель пластины по гипотезам Чоу является некоторой «связующей» для широко известных математических моделей по гипотезам Кирхгофа и гипотезам Тимошенко. Заложенный в модель Чоу принцип суперпозиции перемещений в следствии изгиба и сдвига – преимущество данной модели, позволяющее эффективно оценивать вклад сдвиговых деформаций.

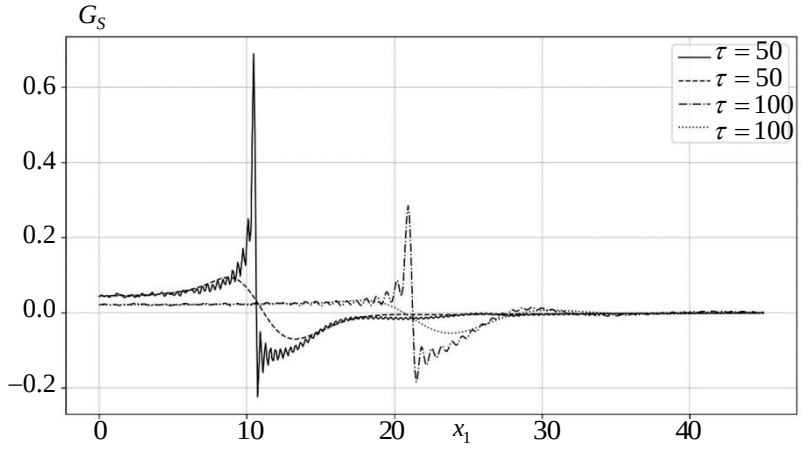
При построении графиков на рис. 2, рис. 3 для функции G_b в (22) приняты следующие значения расчётных параметров: $N = M = 260$, $J = 3$; соответственно для функции G_s в (22): $K = P = 1000$, $J = 3$.

Оценка влияния вязкости на характеры фундаментальных решений. Качественная оценка учета вязкости проведена для пластины, выполненной из анизотропного материала с плотностью $\rho = 7820$ кг/м^3 и тензором упругих постоянных согласно [29] (значения в ГПа): $c_{11} = 430.1$, $c_{12} = 130.4$, $c_{16} = 201.3$, $c_{22} = 116.7$, $c_{26} = 70.1$, $c_{44} = 19.8$, $c_{45} = -8.0$, $c_{55} = 29.1$, $c_{66} = 147.3$. Вязкие постоянные η_{ij} заданы через время ретардации $\eta_{ij} = c_{ij} t_r$, $t_r = L\tau_r / c_1$, где τ_r — безразмерное время ретардации. Остальные параметры задачи приняты следующими: $h = 0.01$ м, $c_b = 1e5$ Па/м, $m_b = 10$ кг/м^2.

На рис. 4 а, б и рис. 5 а, б построены фундаментальные решения (22) для упругой ($\tau_r = 0$) и вязкоупругой ($\tau_r = 1$) модели материала. На рис. 4 а, б — результаты для функции G_b и G_s вдоль оси x_1 при $x_2 = 0$ в моменты времени $\tau = 50$ и $\tau = 100$. Сплошные и штрихпунктирные кривые – упругое решение, штриховые и пунктирные кривые – вязкоупругое решение.



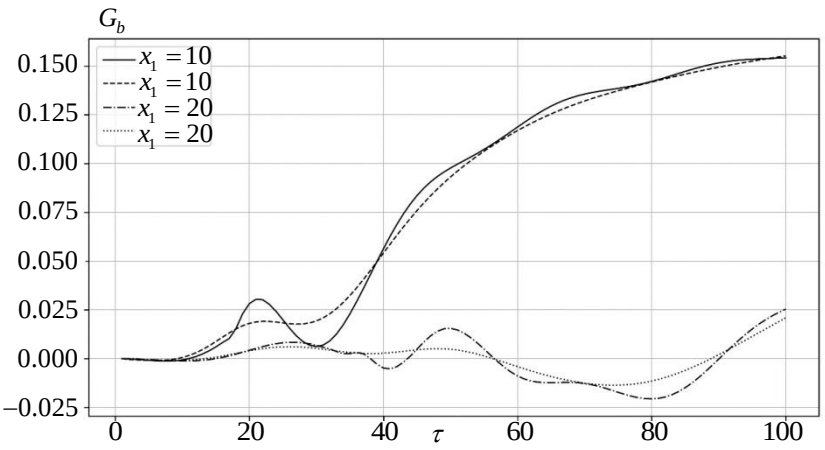
а)



