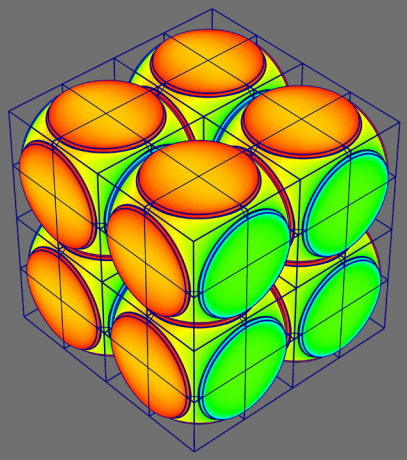
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Димитриенко А.Ю. Модель циклического деформирования и усталости упругопластических материалов, разносопротивляющихся растяжению-сжатию. Математическое моделирование и численные методы, 2026, № 1, с. 140–164.

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/403/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.216.253
04.11.2026 14:32:46

УДК 539.3 DOI: 10.18698/2309-3684-2026-1-140164

Модель циклического деформирования и усталости упругопластических материалов, разносопротивляющихся растяжению - сжатию

© А.Ю. Димитриенко

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Предложена модель упругопластического деформирования материалов, разносопротивляющихся растяжению-сжатию. Модель является модификацией модели Армстронга–Фредерика–Кадашевича-Бондаря, на случай различия упругопластических свойств при растяжении-сжатии. Это различие учитывается с помощью зависимости параметров упрочнения и пределов текучести от первого инварианта тензора напряжений. Сформулирована постановка задачи теории пластического течения в скоростях для материалов , разно-сопротивляющихся растяжению-сжатию. Предложен метод обоснования постановки задачи циклического деформирования упруго-пластических разно-сопротивляющихся материалов, метод основан на асимптотических разложениях и введении двух масштабов времени. Предложен критерий малоцикловой усталости разно-сопротивляющихся материалов. Рассмотрен пример численного решения задачи циклического деформирования упругопластических материалов, показано, что разработанная модель достаточно хорошо описывает кривые циклического деформирования сталей 34CrNiMo6, S275 bu S460, а также соответствующие кривые малоцикловой усталости.

Ключевые слова: *пластичность, усталость, циклическое деформирование, растяжение-сжатие, теория течения, асимптотические разложения*

Введение. Циклические процессы нагружения упругопластических конструкций являются важным классом задач механики деформируемого твердого тела, которому посвящено большое количество работ [1-26 и др.]. Для расчета таких конструкций наиболее широко в настоящее время используются модели упругопластичности, относящиеся к классу теории пластического течения [5-19] и деформационной теории пластичности [1-4]. Среди большого числа различных моделей теории пластического течения для циклических процессов наибольшее применении получили модели с комбинированным изотропным и кинематическим упрочнением, прежде всего модель AFKB, предложенная Армстронгом–Фредериком– Кадашевичем [5,6, 15], и развитая в работах В.С. Бондаря [10,12, 23], в том числе для асимметричного циклического нагружения. Развитие этой же модели было осуществлено Шабошем [16-18] с помощью мульти-компонентного представления напряжений упрочнения, описываемых кинетическими (эволюционными) уравнениями.

Одним из менее исследованных в настоящее время аспектов этой проблемы является разработка моделей циклического деформирования и усталости упруго-пластических конструкций, которые учитывают различие упруго-пластических и усталостных свойств при растяжении-сжатии. Обычно для учета влияния вида напряженного состояния на пластические свойства материалов применяют теории, использующие третий инвариант тензора напряжений [10,11], однако при этом теории пластичности выходят за рамки принципа квазилинейности (тензорной линейности) моделей пластичности [2,6,27]. Другой подход основан на использовании первого инварианта тензора напряжений, он используется в деформационных теориях пластичности [28,29] и в других моделях нелинейного деформирования материалов [30,31]. Для моделей многоцикловой усталости этот же подход был успешно применен при разработке «химического» критерия усталостной прочности [32].

Целью настоящей работы являлось развитие модели теории пластического течения AFKB, для материалов, разносопротивляющихся растяжению-сжатию, с учетом усталостного разрушения. В работе предложена формулировка трехмерной задачи упруго-пластичности в скоростях в общей постановке для произвольных процессов нагружения, а также метод обоснования перехода к постановке задачи упруго-пластичности и усталости при циклических нагружениях.

