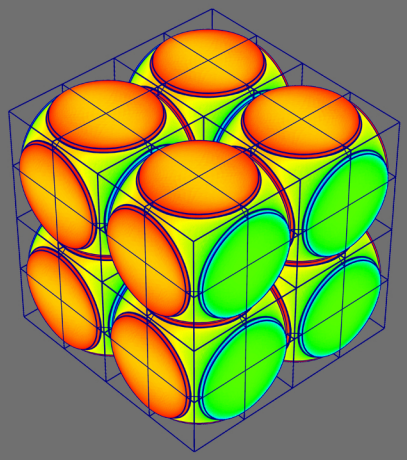
ISSN 2309-3684



# Математическое моделирование и численные методы

Харченко Н.А. Численное моделирование турбулентного теплообмена на поверхности осесимметричного тела при наличии зоны отрывного течения. Математическое моделирование и численные методы, 2026, № 2, с. 3–19.

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/404/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.216.140
11.11.2026 09:39:29

УДК 533.6.011.5 DOI: 10.18698/2309-3684-2026-2-319

# Численное моделирование турбулентного теплообмена на поверхности осесимметричного тела при наличии зоны отрывного течения

© Н.А. Харченко

Московский авиационный институт, Москва, 125993, Россия

*В данной работе представлена валидационная задача моделирования теплообмена на поверхности цилиндрически – конического тела при наличии зоны отрывного течения вследствие взаимодействия ударной волны с турбулентным пограничным слоем. Основной вычислительной сложностью рассматриваемой задачи является подробное разрешение турбулентного течения в пристеночной области с целью дальнейшего воспроизведения экспериментальных распределений поверхностных характеристик давления и теплового потока. В решаемой задаче имеет место наличие отрывной зоны, представляющей собой область возвратного течения, оказывающей существенное влияние на структуру пристеночного потока.*

***Ключевые слова:*** *высокоскоростное моделирование, турбулентный теплообмен, отрывные течения, вычислительная аэрогазодинамика, неструктурированные сетки*

**Введение.** С наступлением середины прошлого столетия эффективному развитию фундаментального понимания высокоскоростных течений, способствовала разработка сверхзвуковых экспериментальных установок нового поколения [1]. Проводимые в то время экспериментальные исследования были направлены на выявление эффектов, возникающих в высокоскоростных течениях при наличии сложных ударно-волновых структур. Особое внимание в этих работах уделялось процессам взаимодействия ударных волн с пограничным слоем, как в ламинарных [2], так и в турбулентных течениях [3-4].

Основной целью серии экспериментальных исследований, проводимых в центре исследований аэронавтики CUBRC [4] на установке LENS XX, являлось создание валидационного базиса, используемого для подтверждения в задачах высокоскоростного моделирования возможностей компьютерных кодов вычислительной аэротермодинамики. Результатом проведённых экспериментальных исследований было получение данных по поверхностным распределениям давления и теплового потока при турбулентном обтекании высокоскоростным потоком тел вращения с коническим углом сжатия.

В данной работе рассматриваемая валидационная задача высокоскоростного моделирования о взаимодействии ударной волны с пограничным слоем при турбулентном обтекании воздушным потоком цилиндрически – конического тела численно решается в трёхмерной

постановке. Основной целью данного исследования является воспроизведение экспериментальных данных по распределениям поверхностных характеристик давления и теплового потока.

Математическая постановка задачи. Моделирование высокоскоростного обтекания турбулентным потоком цилиндрически–конического тела проводилось с использованием компьютерного кода ГРАТ [5-8], численно решающего трехмерную нестационарную систему уравнений движения вязкого теплопроводного газа, дополненную двухпараметрической RANS моделью турбулентности Ментера $k-\omega$ SST [9]. Система уравнений Навье – Стокса, выражающая законы сохранения массы, импульсов и полной энергии, записывается в следующем виде (здесь и далее используется соглашение о суммировании по повторяющимся индексам):

$$\begin{gathered}\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u_j)}{\partial x_j}=0;\\ \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j}+\frac{\partial p}{\partial x_i}=\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}, \quad i=1,2,3;\\ \frac{\partial(\rho E)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u_j E)}{\partial x_j}+\frac{\partial(p u_j)}{\partial x_j}=\frac{\partial(u_i \tau_{ij}-q_j)}{\partial x_j},\end{gathered} \tag{1}$$

где $\rho$ — плотность, кг/м$^3$; $p$ — давление, Па; $E$ — полная энергия, отнесенная к единице массы, Дж/кг; $t$ — время, с; $u_i$ — компоненты вектора скорости, м/с; $x_i$ — компоненты пространственной координаты, м; $q_i$ — компоненты вектора теплового потока, Вт/м$^2$; $\tau_{ij}$ — компоненты тензора напряжений, Па.

В задачах высокоскоростного моделирования, не требующих учета физико-химических процессов в газе, решаемая система уравнений замыкается термическим и калорическим уравнениями состояния совершенного газа с постоянными значениями теплоемкостей [10]. Термическое и калорическое уравнения состояния в данном случае имеют следующий вид:

$$\frac{p}{\rho}=(\gamma-1)e, \quad e=C_V T, \tag{2}$$

где $\gamma$ — показатель адиабаты, определяемый через отношение $C_p$ и $C_V$ — удельные теплоемкости при постоянном давлении и объеме, Дж/(кг·К); а $e$ — удельная внутренняя энергия, Дж/кг, при этом удельная полная энергия определяется как:

$$E=e+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}u_i^2. \tag{3}$$

Для замыкания системы уравнений газовой динамики, описывающей турбулентное движение, в данной работе используется вариант модели турбулентности, в основе которой лежат дифференциальные уравнения переноса кинетической энергии турбулентности $k$ (м$^2$/с$^2$) и удельной скорости диссипации турбулентных пульсаций $\omega$ (1/с).