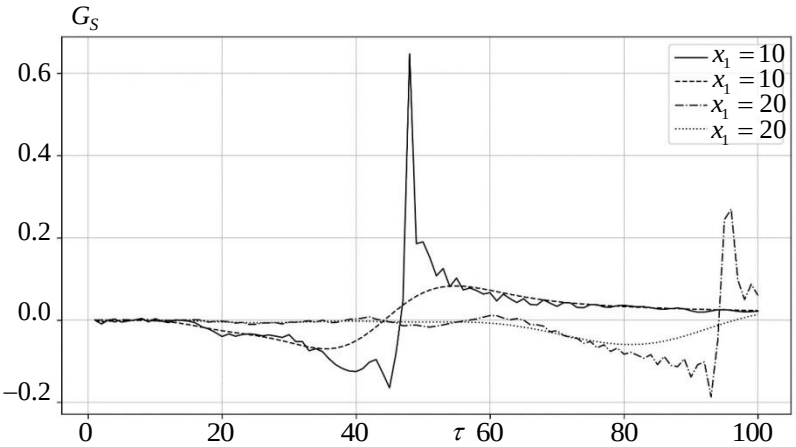
б)

Рис. 4. Упругие и вязкоупругие фундаментальные решения для анизотропной пластины в фиксированные моменты времени

На рис. 5 а, б — результаты для функции G_b и G_s в диапазоне безразмерного времени от $\tau = 1$ до $\tau = 100$ в координатах $x_1 = 10,\ x_2 = 0$ и $x_1 = 20,\ x_2 = 0$. Сплошные и штрихпунктирные кривые — упругое решение, штриховые и пунктирные кривые — вязкоупругое решение.



а)



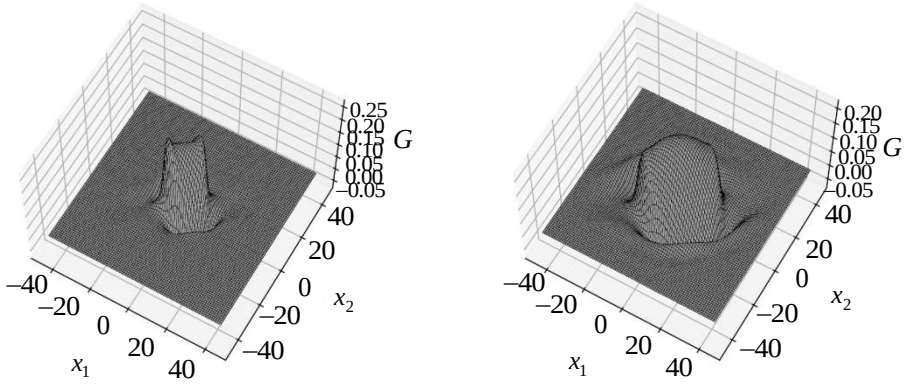
б)

Рис. 5. Упругие и вязкоупругие фундаментальные решения для анизотропной пластины в фиксированных координатах

Из представленных на рис. 4 и рис. 5 результатов видно, что учет вязкости приводит к сглаживанию полученных решений. Особенно ярко эффект проявляется для нормального перемещения, вызванного сдвигом пластины (функция G_s на рис. 4 б и рис. 5 б) – отсутствует скачкообразный характер фронта волны. В свою очередь, меньшая интенсивность эффекта наблюдается для нормального перемещения, вызванного изгибом пластины (функция G_b на рис. 4 а и рис. 5 а).

Пространственные зависимости для полного нормального перемещения $G = G_b + G_s$ в моменты времени $\tau = 50$, $\tau = 100$ представлены на рис. 6 а, б (вязкоупругий материал).