Модель упругопластических изотропных материалов, разносопротивляющихся растяжению-сжатию. Рассмотрим ортонормированный базис $\vec{e}_i$, компоненты всех векторов и тензоров далее будем рассматривать в этом базисе. Введем обозначения для главных инвариантов произвольного симметричного тензора 2-го ранга a относительно группы изотропии

$$I_1(a) = a_{ij}\delta_{ij} = a_{kk},\ I_2(a) = \sqrt{\frac{3}{2}\,p_{ij}(a)\,p_{ij}(a)} = \sqrt{B_{ijkl}a_{ij}a_{kl}},$$

здесь a_{ij} — компоненты тензора a; $I_1(a)$, $I_2(a)$ — первый и второй главные инварианты тензора a, $p_{ij}(a) = a_{ij} - \frac{1}{3}a_{kk}\delta_{ij}$ — компоненты девиатора тензора a_{ij} [33], для которого имеют место следующие формулы [33]:

$$p_{ij}(a) = \Gamma_{ijkl}a_{kl},$$

$$\Gamma_{ijkl} = \frac{1}{2}\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right) - \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl},\ B_{ijkl} = \frac{3}{2}\Gamma_{ijmn}\Gamma_{mnkl} = \frac{3}{2}\Gamma_{ijkl}, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial I_1(a)}{\partial a_{ij}} = \delta_{ij},\ \frac{\partial I_2(a)}{\partial a_{ij}} = \frac{3p_{ij}(a)}{2I_2(a)},$$

где δ_{ij} — символ Кронекера, Γ_{ijkl} — изотропный ортопроектор [33] .

Рассмотрим изотропный деформируемый материал, проявляющий упруго-пластические свойства. Примем следующие допущения:

1) деформации материала малые, материал является изотропным;

2) имеет место модель аддитивности упругих и пластических деформаций,

$$\varepsilon_{kl} = \varepsilon^e_{kl} + \varepsilon^p_{kl}, \tag{2}$$

здесь ε_{kl}, ε^e_{kl}, ε^p_{kl} — компоненты тензоров полных, упругих и пластических деформаций, соответственно;

3) для упругих деформаций имеет место обобщенный закон Гука [27]

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon^e_{kl}, \tag{3}$$

где σ_{ij} — компоненты тензора напряжений и C_{ijkl} — компоненты тензора модулей упругости для случая изотропного материала

$$C_{ijkl} = \lambda_0\delta_{ij}\delta_{kl} + 2\mu_0\Delta_{ijkl}, \tag{4}$$

здесь λ_0, μ_0 — константы Ламе, Δ_{ijkl} — единичный тензор четвертого ранга [33];

4) пластические деформации подчиняются ассоциированному закону пластического течения

$$\dot{\varepsilon}^p_{kl} = \chi\dot{\lambda}\frac{\partial f}{\partial\sigma_{kl}}, \tag{5}$$

где λ — параметр нагружения, $\dot{\lambda} = \dfrac{d\lambda}{dt}$ — производная по времени t, а f — пластический потенциал, χ — индикатор пластического нагружения

$$\chi = \begin{cases} 0, & \textit{если } f<0 \textit{ или } (f=0 \textit{ и } Df \le 0) \\ 1, & \textit{если } (f=0 \textit{ и } Df>0) \end{cases}, \tag{6}$$

где $Df = \dfrac{\partial f}{\partial\sigma_{kl}}\dot{\sigma}_{kl}$ — частичная производная по времени от пластического потенциала f;

5) для пластического потенциала f принимается следующая модель, относящаяся к классу комбинированного нелинейного кинематического/изотропного упрочения, но с различным упрочнением в областях растяжения-сжатия

$$f = f\left(I_1(\sigma), I_2(a), e_u^p\right), \tag{7}$$

где $I_1(\sigma)$ — первый инвариант тензора напряжений, $I_2(a)$ — второй инвариант приведенного тензора напряжений $a_{ij} = \sigma_{ij} - h_{ij}$, где h_{ij} — напряжения упрочнения, e_u^p — полная накопленная пластическая деформация, $\dot{e}_u^p$ — скорость ее накопления:

$$e_u^p = \int_0^t I_2(\dot{\varepsilon}_{ij}^p)d\tau\,,\ \dot{e}_u^p \equiv I_2\left(\dot{\varepsilon}^p\right) = \sqrt{B_{ijkl}\dot{\varepsilon}_{ij}^p\dot{\varepsilon}_{kl}^p}\ . \tag{8}$$