Компоненты тензора напряжений и вектора теплового потока в модели турбулентности Ментера определяются как:

$$\tau_{ij} = 2\mu\left( S_{ij} - \frac{1}{3}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\delta_{ij} \right), \quad q_i = -\lambda\frac{\partial T}{\partial x_i}, \quad S_{ij} = \frac{1}{2}\left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right); \qquad (4)$$

$$\mu = \mu_L + \mu_T, \quad \lambda = \lambda_L + \lambda_T,$$

где $T$ — температура, К; $\mu$ — эффективная динамическая вязкость, Па·с; $\lambda$ — эффективный коэффициент теплопроводности, Вт/(м·К); $S_{ij}$ — тензор скоростей деформации, 1/с; $\delta_{ij}$ — символ Кронекера; $(.)_L$ и $(.)_T$ — ламинарная и турбулентная составляющие эффективного параметра.

Дифференциальные уравнения модели турбулентности Ментера записываются следующим образом:

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j k)}{\partial x_j} = P - \beta_k \rho\omega k + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[ (\mu_L + \sigma_k \mu_T)\frac{\partial k}{\partial x_j} \right];$$

$$\frac{\partial(\rho\omega)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j \omega)}{\partial x_j} = P\frac{\eta\rho}{\mu_T} - \beta_\omega \rho\omega^2 + \qquad (5)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x_j}\left[ (\mu_L + \sigma_\omega \mu_T)\frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] + 2(1 - F_1)\frac{\partial k}{\partial x_j}\frac{\partial \omega}{\partial x_j}\frac{\rho\sigma_{\omega 2}}{\omega};$$

где $\mu_T$ определяется соотношением:

$$\mu_T = \frac{ak\rho}{\max(a\omega, SF_2)}. \qquad (6)$$

Модифицированный член генерации турбулентности $P$ с учетом сжимаемости имеет вид:

$$P = \min\left( \mu_T\left[ \Omega^2 F_1 + S^2(1 - F_1) \right],\ 10\beta_k \rho\omega k \right);$$

$$S^2 = 2S_{ij}S_{ij} - \frac{2}{3}\left( \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)^2, \quad \Omega^2 = 2\Omega_{ij}\Omega_{ij}, \quad \Omega_{ij} = \frac{1}{2}\left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \qquad (7)$$

где $F_1$ — функция смешения Ментера в модели $k-\omega$ SST, а $\Omega_{ij}$ — тензор завихренности, 1/с.

Как можно видеть, в уравнении для генерации турбулентности присутствует тензор завихренности $\Omega_{ij}$ с функцией смешения $F_1$, что отсутствует в оригинальной модели Ментера [9]. Предполагается, что данная модификация привносит в модель турбулентности эффект уменьшения физически необоснованной генерации турбулентной вязкости в областях с наличием разрывов и торможения потока [11].

Функции $F_1$ и $F_2$ определяются как:

$$\begin{gathered} F_1 = \tanh\left(\arg_1^4\right), \quad F_2 = \tanh\left(\arg_2^2\right); \\ \arg_1 = \min\left[\max\left(\frac{\sqrt{k}}{\beta_k \omega d}, \frac{500\mu_L}{\rho\omega d^2}\right), \frac{4\rho\sigma_{\omega_2} k}{CD_{k\omega} d^2}\right]; \\ \arg_2 = \max\left(\frac{2\sqrt{k}}{\beta_k \omega d}, \frac{500\mu_L}{\rho\omega d^2}\right); \\ CD_{k\omega} = \max\left(2\rho\sigma_{\omega_2} \frac{1}{\omega}\frac{\partial k}{\partial x_j}\frac{\partial \omega}{\partial x_j}, 10^{-10}\right), \end{gathered} \tag{8}$$

где $d$ — кратчайшее расстояние до стенки, м.

Константы модели турбулентности определяются через функцию смешения:

$$\begin{gathered} \varphi(\sigma_k, \sigma_\omega, \beta_\omega, \eta) = F_1\varphi_1 + (1 - F_1)\varphi_2; \\ \sigma_{k1} = 0.85, \quad \sigma_{\omega 1} = 0.5, \quad \beta_{\omega 1} = 0.075, \quad \eta_1 = 0.55; \\ \sigma_{k2} = 1.0, \quad \sigma_{\omega 2} = 0.856, \quad \beta_{\omega 2} = 0.0828, \quad \eta_2 = 0.44. \end{gathered} \tag{9}$$

Для расчета свойств переноса, коэффициентов вязкости и теплопроводности, используются соотношения:

$$\begin{gathered} \mu_L = C\frac{T^{3/2}}{T + 110.4}, \quad C = 1.458 \cdot 10^{-6} \ \ \text{кг}/\left(\text{м} \cdot \text{с} \cdot \text{К}^{1/2}\right); \\ \lambda = c_p\left(\frac{\mu_L}{\text{Pr}} + \frac{\mu_T}{\text{Pr}_T}\right), \quad c_p = \frac{\gamma}{(\gamma - 1)}R, \end{gathered} \tag{10}$$

где $Pr = 0.72$ — число Прандтля; $Pr_T = 0.9$ — турбулентное число Прандтля; $R$ = 286.7 — газовая постоянная воздуха, Дж/(кг·К).

**Численный алгоритм решения задачи.** Численный алгоритм построен на реализации метода контрольного объема с использованием неструктурированных сеток [12], [13], где в качестве контрольных объемов выступают: тетраэдры, пирамиды и треугольные призмы.

Определение свойств данных геометрических фигур проводится путем разбиения объемных и плоских объектов на тетраэдры и тре-

угольники. Центры масс элементов неструктурированных сеток вычисляются с помощью средневзвешенного значения:

$$\overline{r} = \sum_{j=1}^{N} \overline{r}_j f_j \Big/ \sum_{j=1}^{N} f_j , \tag{11}$$

где $\overline{r}$ — радиус-вектор, определяющий положение центров масс объемных и плоских геометрических объектов; $\overline{r}_j$ — радиус-вектор, определяющий положение центров масс составных частей соответствующего геометрического объекта; $f_j$ — составная часть объема или площади геометрического объекта.

Численное интегрирование системы уравнений газовой динамики проводилось с использованием модифицированного метода AUSM+ [14]. Используемый для численного интегрирования метод AUSM+ является методом расщепления потоков на конвективную и акустическую составляющие в зависимости от числа Маха. Такой подход является альтернативой методам, основанным на идеи вычисления потоков через грани конечного объема из решения задачи о распаде произвольного разрыва, предложенной С.К. Годуновым [15].