θ



а) б)

Рис. 6. Фундаментальное решение для нормального перемещения вязкоупругой анизотропной неограниченной пластины:
а) — $\tau = 50$; б) — $\tau = 100$

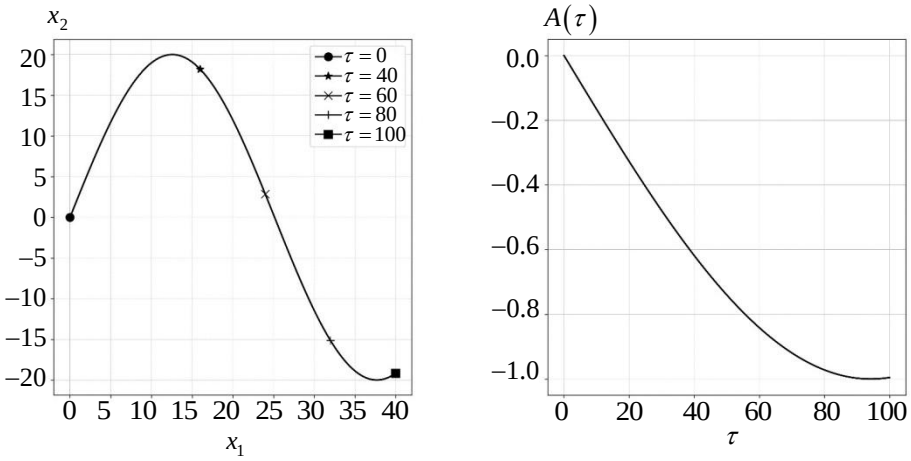
Результаты, приведенные на рис. 6, демонстрируют сложный асимметричный характер распространения изгибных волн, что согласуется с моделью рассматриваемой упругой среды.

При построении графиков на рис. 4 – рис. 6 для функции G_b в (22) $N = M = 160$, $J = 3$ при $\tau_r = 0$ и $N = M = 110$, $J = 3$ при $\tau_r = 1$; для функции G_s в (22) $K = P = 1510$, $J = 3$ при $\tau_r = 0$ и $K = P = 260$, $J = 3$ при $\tau_r = 1$.

Примеры численного решения задачи. Для фундаментальных решений, представленных на рис. 6, построим функцию нормальных перемещений. В качестве примера будем рассматривать воздействие на пластину движущейся по её поверхности сосредоточенной нагрузки, амплитуда которой меняется по закону $A(\tau)$. Вдоль осей x_1 и x_2 скорость движения нагрузки меняется по законам $V_1(\tau)$ и $V_2(\tau)$ соответственно:

$$p(x_1, x_2, \tau) = A(\tau)\delta(x_1 - V_1(\tau))\delta(x_2 - V_2(\tau)),$$
$$V_1(\tau) = \alpha\tau,\ V_2(\tau) = \beta\sin(\omega\tau),\ A(\tau) = \chi\sin(\theta\tau),$$
$$\alpha = 2/5,\ \beta = 20,\ \omega = 1/20,\ \chi = -1,\ \theta = 1/60.$$

На рис. 7 а, б показаны путь движения нагрузки в плоскость Ox_1x_2 и график изменения амплитуды действующей нагрузки во времени соответственно.



а) б)

Рис. 7. Схема нестационарного воздействия:
а) — путь нагрузки, б) — амплитуда нагрузки

Интегралы в соотношениях (8), входящие в функцию (4), взяты с использованием квадратурной формулы метода левых прямоугольников:

$$w(x_1, x_2, \tau) \approx \Delta\tau_b \sum_{k=0}^{N-1} G_b\left(x_1 - \alpha\gamma_b, x_2 - \beta\sin(\omega\gamma_b), \tau - \gamma_b\right)\chi\sin(\theta\gamma_b) +$$

$$\Delta\tau_s \sum_{p=0}^{M-1} G_s\left(x_1 - \alpha\gamma_s, x_2 - \beta\sin(\omega\gamma_s), \tau - \gamma_s\right)\chi\sin(\theta\gamma_s), \qquad (23)$$

$$\gamma_b = k\Delta\tau_b,\ \Delta\tau_b = \frac{\tau}{N},\ \gamma_s = p\Delta\tau_s,\ \Delta\tau_s = \frac{\tau}{M}.$$

На рис. 8 а, б, в, г представлены пространственные зависимости нормального перемещения неограниченной вязкоупругой анизотропной пластины по гипотезам Чоу в моменты времени $\tau = 40$, $\tau = 60$, $\tau = 80$ и $\tau = 100$ соответственно.