Для напряжений упрочнения h_{ij} принимаются кинетические уравнения, которые используются в классической модели AFKB, но модифицированные тем, что параметры упрочнения в этой модели зависят от первого инварианта $I_1(\sigma)$ и тем самым различаются при растяжении и при сжатии:

$$\dot{h}_{ij} = H\dot{\varepsilon}_{kl}^p + \Phi_{ij}\dot{e}_u^p\,, \tag{9}$$

где H — параметр упрочнения, зависящий от $I_1(\sigma)$ и e_u^p

$$H = H_+\chi_+(\mathrm{I}_1(\sigma)) + H_-\chi_-(\mathrm{I}_1(\sigma))\,. \tag{10}$$

Здесь H_+, H_- — функции упрочнения при растяжении и сжатии, в общем случае, зависящие от e_u^p, а $\chi_+(\mathrm{I}_1(\sigma))$ и $\chi_-(\mathrm{I}_1(\sigma))$ — функции Хевисайда от первого инварианта тензора напряжений

$$\chi_+(\mathrm{X}) = \begin{cases} 1, & \text{если } X \ge 0 \\ 0, & \text{если } X < 0 \end{cases},\ \ \chi_-(\mathrm{X}) = 1 - \chi(\mathrm{X})\,. \tag{11}$$

Для тензора Φ_{ij} принимается выражение, как в модели AFKB, но модифицированное на случай различия свойств при растяжении - сжатии

$$\Phi_{ij} = H_2\varepsilon_{ij}^p - H_1 h_{ij}\,, \tag{12}$$

где H_1 и H_2 — функции, в общем случае зависящие от e_u^p, а также и от первого инварианта тензора напряжений $I_1(\sigma)$, аналогично (1.13)

$$H_\alpha = H_{\alpha+}\chi_+(\mathrm{I}_1(\sigma)) + H_{\alpha-}\chi_-(\mathrm{I}_1(\sigma))\,,\ \alpha = 1,2\,. \tag{13}$$

Модель с пластическим потенциалом в модифицированной форме Друккера-Прагера. Конкретный вид пластического потенциала (7) выберем в модифицированной форме Друккера-Прагера [8,9], которая позволяет учесть зависимость поверхности пластичности от

растяжении-сжатия, за счет учета 1-го инварианта тензора напряжений

$$f = \frac{1}{2} I_2^2(a) + A_f I_1(\sigma) - B_f , \tag{14}$$

где коэффициенты A_f и B_f имеют вид

$$A_f = \frac{\sigma_{yC}^2 - \sigma_{yT}^2}{2(\sigma_{yC} + \sigma_{yT})},\ B_f = \frac{1}{4}(\sigma_{yC}^2 + \sigma_{yT}^2) . \tag{15}$$

Здесь σ_{yT}, σ_{yC} — пределы текучести при растяжении и сжатии, полагаем их зависящими от накопленных пластических деформаций

$$\sigma_{yT} = \sigma_{yT}(e_u^p),\ \sigma_{yC} = \sigma_{yC}(e_u^p) . \tag{16}$$

Принимаются условия, которые наиболее часто реализуются для конструкционных материалов: $0 < \sigma_{yT} \le \sigma_{yC}$, следовательно, $A_f > 0$, $B_f \ge 0$.

Для функций (16) примем следующие аналитические зависимости, по аналогии с моделями без учета зависимости пластических свойств от растяжения-сжатия [10,11]

$$\sigma_{yT,C}(e_u^p) = \sigma_{yT,C}^0 + (\sigma_{yT,C}^1 - \sigma_{yT,C}^0)(1 - \exp(-\beta_{pT,C} e_u^p)) , \tag{17}$$

где σ_{yT}^0, σ_{yT}^1, β_{pT} и σ_{yC}^0, σ_{yC}^1, β_{pC} — материальные константы модели.