Численный поток методом AUSM+ определяется из соотношения [16]:

$$\begin{gathered} F_{AUSM} = \begin{cases} \mathrm{w}_L M_{1/2} \mathrm{c}_{1/2} + \Phi_L, & M_{1/2} \geq 0; \\ \mathrm{w}_R M_{1/2} \mathrm{c}_{1/2} + \Phi_R, & M_{1/2} < 0, \end{cases} \\ \mathrm{w}_{L/R} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u_i \\ \rho E \end{pmatrix}, \quad \Phi_{L/R} = \begin{pmatrix} 0 \\ P_{1/2} \cdot n_i - P_i \\ p M_{1/2} \mathrm{c}_{1/2} \end{pmatrix}, \quad i = 1,2,3, \end{gathered} \tag{12}$$

где $n_i$ — компонента единичного вектора внешней нормали.

Расщепление потока на вклады конвекции и давления выражается посредством представления числа Маха в виде двух состояний:

$$\begin{aligned} M_{1/2} &= M_L^+ + M_R^- - M_P; \\ P_{1/2} &= P_L^+ p_L + P_R^- p_R. \end{aligned} \tag{13}$$

Конвективная и акустическая составляющие расщепленного потока аппроксимируются полиномами четвертого и третьего порядка:

$$M_{L/R}^{\pm}=\begin{cases}\pm\dfrac{1}{4}\left(M_{L/R}\pm 1\right)^2\pm\dfrac{1}{8}\left(M_{L/R}^2-1\right)^2, & |M_{L/R}|<1;\\ \dfrac{1}{2}\left(M_{L/R}\pm|M_{L/R}|\right), & |M_{L/R}|\geq 1,\end{cases}$$
$$P_{L/R}^{\pm}=\begin{cases}\dfrac{1}{4}\left(M_{L/R}\pm 1\right)^2\left(2\mp M_{L/R}\right)^2, & |M_{L/R}|<1;\\ \dfrac{\left(M_{L/R}\pm|M_{L/R}|\right)}{2M_{L/R}}, & |M_{L/R}|\geq 1.\end{cases} \tag{14}$$

Для сохранения устойчивости численной схемы при расчетах течений с большими числами Маха в выражения для вкладов конвекции и давления добавляются диффузионные слагаемые [17], обеспечивающие дополнительную диссипацию для подавления численной неустойчивости сильных ударных волн:

$$M_P=(1-g)(1-\zeta)\frac{p_R-p_L}{(\rho_L+\rho_R)\mathrm{c}_{1/2}^2};$$
$$P_i=\frac{0.75g\left(p_L+p_R\right)}{\mathrm{c}_{1/2}}P_L^+P_R^-\left(u_{i_R}-u_{i_L}\right),\quad i=1,2,3, \tag{15}$$

где функции $g$ и $\zeta$ определяются как:

$$g=\frac{1+\cos\left[\min\left(h_L,h_R\right)\pi\right]}{2},\quad h=\min_j\left(\frac{p_{Lj}}{p_{Rj}},\frac{p_{Rj}}{p_{Lj}}\right);$$
$$\zeta=\frac{1-\cos\left(\pi M\right)}{2},\quad M=\min\left[\max\left(|M_L|,|M_R|\right),1\right]. \tag{16}$$

В результате численных исследований предложено следующее выражение для определения скорости звука [18], позволяющее увеличить диссипацию путем уменьшения $c_{1/2}$ в области течения, где $|U_{L/R}|>c_{L/R}$:

$$\tilde{c}_{1/2}=\frac{\max\left(|U_L|,c_L\right)+\max\left(|U_R|,c_R\right)}{\max\left(\left|U_L\right|/c_L,1\right)+\max\left(\left|U_R\right|/c_R,1\right)};$$
$$c_{1/2}=\begin{cases}\dfrac{\tilde{c}_{1/2}^2}{\max\left(|U_L|,\tilde{c}_{1/2}\right)}, & U_L+U_R\geq 0;\\ \dfrac{\tilde{c}_{1/2}^2}{\max\left(|U_R|,\tilde{c}_{1/2}\right)}, & U_L+U_R<0,\end{cases} \tag{17}$$
$$M_{L/R}=\frac{U_{L/R}}{\mathrm{c}_{1/2}},\quad U_{L/R}=u_{i_{L/R}}n_i,\quad c_{L/R}=\left(\gamma\frac{p_{L/R}}{\rho_{L/R}}\right)^{1/2}.$$

Для получения более высокого порядка точности численного решения по пространству задается линейное распределение газодинамических параметров внутри ячейки [19]:

$$f_j = f_l + \alpha\left[\frac{\partial f_l}{\partial x}\left(x_j - x_l\right) + \frac{\partial f_l}{\partial y}\left(y_j - y_l\right) + \frac{\partial f_l}{\partial z}\left(z_j - z_l\right)\right], \qquad (18)$$

где $\alpha$ — коэффициент ограничения градиента в центре расчетной ячейки; $f_l$ и $f_j$ — значения функций в центрах расчетной ячейки и ее грани.

Линейная реконструкция проводится по неконсервативным переменным: $u$, $v$, $w$, $p$, $\rho$, $e$, $T$, $k$, $\omega$, а значения газодинамических параметров, используемые для вычисления потоков через грани конечного объема, определяются на каждой грани из задаваемого распределения, что приводит к схеме второго порядка в областях, где решение гладкое. Но при этом для сохранения свойства монотонности численной схемы на газодинамических разрывах необходимо использовать ограничитель задаваемого распределения [19].

Коэффициент ограничения $\alpha$ задаваемого распределения вычисляется из соотношения:

$$\alpha_j = \begin{cases} \dfrac{\max\limits_{\eta}\left(f_\eta, f_l\right) - f_l}{f_j - f_l}, & \text{если } f_j - f_l > 0; \\ \dfrac{\min\limits_{\eta}\left(f_\eta, f_l\right) - f_l}{f_j - f_l}, & \text{если } f_j - f_l < 0; \\ 1.5, & \text{если } f_j - f_l = 0, \end{cases} \qquad (19)$$

где с индексами «$l$» и «$\eta$» указаны значения функций в центрах расчетной и соседней ячеек, а с индексом «$j$» — значения функций, вычисленные в центре $j$-ой грани.