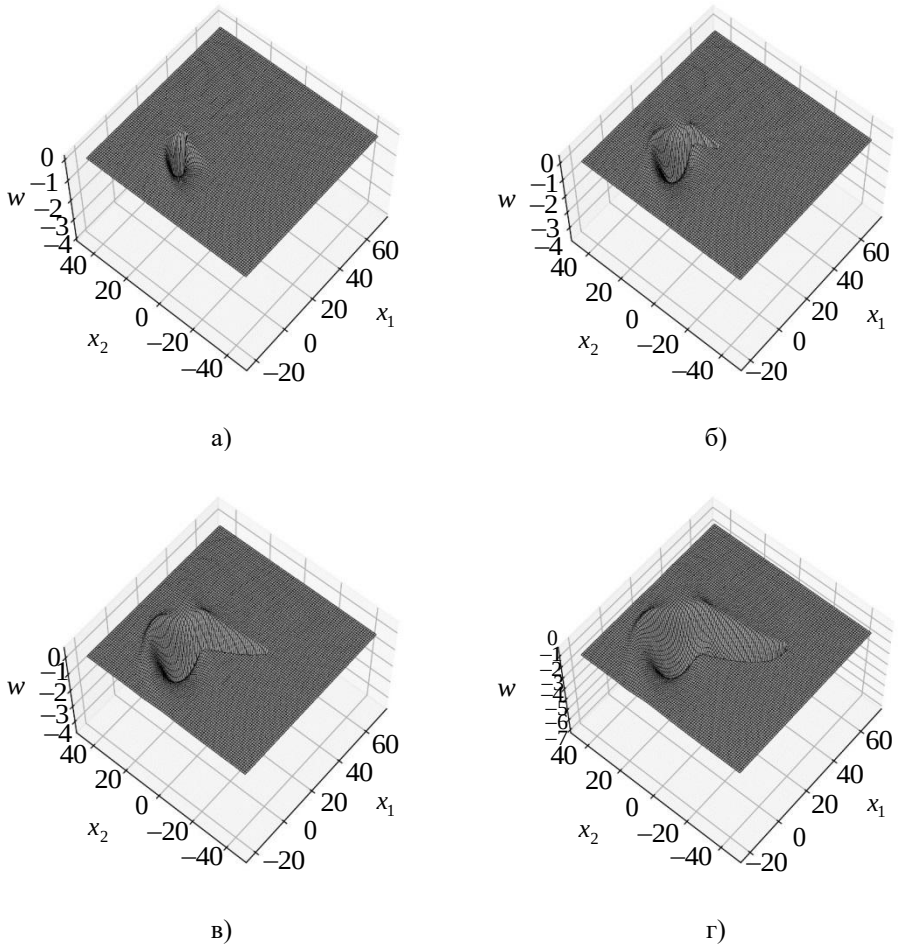


Рис. 8. Нормальное перемещение пластины в фиксированные моменты времени: а) — $\tau = 40$; б) — $\tau = 60$; в) — $\tau = 80$; г) — $\tau = 100$

Представленные на рис. 8 результаты демонстрируют сложное поведение изгибных волн в пластине, обусловленное как анизотропной моделью материала, так и характером нестационарного нагружения.

При построении графиков на рис. 8 в формуле (23) приняты следующие значения: $N = 30$, $M = 40$. Выбор данных значений обусловлен анализом сходимости полученных результатов.

Графические результаты, представленные на рис. 2 – рис. 8, реализованы при помощи языка программирования *python*.

Выводы. Аналитическими методами построены новые фундаментальные решения нормального перемещения для неограниченной тонкой вязкоупругой анизотропной пластины по гипотезам Чоу, связанной с упруго-инерционным основанием. Достоверность полученных решений подтверждена путем сравнения с известными фунда-

ментальными решениями для изотропных пластин по гипотезам Кирхгофа и гипотезам Тимошенко. Показано, что фундаментальные решения математической модели пластины Чоу включают в себя результаты, которые можно получить по математическим моделям пластин Кирхгофа и Тимошенко в отдельности.