Вычислим производные от пластического потенциала (14), с учетом (1)

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{3}{2} p_{ij}(a) + A_f \delta_{ij} \equiv A_{ij} . \tag{18}$$

После подстановки выражения (18) в (5), получаем уравнение для скорости пластических деформаций

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \chi \dot{\lambda} A_{ij} . \tag{19}$$

Таким образом, предложенная модель содержит следующие материальные константы и функции:

$$\begin{gathered} \lambda_0,\ \mu_0,\ H_+,\ H_-,\ H_{1+},\ H_{1-},\ H_{2+},\ H_{2-}, \\ \sigma_{yT}^0,\ \sigma_{yT}^1,\ \beta_{pT}\ и\ \sigma_{yC}^0,\ \sigma_{yC}^1,\ \beta_{pC}. \end{gathered} \tag{20}$$

Частичная производная Df, определяющая условие пластического деформирования, для потенциала (14) имеет вид

$$Df = A_{ij}\dot{\sigma}_{ij} \tag{21}$$

Выражение для параметра нагружения. Дифференцируем по времени пластический потенциал (14), тогда с учетом (18), получим

$$\frac{d}{dt} f = A_{ij}\dot{\sigma}_{ij} - \frac{3}{2} p_{ij}(a)\dot{h}_{ij} - f_e \dot{e}_u^p , \tag{22}$$

где обозначено

$$f_e = -\frac{\partial f}{\partial e_u^p} . \tag{23}$$

Из условия пластичности (6), получаем, что когда $\chi = 1$ должны выполняться условия

$$f = 0 \text{ и } \frac{d}{dt} f = 0 . \tag{24}$$

Подставляя в это уравнение выражения (22), (9) и (12), приходим к следующему уравнению

$$A_{ij}\dot{\sigma}_{ij} - B_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}^p - C_e \dot{e}_u^p = 0 , \tag{25}$$

где введены обозначения

$$B_{ij} = \frac{3}{2} p_{ij}(a) H , \; C_e = \frac{3}{2} p_{ij}(a)(H_2 \varepsilon_{ij}^p - H_1 h_{ij}) + f_e . \tag{26}$$

После подстановки уравнения (19) в (26), получаем уравнение для параметра нагружения

$$A_{ij}\dot{\sigma}_{ij} - \Phi_1 \dot{\lambda} - C_e \dot{e}_u^p = 0 , \tag{27}$$

где

$$\Phi_1 = A_{ij} B_{ij} . \tag{28}$$

Из (28) выражаем параметр нагружения

$$\dot{\lambda} = (A_{ij}\dot{\sigma}_{ij} - C_e \dot{e}_u^p) / \Phi_1 . \tag{29}$$

Подставляя выражение (29) в (8), получаем соотношение между $\dot{e}_u^p$ и $\dot{\lambda}$

$$\dot{e}_u^p = \chi \gamma A_u \dot{\lambda} , \tag{30}$$

где введены обозначения

$$\gamma = sign(\dot{\lambda}) , \; A_u = \sqrt{B_{ijkl} A_{ij} A_{kl}} . \tag{31}$$

После подстановки выражения (30) в (29) получаем итоговое уравнение для параметра нагружения $\dot{\lambda}$

$$\dot{\lambda} = \chi \bar{A}_{ij} \dot{\sigma}_{ij} , \tag{32}$$

где обозначены

$$\bar{A}_{ij} = A_{ij} / \bar{\Phi}_1 , \ \bar{\Phi}_1 = \Phi_1 + C_e \gamma A_u . \tag{33}$$

Подставляя выражение (30) и (19) в (9), получаем уравнение для тензора упрочнения

$$\dot{h}_{ij} = \Phi^p_{ij} \dot{\lambda} , \tag{34}$$

где обозначено

$$\Phi^p_{ij} = A_{ij} H + (H_2 \varepsilon^p_{ij} - H_1 h_{ij}) \gamma A_u . \tag{35}$$

Система уравнений (32) и (34) рассматривается относительно $\dot{\lambda}$ и h_{ij}, и позволяет вычислить эти функции в зависимости от ε^p_{ij} и σ_{ij}. Эта система является нелинейной алгебраической относительно $\dot{\lambda}$ и дифференциальной относительно h_{ij}.

Определяющие соотношения и постановка задачи упруго-пластичности в скоростях. Подставляя выражение (32) в (19), получаем

$$\dot{\varepsilon}^p_{kl} = Q_{klij} \dot{\sigma}_{ij} , \tag{36}$$

где введен тензор 4-го ранга, связывающий скорости пластических деформаций и напряжений

$$Q_{ijkl} = \chi A_{ij} \bar{A}_{kl} . \tag{37}$$

Дифференцируя соотношение упругости (3) по времени и подставляя в него (36), получаем следующее соотношение, связывающее скорости полных деформаций со скоростями напряжений