Но отсутствие дифференцируемости записанной функции-ограничителя приводит к ухудшению монотонности схемы. Обеспечить монотонность численной схемы позволило использование дополнительной дифференцируемой функции-ограничителя [20]:

$$\alpha = \begin{cases} \min\limits_j\left(\alpha_j\right) - \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\min\limits_j\left(\alpha_j\right)}{1.5}\right]^3, & \text{если } \min\limits_j\left(\alpha_j\right) < 1.5; \\ 1, & \text{иначе.} \end{cases} \qquad (20)$$

Для расчета вязких слагаемых необходимо вычислять производные скорости, температуры и турбулентных параметров в центрах граней конечного объема. Вычисление производных основывалось на численном интегрирование по конечному объему, состоящему из двух смежных ячеек, относительно центра общей грани и является решением следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_l}{\partial x}\sum\limits_{j=1}^{N}\varphi_j \mathrm{X}_j^2+\dfrac{\partial f_l}{\partial y}\sum\limits_{j=1}^{N}\varphi_j \mathrm{X}_j \mathrm{Y}_j+\dfrac{\partial f_l}{\partial z}\sum\limits_{j=1}^{N}\varphi_j \mathrm{X}_j \mathrm{Z}_j=\sum\limits_{j=1}^{N}\varphi_j \mathrm{X}_j \mathrm{F}_j; \\ \dfrac{\partial f_l}{\partial x}\sum\limits_{j=1}^{N}\varphi_j \mathrm{X}_j \mathrm{Y}_j+\dfrac{\partial f_l}{\partial y}\sum\limits_{j=1}^{N}\varphi_j \mathrm{Y}_j^2+\dfrac{\partial f_l}{\partial z}\sum\limits_{j=1}^{N}\varphi_j \mathrm{Y}_j \mathrm{Z}_j=\sum\limits_{j=1}^{N}\varphi_j \mathrm{Y}_j \mathrm{F}_j; \\ \dfrac{\partial f_l}{\partial x}\sum\limits_{j=1}^{N}\varphi_j \mathrm{X}_j \mathrm{Z}_j+\dfrac{\partial f_l}{\partial y}\sum\limits_{j=1}^{N}\varphi_j \mathrm{Y}_j \mathrm{Z}_j+\dfrac{\partial f_l}{\partial z}\sum\limits_{j=1}^{N}\varphi_j \mathrm{Z}_j^2=\sum\limits_{j=1}^{N}\varphi_j \mathrm{Z}_j \mathrm{F}_j, \end{cases} \quad (21)$$

где

$$\mathrm{X}_j=\left(x_j-x_l\right),\mathrm{Y}_j=\left(y_j-y_l\right),\mathrm{Z}_j=\left(z_j-z_l\right),\mathrm{F}_j=\left(f_j-f_l\right); \quad (22)$$

$$\varphi_j=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{X}_j^2+\mathrm{Y}_j^2+\mathrm{Z}_j^2}}.$$

Расчетные соотношения для численного интегрирования решаемой системы уравнений методом конечного объема приведены в работе [1].

Численная реализация граничных условий основана на использование фиктивных ячеек, прилегающих к каждой границе расчетной области. В фиктивных ячейках задаются значения функций, соответствующие типу граничных условий:

– на входной границе значения функций задаются в соответствии с условиями невозмущенного потока;

– на выходной сверхзвуковой границе значения функций в фиктивных ячейках задаются линейной экстраполяцией переменных из расчетной области;

– на границе симметрии обеспечивается условие равенства нулю нормальной составляющей вектора скорости, значения остальных функций в фиктивных ячейках задаются линейной экстраполяцией переменных из расчетной области;

– на поверхность тела накладываются условия прилипания, постоянства величины удельной диссипации турбулентных пульсаций и равенства нулю кинетической энергии турбулентности. Температура стенки считается постоянной, либо в отсутствии теплообмена

с поверхностью тела значения в фиктивной ячейке задаются линейной экстраполяцией величин из расчетной области.

С целью повышения порядка точности вычислительной схемы по времени применяется трехстадийный метод SSP(3,2) (SSP – strong stability preserving) [19], вариант явного метода Рунге-Кутта, который обладает расширенной областью устойчивости числа Куранта, $CFL \le 2$:

$$\begin{aligned} \mathrm{w}^{(1)} &= \mathrm{w}^{n} + \frac{\Delta t}{2} R\left(\mathrm{w}^{n}\right), \\ \mathrm{w}^{(2)} &= \mathrm{w}^{(1)} + \frac{\Delta t}{2} R\left(\mathrm{w}^{(1)}\right), \\ \mathrm{w}^{n+1} &= \frac{1}{3}\mathrm{w}^{n} + \frac{2}{3}\mathrm{w}^{(2)} + \frac{\Delta t}{3} R\left(\mathrm{w}^{(2)}\right). \end{aligned} \tag{23}$$

Описанный численный метод имеет второй порядок аппроксимации по времени и пространству. Численное интегрирование решаемой системы уравнений газовой динамики проводится до установления стационарного решения.

**Исходные данные для численного моделирования.** Для проведения аэротермодинамических расчётов была создана трёхмерная поверхность цилиндрически – конического тела. Геометрические размеры исследуемого объекта [4] показаны на рис. 1.