Дана качественная оценка влияния вязких свойств материала на характеры фундаментальных решений. Продемонстрировано, что решения для вязкоупругого материала имеют более плавный характер по отношению к аналогичным решениям для упругого материала. Приведен пример расчета нормальных перемещений вязкоупругой анизотропной пластины на упруго-инерционном основании под действием подвижной сосредоточенной нагрузки с переменной во времени амплитудой.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 25-29-01297: https://rscf.ru/project/25-29-01297/.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Пшеничнов С.Г. Спектральные разложения в динамических задачах линейной вязкоупругости для кусочно-однородных тел. *Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика*, 2025, № 2, с. 51–59.

[2] Пшеничнов С.Г. Волны в неоднородном вязкоупругом полом шаре. *Проблемы прочности и пластичности*, 2025, т. 87, № 1, с. 103–112.

[3] Пшеничнов С.Г. Нестационарные волновые процессы в цилиндре из функционально-градиентного вязкоупругого материала. *Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика*, 2024, № 2, с. 37–44.

[4] Пшеничнов С.Г. Нестационарные волны в функционально-градиентном вязкоупругом плоскопараллельном слое. *Проблемы прочности и пластичности*, 2024, т. 86, № 2, с. 192–201.

[5] Dogan A. Quasi-static and dynamic response of functionally graded viscoelastic plates. *Composite Structures*, 2021, vol. 280, no. 4, art. no. 114883.

[6] Omer F.C., Mehmet H.C., Mehmet B.O., Yavuz C.C. Dynamic analysis of viscoelastic porous functionally graded plates resting on elastic foundation. *Geomechanics and Engineering*, 2024, vol. 39, no. 3, p. 257–271.

[7] Димитриенко Ю. И., Коряков М. Н., Захаров А. А., Строганов А. С. Численное моделирование сопряженных аэрогазодинамических и термомеханических процессов в композитных конструкциях высокоскоростных летательных аппаратов. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, т. 3, № 3, с. 3–24.

[8] Димитриенко Ю.И., Коряков М.Н., Юрин Ю.В., Захаров А.А., Сборщиков С.В., Богданов И.О. Сопряженное моделирование высокоскоростной аэротермодинамики и внутреннего тепломассопереноса в композитных аэрокосмических конструкциях. *Математическое моделирование и численные методы*, 2021, т. 31, № 3, с. 42–61.

[9] Димитриенко Ю. И., Юрин Ю. В., Федонюк Н. Н. Численное моделирование деформирования и прочности трехслойных композитных конструкций с дефектами. *Математическое моделирование и численные методы*, 2016, т. 11, №3, с. 3–23.

[10] Димитриенко Ю. И., Юрин Ю. В. Многомасштабное моделирование мно-

гослойных тонких композитных пластин с уединенными дефектами. *Математическое моделирование и численные методы*, 2016, т. 12, №4, с. 47–66.

[11] Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А. Асимптотическая теория многослойных тонких упругих пластин с проскальзыванием слоев. *Математическое моделирование и численные методы*, 2022, т. 34, № 2, с. 28–62.

[12] Анофрикова Н.С., Вильде М.В. Низкочастотные длинноволновые приближения трёхмерных динамических уравнений для случая двухслойной вязкоупругой пластины. *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки*, 2012, т. 29, № 4, с. 115–121.

[13] Мирзакабилов Н.Х. Методы расчета колебаний вязкоупругой многослойной (трехслойной) пластины. *Universum: технические науки*, 2024, т. 124, № 7-2, с. 39–43.

[14] Сибирякова Т.А., Найденова К.Е., Шишмарев К.А. Решение задачи о колебаниях вязкоупругой полубесконечной ледовой пластины методом вертикальных мод. *Известия Алтайского государственного университета*, 2025, т. 144, № 4, с. 79–84.

[15] Alavi S.H., Eipakchi H. An analytical approach for dynamic response of viscoelastic annular sector plates. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 2021, vol. 29, no. 23, p.1–17.

[16] Jafari N. Transient, Steady-State and Total Dynamic Responses of Mindlin Viscoelastic Plates Subjected to Harmonic Transversal Load and In-Plane Compression. *Journal of Vibration Engineering & Technologies*, 2022, vol. 11, no. 4, p. 1393–1405.

[17] Шитикова М.В. Осипова Е.И. Анализ вынужденных колебаний нелинейной вязкоупругой пластинки с учетом сдвига и инерции вращения. *Известия высших учебных заведений. Строительство*, 2024, т. 781, № 1, с. 15–29.