$$\dot{\sigma}_{mp} = \tilde{C}_{mpkl} \dot{\varepsilon}_{kl} , \tag{38}$$

где обозначен

$$\tilde{C}_{mpkl} = T^{-1}_{mpij} C_{ijkl} \tag{39}$$

— приведенный тензор модулей упругости, а T^{-1}_{ijuv} — тензор обратный к тензору

$$T_{ijmn} = \Delta_{ijmn} + C_{ijkl} Q_{klmn} . \tag{40}$$

Приведенный тензор $\tilde{C}_{ijkl}$ зависит от пластических деформаций ε_{ij}^{p}, напряжений σ_{kl}, а также от $\dot{\lambda}$ и h_{ij}, в отличие от C_{ijkl} он несимметричен по парам индексов.

Подставляя соотношение (38) в (36), получаем соотношение между скоростями пластических деформаций и скоростями полных деформаций

$$\dot{\varepsilon}_{kl}^{p} = Y_{klmn}\dot{\varepsilon}_{mn}, \tag{41}$$

где введен тензор концентрации пластических деформаций

$$Y_{klij} = Q_{klmn}\tilde{C}_{mnij}. \tag{42}$$

Тензоры деформаций, пластических деформаций и напряжений вычисляются по известным скоростям этих тензоров следующим образом:

$$\begin{gathered}\varepsilon_{ij}(t) = \varepsilon_{ij}(0) + \int_0^t \dot{\varepsilon}_{ij}(\tau)\,d\tau, \quad \varepsilon_{ij}^{p}(t) = \varepsilon_{ij}^{p}(0) + \int_0^t \dot{\varepsilon}_{ij}^{p}(\tau)\,d\tau, \\ \sigma_{ij}(t) = \int_0^t \dot{\sigma}_{ij}(\tau)\,d\tau.\end{gathered} \tag{43}$$

Таким образом, общая система определяющих соотношений упруго-пластичности в рамках рассмотренной модели может быть представлена в скоростях в виде системы соотношений (32), (34) и (38), (41).

К этой системе присоединяются уравнения равновесия в скоростях

$$\nabla_i \dot{\sigma}_{ij} = 0, \; x_i \in V, \tag{44}$$

в рассматриваемой области V, а также соотношения Коши в скоростях

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_i \dot{u}_j + \nabla_j \dot{u}_i), \; x_i \in V \bigcup \Sigma, \tag{45}$$

граничные условия в скоростях на внешней поверхности Σ, области V

$$\dot{u}_i\big|_{\Sigma_u} = \dot{u}_{ei}, \; n_i\dot{\sigma}_{ij}\big|_{\Sigma_\sigma} = \dot{S}_i, \tag{46}$$

где u_{ei} — компоненты заданного вектора перемещений, а S_{ei} — заданного вектора усилий, а также начальные условия

$$\begin{gathered}t = 0: \;\; \sigma_{ij} = 0, \;\; \varepsilon_{ij} = 0, \;\; \varepsilon_{ij}^{p} = 0, \;\; \dot{\varepsilon}_{ij}^{p} = 0, \;\; u_j = 0, \\ h_{ij} = 0, \;\; \dot{\lambda} = 0, \;\; x_i \in V \bigcup \Sigma.\end{gathered} \tag{47}$$

где $\nabla_i = \partial / \partial x_i$ — производные по координатам в ортонормированном базисе $\vec{e}_i$, Σ_u — часть поверхности, на которой задан вектор перемещений, а Σ_σ — часть поверхности, на которой задан вектор усилий.

Задача об одномерном растяжении-сжатии упругопластического тонкого стержня. Рассмотрим задачу об одномерного нагружении тонкого упругопластического стержня, когда напряженно-деформированное состояние можно считать содержащим по одной ненулевой продольной компоненте у тензора напряжений и деформаций, а поперечными деформациями можно пренебречь

$$\begin{gathered}\sigma_{11} = \sigma \neq 0\,, \text{ остальные } \sigma_{ij} \equiv 0\,,\\ \varepsilon_{11} = \varepsilon \neq 0\,, \text{ остальные } \varepsilon_{ij} = 0\,,\\ \varepsilon^p_{11} = \varepsilon^p \neq 0\,, \text{ остальные } \varepsilon^p_{ij} \equiv 0\,.\end{gathered} \tag{48}$$