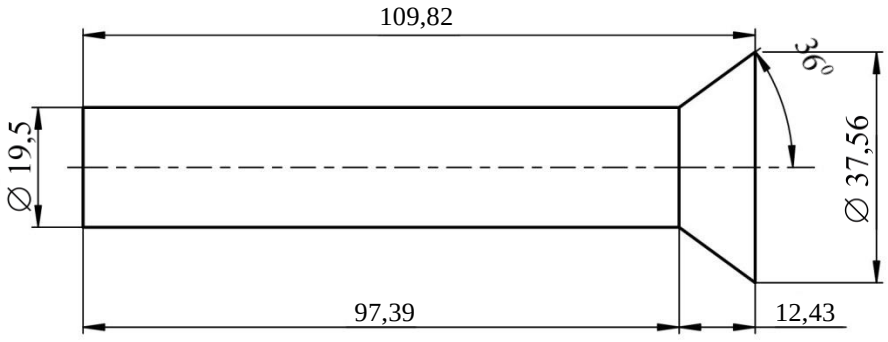



**Рис. 1.** Геометрические размеры цилиндрически – конического тела

Численное моделирование трёхмерного поля течения проводилось с использованием неструктурированных сеток, важным преимуществом которых является автоматизация построения для сложных геометрических форм [12]. Сгущение расчётной сетки осуществлялось вблизи поверхности исследуемого объекта для более детального описания поля течения в пристеночной области. Трёхмерная сетка состояла из тетраэдральных и призматических элементов, общее количество ячеек которой в расчётной области составило 5 418 820.

На поверхности обтекаемого тела задавались граничные условия прилипания и отсутствия турбулентных пульсаций. Расчёты проводились с постоянной температурой поверхности 300 К, вследствие малой продолжительности рабочего режима в эксперименте.

Исходные данные, используемые для численного моделирования высокоскоростного обтекания турбулентным потоком цилиндрически – конического тела приведены в таблице 1 [4].

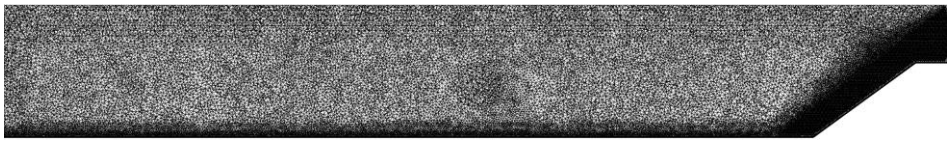


**Рис. 2.** Вид расчетной сетка в плоскости симметрии потока

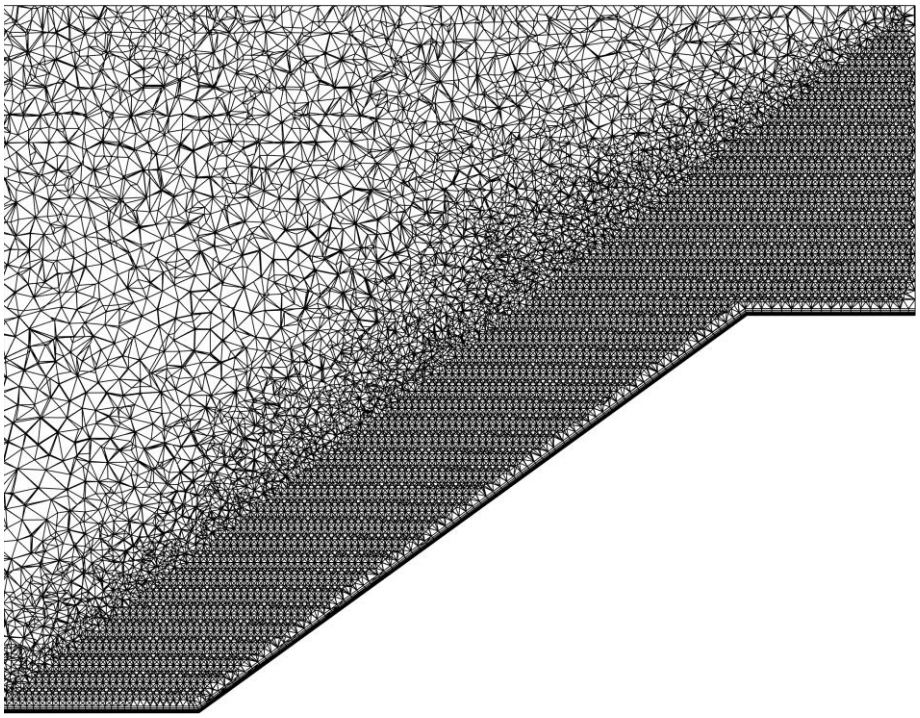
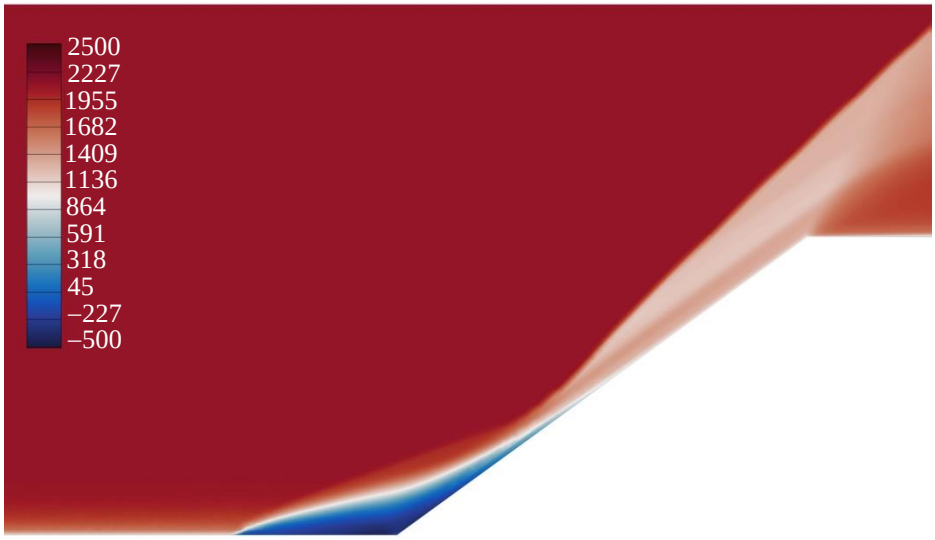


**Рис. 3.** Фрагмент расчетной сетки в области отрывной зоны

Результаты численного моделирования. На рис. 4 и 5 представлены распределения продольной компоненты скорости, величины отношения турбулентной вязкости к ламинарной, давления и температуры, полученные в результате численного моделирования турбулентного обтекания высокоскоростным потоком цилиндрически – конического тела.