[18] Praharaj R.K., Datta N. Dynamic response of fractionally damped two-layered viscoelastic plate. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 2024, vol. 52, no. 1, p. 36–53.

[19] Serdyuk D.O., Fedotenkov G.V. Transient deformation of anisotropic Timoshenko's plate. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 2023, vol. 23, no. 13, Article 2350151.

[20] Serdyuk D.O., Fedotenkov G.V. Transient dynamics of an anisotropic plate on an elastic-inertial foundation with local supports. *Acta Mechanica*, 2024, vol. 235, no. 7, p. 4743–4761.

[21] Serdyuk A.O., Serdyuk D.O., Fedotenkov G.V. Stress-Strain State of a Composite Plate Under the Action of a Transient Movable Load. *Mechanics of Composite Materials*, 2021, vol. 57, no. 4, pp. 493–502.

[22] Сердюк Д.О., Хомченко А.В. Моделирование нестационарной динамики фрагмента нижней панели закрылка пассажирского самолёта. *Математическое моделирование и численные методы*, 2025, т. 48, № 4, с. 124–147.

[23] Eshmatov B., Mirsaidov M., Abdikarimov R., Vatin N. Buckling of a viscoelastic anisotropic fiber reinforced plate under rapidly increasing shear load. *Magazine of Civil Engineering*, 2024, мol. 17, no. 5 (129), art. no. 12910.

[24] Эшматов Б.Х. Нелинейные колебания вязкоупругой анизотропной армированной пластины. *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*, 2018, № 5, с. 106–111.

[25] Chow T.S. On the propagation of flexural waves in an orthotropic laminated plate and its response to an impulsive load. *Journal of Composite Materials*, 1971, vol. 5, no. 3, pp. 306–319.

[26] Горшков А.Г., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В. *Волны в сплошных средах*. Москва, ФИЗМАТЛИТ, 2004, 472 с.

[27] Пшеничнов С.Г. Некоторые особенности использования преобразования Лапласа при решении линейных задач нестационарной динамики деформируемых твердых тел. *Доклады Академии наук*, 1994, т. 339, № 1, с. 48-51.

[28] Вахтерова Я.А., Сердюк Д.О., Федотенков Г.В. *Нестационарная динамика балок и пластин*. Москва, Изд-во МАИ, 2022, 104 с.

[29] Gaul L, Kogl M., Wagner M. *Boundary element methods for engineers and scientists*. New York, Springer, 2003, 488 p.

Статья поступила в редакцию 29.03.2026

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Земсков А.В., Оконечников А.С., Сердюк Д.О. Моделирование изгибных волн в анизотропной вязкоупругой пластине Чоу. *Математическое моделирование и численные методы*, 2026, № 2(50), с. 20–43.

Земсков Андрей Владимирович – д-р ф.-м. наук, доцент, профессор кафедры «Прикладные программные средства и математические методы» Московского авиационного института. e-mail: azemskov1975@mail.ru.

Оконечников Анатолий Сергеевич – канд. ф.-м. наук, доцент, доцент кафедры «Сопротивление материалов, динамика и прочность машин» Московского авиационного института. e-mail: oas.mai@mail.ru.

Сердюк Дмитрий Олегович – д-р ф.-м. наук, доцент, профессор кафедры «Сопротивление материалов, динамика и прочность машин» Московского авиационного института. e-mail: d.serduk55@gmail.com.

Modeling of flexural waves in an anisotropic viscoelastic Chow plate

© A.V. Zemskov, A.S. Okonechnikov, D.O. Serdyuk

MAI, Moscow, 125993, Russia

This work analytically derives new fundamental solutions to problems in the mechanics of deformable solids, specifically transient fundamental solutions for an infinite thin viscoelastic anisotropic plate resting on an elastic-inertial foundation. The Chow hypotheses are employed as the mathematical model of the plate, according to which the total normal displacement is determined as the sum of the plate's normal displacement components caused by its bending and shear. The anisotropy model considered in this work implies the presence of one plane of symmetry for the elastic medium, which geometrically coincides with the plate's mid-plane. Viscosity is described using the Kelvin–Voigt model. The elastic-inertial foundation is characterized by stiffness and a mass coefficient. The fundamental solutions are constructed using direct and inverse integral Laplace transforms over time and Fourier transforms over spatial coordinates. The inverse Laplace transforms are found using the residue theorem. The inverse Fourier transforms are obtained by relating the inverse Fourier transform to Fourier series on a variable