На рис. 6 показана структура течения в окрестности зоны отрывного течения, возникающей вследствие взаимодействия ударной волны с турбулентным пограничным слоем.




а)

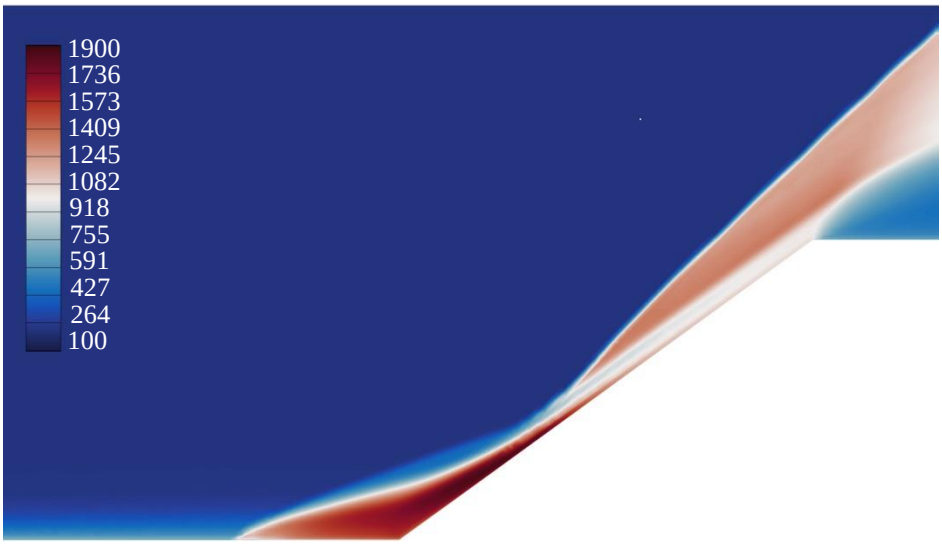



б)

**Рис. 4.** Распределения продольной компоненты скорости (м/с) (а) и величины турбулентной вязкости (б) при высокоскоростном обтекании цилиндрически – конического тела




а)




б)

**Рис. 5.** Распределения давления (Па) (а) и температуры (К) (б)
при высокоскоростном обтекании цилиндрически – конического тела

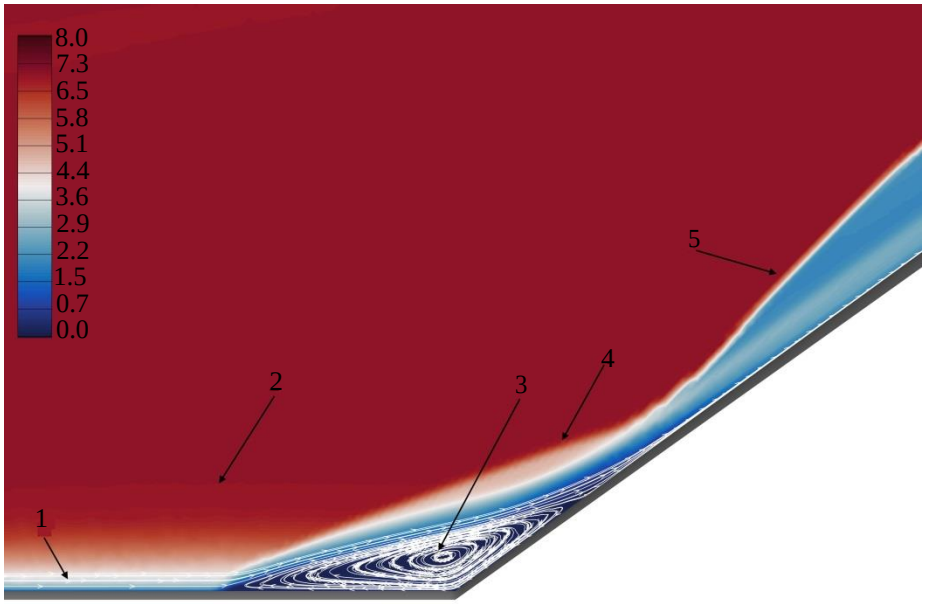



**Рис. 6.** Структура течения в области отрыва потока на распределении числа Маха:
1 — турбулентный пограничный слой; 2 — головной скачок;
3 — зона возвратного течения; 4 — отрывной скачок;
5 — скачок присоединения

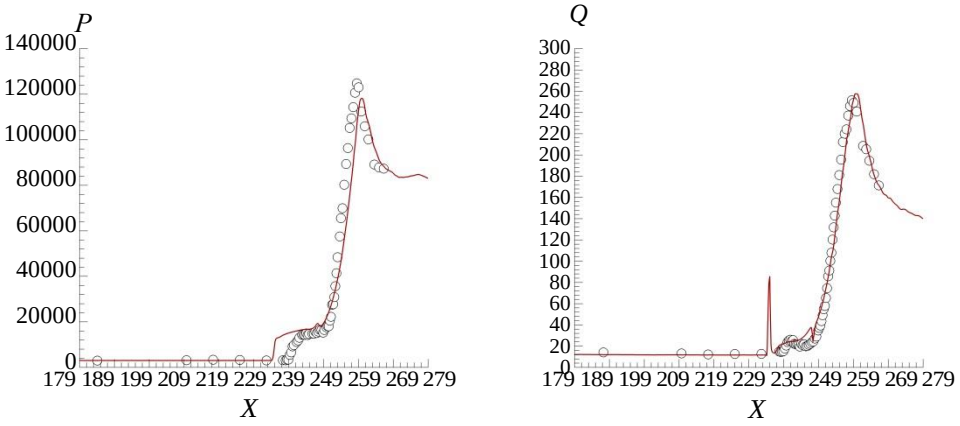



**Рис. 7.** Поверхностные распределения давления (Па) и теплового потока (Вт/см2)
при высокоскоростном обтекании цилиндрически — конического тела:
линии — результаты, полученные в данной работе;
точки — экспериментальные данные

Как видно из представленных графиков (рис. 7), полученные распределения поверхностных характеристик давления и теплового потока в результате численного моделирования отрывного течения в угле сжатия хорошо согласуются с данными экспериментальных исследований [4].

**Заключение.** В результате проведенных численных исследований турбулентного обтекания высокоскоростным потоком цилин-

дрически – конического тела были получены пространственные и поверхностные распределения газодинамических параметров. На представленных картинах течения видно, что используемая вычислительная модель адекватно воспроизводит все особенности решаемой валидационной задачи, а сравнение результатов численного моделирования и экспериментальных данных [4] по распределениям поверхностных характеристик давления и теплового потока демонстрируют хорошее согласие искомых газодинамических величин.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Holden M.S. Historical review of experimental studies and prediction methods to describe laminar and turbulent shock wave/boundary layer interactions in hypersonic flows. *44th AIAA Aerospace Sciences Meeting*, 2006, p. 494.

[2] Holden M.S. Experimental studies of separated flows at hypersonic speeds. II—Two-dimensional wedge separated flow studies. *AIAA Journal*, 1966, vol. 4, no. 5, pp. 790-799.

[3] Holden M.S. *Shock wave-turbulent boundary layer interaction in hypersonic flow*. Tech. Rep. ARL TR 75–0204, 1975, p. 171.

[4] Holden M.S., Wadhams T.P., MacLean M. Measurements in Region of Shock Wave/Turbulent Boundary Layer Interaction from Mach 4 to 10 for Open and «Blind» Code Evaluation/Validation. *21st AIAA Computational Fluid Dynamics Conference*, June 24-27, 2013, San Diego, CA, AIAA Paper 2013-2836, pp. 1-25.

[5] Харченко Н.А. *Численное моделирование аэротермодинамики высокоскоростных летательных аппаратов. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук: 01.02.05*. Москва, МФТИ, 2021, 112 с.

[6] Харченко Н.А., Носенко Н.А. Численное моделирование обтекания высокоскоростным потоком цилиндрически–конического тела и двойного конуса. *Математическое моделирование и численные методы*, 2022, т. 35, № 3, с. 33-46.

[7] Харченко Н.А., Никонов А.М. Определение распределенных аэродинамических характеристик осесимметричного тела конфигурации SOCBT при турбулентном обтекании трансзвуковом потоком. *Математическое моделирование и численные методы*, 2023, т. 38, № 2, с. 100 – 128.

[8] Харченко Н.А., Никонов А.М. Носенко Н.А. Численное решение задачи турбулентного обтекания высокоскоростным потоком цилиндрически-конического тела. *Материалы XXXIII научно-технической конференции по аэродинамике*, декабрь 15-16, Жуковский, ЦАГИ, 2022, с. 101-102.

[9] Menter F. R., Kuntz M., Langtry R.B. Ten years of industrial experience with the SST turbulence model. *Turbulence, heat and mass transfer*, 2003, vol. 4, pp. 625-632.

[10] Лунев В.В. *Течение реальных газов с большими скоростями*. Москва, Физматлит, 2007, 759 с.

[11] Родионов А.В. *Разработка методов и программ для численного моделирования неравновесных сверхзвуковых течений в приложении к аэрокосмическим и астрофизическим задачам. Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук: 05.13.18*. Саров: ИТМФ, 2019, 299 с.

[12] Димитриенко Ю.И., Коряков М.Н., Захаров А.А. Применение метода RKDG для численного решения трехмерных уравнений газовой динамики

на неструктурированных сетках. *Математическое моделирование и численные методы*, 2015, т. 8, № 4, с. 75-91.

[13] Димитриенко Ю.И., Коряков М.Н., Юрин Ю.В., Захаров А.А., Сборщиков С.В., Богданов И.О. Сопряженное моделирование высокоскоростной аэротермодинамики и внутреннего тепломассопереноса в композитных аэрокосмических конструкциях. *Математическое моделирование и численные методы*, 2021, т. 31, № 3, с. 42-61.

[14] Liou M.S. A sequel to AUSM: AUSM+. *Journal of Computational Physics*, 1996, vol. 129, №2, pp. 364-382.

[15] Годунов С.К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики. *Математический сборник*, 1959, т. 47 (89), № 3, с. 271-306.

[16] Kitamura K. *Advancement of shock capturing computational fluid dynamics methods: numerical flux functions in finite volume method*. Singapore, Springer, 2020, 136 p.

[17] Chen S.S., Cai F.J., Xue H.C., Wang N., Yan C. An improved AUSM-family scheme with robustness and accuracy for all Mach number flows. *Applied Mathematical Modelling*, 2019, vol. 77, pp. 1065-1081.

[18] Никонов А.М., Харченко Н.А. Численное моделирование турбулентного горения водорода в сверхзвуковом потоке горячего влажного воздуха. *Химическая физика*, 2025, т. 44, № 4, с. 69 – 78.

[19] Крюков И.А., Иванов И.Э., Ларина Е.В. Программный комплекс расчета высокоскоростных течений hySol. *Физико-химическая кинетика в газовой динамике*, 2021, т. 22, № 1, с. 5.

[20] Michalak K., Ollivier-Gooch C. Limiters for unstructured higher-order accurate solutions of the Euler equations. *46th AIAA Aerospace Sciences Meeting*, 2008, AIAA, art. no. 2008-776.

[21] Shu C. W., Osher S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes, II. *Journal of Computational Physics*, 1989, vol. 83, №1, pp. 32-78.

Статья поступила в редакцию 29.03.2026

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Харченко А.Н. Численное моделирование турбулентного теплообмена на поверхности. *Математическое моделирование и численные методы*, 2026, № 2, с. 3–19.

**Харченко Николай Анатольевич** — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Вычислительная математика и программирование» МАИ. e-mail: kharchenko.na@phystech.edu

# Numerical simulation of turbulent heat transfer on the surface of an axisymmetric body in the presence of a separation flow zone

© N.A. Kharchenko

Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, 125993, Russia

*This paper presents the validation problem of modeling heat transfer on the surface of a cylindrical –conical body in the presence of a separation flow zone due to the interaction*

*of a shock wave with a turbulent boundary layer. The main computational complexity of the problem under consideration is the detailed resolution of the turbulent flow in the wall region in order to further reproduce the experimental distributions of the surface characteristics of pressure and heat flow. In the problem being solved, there is a separation zone, which is an area of return flow, which has a significant effect on the structure of the wall flow.*

***Keywords**: high-speed modelling, turbulent heat transfer, separation flows, computational aerogasdynamics, unstructured grids*

REFERENCES

[1] Holden M.S. Historical review of experimental studies and prediction methods to describe laminar and turbulent shock wave/boundary layer interactions in hypersonic flows. *44th AIAA Aerospace Sciences Meeting*, 2006, p. 494.