interval. The validity of the obtained solutions is confirmed by comparison with known fundamental solutions for isotropic plates based on the Kirchhoff and Timoshenko hypotheses. It is shown that the fundamental solutions of the Chow plate mathematical model encompass results obtainable separately from the Kirchhoff and Timoshenko plate models. A qualitative assessment of the influence of the material's viscous properties on the nature of the fundamental solutions is provided. It is demonstrated that the solutions for the viscoelastic material exhibit a smoother character compared to analogous solutions for an elastic material. An example calculation of the transient normal displacements of the plate under the influence of a moving concentrated load with a time-varying amplitude is presented.

***Keywords**: anisotropic material, viscoelastic material, flexural waves, Chow plate, elastic-inertial foundation, fundamental solution*

REFERENCES

[1] Pshenichnov S.G. Spectral decompositions in dynamic linear viscoelasticity problems for piecewise homogeneous bodies. *Moscow University Mechanics Bulletin*, 2025, vol. 80, iss. 2, pp. 63–72.

[2] Pshenichnov S.G. Waves in an inhomogeneous viscoelastic hollow sphere. *Problems of strength and plasticity*, 2025, vol. 87, no. 1, pp. 103–112.

[3] Pshenichnov S.G. Unsteady wave processes in a cylinder made of viscoelastic functionally graded material. *Moscow University Mechanics Bulletin*, 2024, vol. 79, iss. 2, pp. 29–37.

[4] Pshenichnov S.G. Non-stationary waves in a functionally graded viscoelastic plane-parallel layer. *Problems of strength and plasticity*, 2024, vol. 86, no. 2, pp. 192–201.

[5] Dogan A. Quasi-static and dynamic response of functionally graded viscoelastic plates. *Composite Structures*, 2021, vol. 280, no. 4, art. no. 114883.

[6] Omer F.C., Mehmet H.C., Mehmet B.O., Yavuz C.C. Dynamic analysis of viscoelastic porous functionally graded plates resting on elastic foundation. *Geomechanics and Engineering*, 2024, vol. 39, no. 3, pp. 257–271.

[7] Dimitrienko Yu.I., Koryakov M.N., Zakharov A.A., Stroganov A.S. Computational modeling of conjugated gasdynamic and thermomechanical processes in composite structures of high speed aircraft. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2014, vol. 3, no. 3, pp. 3–24.

[8] Dimitrienko Yu.I., Koryakov M.N., Yurin Yu.V., Zakharov A.A., Sborschikov S.V., Bogdanov I.O. Coupled modeling of high-speed aerothermodynamics and internal heat and mass transfer in composite aerospace structures. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2021, vol. 31, no. 3, pp. 42–61.

[9] Dimitrienko Yu.I., Yurin Yu.V., Fedonyuk N.N. Numerical modeling of deformation and strength of sandwich composite structures with defects. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2016, vol. 11, no. 3, pp. 3–23.

[10] Dimitrienko Yu.I., Yurin Yu.V. Multiscale modeling of thin multilayer composite plates with solitary defects. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2016, vol. 12, no. 4, pp. 47–66.

[11] Dimitrienko Yu.I., Gubareva E.A. Asymptotic theory of multilayer thin elastic plates with layer slip. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2022, vol. 34, no. 2, pp. 28–62.

[12] Anofrikova N.S., Wilde M.V. Low-frequency long-wave approximations of the 3d dynamic equations for the case of double-layered viscoelastic plate. *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*,

2012, vol. 29, no. 4, pp. 115–121.

[13] Mirzakabilov N. Methods for calculating viscal-elastic multilayer (three-layer) plate viscations. *Universum: tekhnicheskie nauki* [Universum: technical sciences], 2024, vol. 124, no. 7-2, pp. 39–43.

[14] Sibiryakova T.A, Naydenova K.E, Shishmarev K.A. Solution of the problem of oscillations of a viscoelastic semi-infinite ice plate using the vertical mode method. *Izvestiya Altaiskogo gosudarstvennogo universiteta* [Izvestiya of Altai State University], 2025, vol. 144, no. 4, pp. 79–84.

[15] Alavi S.H., Eipakchi H. An analytical approach for dynamic response of viscoelastic annular sector plates. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 2021, vol. 29, no. 23, p.1–17.

[16] Jafari N. Transient, Steady-State and Total Dynamic Responses of Mindlin Viscoelastic Plates Subjected to Harmonic Transversal Load and In-Plane Compression. *Journal of Vibration Engineering & Technologies*, 2022, vol. 11, no. 4, p. 1393–1405.

[17] Shitikova M.V. Osipova E.I. Analysis of forced vibrations of a nonlinear viscoelastic plate taken into account of shear and rotational inertia. *News of higher educational institutions. Construction*, 2024, vol. 781, no. 1, pp. 15–29.

[18] Praharaj R.K., Datta N. Dynamic response of fractionally damped two-layered viscoelastic plate. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 2024, vol. 52, no. 1, p. 36–53.

[19] Serdyuk D.O., Fedotenkov G.V. Transient deformation of anisotropic Timoshenko's plate. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 2023, vol. 23, no. 13, Article 2350151.

[20] Serdyuk D.O., Fedotenkov G.V. Transient dynamics of an anisotropic plate on an elastic-inertial foundation with local supports. *Acta Mechanica*, 2024, vol. 235, no. 7, pp. 4743–4761.

[21] Serdyuk A.O., Serdyuk D.O., Fedotenkov G.V. Stress-Strain State of a Composite Plate Under the Action of a Transient Movable Load. *Mechanics of Composite Materials*, 2021, vol. 57, no. 4, pp. 493–502.

[22] Serdyuk D.O., Khomchenko A.V. Modeling of transient dynamics of a fragment of a passenger airplane lower flap panel. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2025, vol. 48, no. 4, pp. 124–147.

[23] Eshmatov B., Mirsaidov M., Abdikarimov R., Vatin N. Buckling of a viscoelastic anisotropic fiber reinforced plate under rapidly increasing shear load. *Magazine of Civil Engineering*, 2024, vol. 17, no. 5(129), pp. 12910.

[24] Eshmatov B.K. Nonlinear oscillations of a viscoelastic anisotropic reinforced plate. *Mechanics of Solids*, 2018, vol. 53, no. 5, pp. 568–572.

[25] Chow T.S. On the propagation of flexural waves in an orthotropic laminated plate and its response to an impulsive load. *Journal of Composite Materials*, 1971, vol. 5, no. 3, pp. 306–319.

[26] Gorshkov A.G., Medvedsky A.L., Rabinsky L.N., Tarlakovsky D.V. *Volny v sploshnyh sredah* [Waves in continuous media]. Moscow, Fizmatlit, 2004, 472 p.

[27] Pshenichnov S.G. Nekotorye osobennosti ispol'zovaniya preobrazovaniya Laplasa pri reshenii lineinykh zadach nestatsionarnoi dinamiki deformiruemykh tverdykh tel [Some features of using the laplace transform in solving linear problems of nonstationary dynamics of deformable solids]. *Doklady akademii nauk*, 1994, vol. 339, no. 1, pp. 48-51.

[28] Vahterova Y. A., Serdyuk D.O., Fedotenkov G.V. *Nestacionarnaya dinamika balok i plastin* [Transient dynamics of beams and plates]. Moscow, MAI, 2022, 104 p.

[29] Gaul L, Kogl M., Wagner M. *Boundary element methods for engineers and scientists*. New York, Springer, 2003, 488 p.

Zemskov A.V., Dr. Sci. (Phys. — Math.), Associate Professor, Professor of Moscow Aviation Institute, Department of Applied Software and Mathematical Methods. e-mail: azemskov1975@mail.ru.

Okonechnikov A.S., Cand. Sc. (Phys. — Math.), Associate Professor, Associate Professor of Moscow Aviation Institute, Department of Strength of Materials, Dynamics and Strength of Machines. e-mail: oas.mai@mail.ru.

Serdyuk D.O., Dr. Sci. (Phys. — Math.), Associate Professor, Professor of Moscow Aviation Institute, Department of Strength of Materials, Dynamics and Strength of Machines, e-mail: d.serduk55@gmail.com.