[2] Holden M.S. Experimental studies of separated flows at hypersonic speeds. II—Two-dimensional wedge separated flow studies. *AIAA Journal*, 1966, vol. 4, no. 5, pp. 790-799.

[3] Holden M.S. *Shock wave-turbulent boundary layer interaction in hypersonic flow*. Tech. Rep. ARL TR 75–0204, 1975, p. 171.

[4] Holden M.S., Wadhams T.P., MacLean M. Measurements in Region of Shock Wave/Turbulent Boundary Layer Interaction from Mach 4 to 10 for Open and «Blind» Code Evaluation/Validation. *21st AIAA Computational Fluid Dynamics Conference*, June 24-27, 2013, San Diego, CA, AIAA Paper 2013-2836, pp. 1-25.

[5] Kharchenko N.A. *Chislennoe modelirovanie aerotermodinamiki vysokoskorostnykh letatel'nykh apparatov. Dissertaciya na soiskanie uchenoj stepeni kandidata fiziko-matematicheskih nauk: 01.02.05.* [Numerical modelling of aerothermodynamics of high-speed aircraft. PhD Thesis in Physics and Mathematics: 01.02.05]. Moscow, MIPT, 2021, 112 p.

[6] Kharchenko N.A., Nosenko N.A. Numerical simulation high-speed flow around a cylindrical – conical body and a double cone. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2022, vol. 35, №3, pp. 33-46.

[7] Kharchenko N.A., Nikonov A.M. Determination of the distributed aerodynamic characteristics of an axisymmetric body of the SOCBT configuration at turbulent flow with a transonic flow. *Mathematical modeling and Computation methods*, 2023, vol. 38, № 2, pp. 100-128.

[8] Kharchenko N.A., Nikonov A.M., Nosenko N.A. Chislennoe reshenie zadachi turbulentnogo obtekaniya vysokoskorostnym potokom tsilindricheski-konicheskogo tela [Numerical solution of the problem of turbulent high-speed flow around a cylindrical – conical body]. *Materialy XXXIII scientific and technical conference on aerodynamics* [Materialy XXXIII nauchno-tekhnicheskoj konferencii po aerodinamike], Zhukovskii, TsAGI, December 15-16, 2022, pp. 101–102.

[9] Menter F. R., Kuntz M., Langtry R.B. Ten years of industrial experience with the SST turbulence model. *Turbulence, heat and mass transfer*, 2003, vol. 4, pp. 625-632.

[10] Lunev V.V. *Techenie real'nykh gazov s bol'shimi skorostyami* [Flow of real gases with high velocities]. Moscow, Fizmatlit, 2007, 259 p.

[11] Rodionov A.V. *Razrabotka metodov i programm dlya chislennogo modelirovaniya neravnovesnykh sverkhzvukovykh techenii v prilozhenii k*

*aerokosmicheskim i astrofizicheskim zadacham. Dissertaciya na soiskanie uchenoj stepeni doktora fiziko-matematicheskih nauk: 05.13.18.* [Development of methods and programs for numerical modelling of nonequilibrium supersonic flows in application to aerospace and astrophysical problems. Grand PhD in Physics and Mathematics: 05.13.18]. Sarov, ITMF, 2019, 299 p.

[12] Dimitrienko Yu.I., Koryakov M.N., Zakharov A.A. Application of RKDG method for computational solution of three-dimensional gas-dynamic equations with non-structured grids. *Mathematical Modeling and Computational Methods, 2015*, vol. 8, no. 4, pp. 75-91.

[13] Dimitrienko Yu.I., Koryakov M.N., Yurin Yu.V., Zakharov A.A., Sborshchikov S.V., Bogdanov I.O. Coupled modeling of high-speed aerothermodynamics and internal heat and mass transfer in composite aerospace structures. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2021, vol. 31, № 3, pp. 42-61.

[14] Liou M.S. A sequel to AUSM: AUSM+. *Journal of Computational Physics*, 1996, vol. 129, №2, pp. 364-382.

[15] Godunov S.K. Finite difference method for numerical computation of discontinuous solutions of the equations of fluid dynamics. *Sbornik: Mathematics*, 1959, vol. 47, no. 8-9, pp. 357-393.

[16] Kitamura K. *Advancement of shock capturing computational fluid dynamics methods: numerical flux functions in finite volume method*. Singapore, Springer, 2020, 136 p.

[17] Chen S.S., Cai F.J., Xue H.C., Wang N., Yan C. An improved AUSM-family scheme with robustness and accuracy for all Mach number flows. *Applied Mathematical Modelling*, 2019, vol. 77, pp. 1065-1081.

[18] Nikonov A.M., Kharchenko N.A. Numerical simulation of supersonic turbulent combustion of hydrogen in a stream of hut humid air. *Russian Journal of Physical Chemistry B*, 2025, vol. 44, no. 4, pp. 69-78.

[19] Kryukov I.A., Ivanov I.E., Larina E.V. Software package HySol for the Numerical Simulation of High-Speed Flows. *Physical-Chemical Kinetics in Gas Dynamics*, 2021, vol. 22, no. 1, p. 5.

[20] Michalak K., Ollivier-Gooch C. Limiters for unstructured higher-order accurate solutions of the Euler equations. *46th AIAA Aerospace Sciences Meeting*, 2008, AIAA, art. no. 2008-776.

[21] Shu C. W., Osher S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes, II. *Journal of Computational Physics*, 1989, vol. 83, №1, pp. 32-78.

**Kharchenko N.A.**, Cand. Sc. (Phys. — Math.), Assoc. Professor, Department of Computational Mathematics and Programming, Moscow Aviation Institute (National Research University). e-mail: kharchenko.na@phystech.edu