В этом случае имеем: $I_1(\sigma) = \sigma$, $I_2(\sigma) = |\sigma|$, $p_{11}(\sigma) = \dfrac{2}{3}(\sigma - h)$. Определяющие соотношения (32), (34) и (38), (41) в данном случае сводятся к следующей системе одномерных уравнений

$$\begin{gathered}\dot\sigma = \tilde C_{1111}\dot\varepsilon,\ \dot\varepsilon^p = Y_{1111}\dot\varepsilon,\\ \dot h = A_{11}(H + \gamma_2(H_2\varepsilon^p - H_1 h)\dot\lambda,\\ \dot\lambda = \chi\bar A_{11}\dot\sigma,\end{gathered} \tag{49}$$

где коэффициенты в этих уравнениях выражаются по формулам

$$\begin{gathered}\tilde C_{1111} = T^{-1}_{1111}C_{1111},\ \ T_{1111} = 1 + \chi C_{1111}Q_{1111},\\ Y_{1111} = \chi Q_{1111}\tilde C_{1111},\ \ Q_{1111} = A_{11}\bar A_{11},\\ \bar A_{11} = A_{11}/\bar\Phi_1,\ \ \bar\Phi_1 = \Phi_1 + C_e\gamma A_u,\ \ A_u = |A_{11}|,\\ A_{11} = \sigma - h + A_f,\ \ \Phi^p_{11} = A_{11}H + (H_2\varepsilon^p - H_1 h)\gamma A_u,\\ \Phi_1 = A_{11}B_{11},\ \ B_{11} = (\sigma - h)H,\\ C_e = (\sigma - h)(H_2\varepsilon^p - H_1 h) + f_e,\ \ f_e = \frac{\partial B_f}{\partial e^p_u} - \frac{\partial A_f}{\partial e^p_u}\sigma.\end{gathered} \tag{50}$$

Так как $\gamma = \gamma_1\gamma_2$, $\gamma = sign(\dot\lambda)$, $\gamma_1 = sign(\bar A_{11})$, $\gamma_2 = sign(\dot\sigma)$ и $\gamma_1 A_u = A_{11}$, то

$$\begin{gathered}\bar A_{11} = ((\sigma - h)\bar\Phi^p_{11} + f_e\gamma_2)^{-1},\\ \bar\Phi_1 = A_{11}((\sigma - h)\bar\Phi^p_{11} + f_e\gamma_2),\ \ \bar\Phi^p_{11} = H + \gamma_2(H_2\varepsilon^p - H_1 h).\end{gathered} \tag{51}$$

Уравнение поверхности пластичности (14) , (24) в данной задаче имеет вид

$$f = \frac{1}{2}(\sigma - h)^2 + A_f \sigma - B_f = 0. \qquad (52)$$

Решение системы уравнений (45)-(48) осуществляется численно, с помощью неявной конечно-разностной схемы.

Примеры численного расчета. Были проведены расчеты циклических диаграмм деформирования $\sigma \sim \varepsilon$ для 3-х различных сталей. Нагружение рассматривалось в жестком режиме (при заданной циклической деформации: $\varepsilon = \varepsilon_{max} sin\omega t$). Проводилось сравнение результатов расчетов с экспериментальными диаграммами циклического деформирования, по результатам которого определялись материальные константы модели (20) из условий наилучшего совпадения экспериментальных циклических диаграмм с расчетными. Параметры упрочнения полагались константами, модуль упругости определялся E из табличных значений.

На рис. 1 показаны циклические диаграммы деформирования для высокопрочной стали 34CrNiMo6. Экспериментальные данные взяты из работы [34]. Число циклов нагружения составляло $n = 30$. Сталь 34CrNiMo6 является циклически разупрочняющимся материалом: пределы текучести при растяжении и сжатии для нее уменьшаются с накоплением циклических пластических деформаций. Учет в упруго-пластической модели различие пластических свойств при растяжении и сжатии позволяет более точно описать циклические диаграммы деформирования стали 34CrNiMo6. Были получены следующие значения материальных констант для этой стали:

$$E = 210\ ГПа,\ \ H_{+} = 33\ ГПа,\ \ H_{-} = 40\ ГПа,\ \ H_{1+} = 265\ ГПа,$$
$$H_{1-} = 200\ ГПа,\ \ H_{2+} = 1508\ ГПа,\ \ H_{2-} = 1311\ ГПа,\ \ \sigma_{yT}^{0} = 0.975\ ГПа,$$
$$\sigma_{yT}^{1} = 0.7\ ГПа,\ \ \beta_{pT} = 2.5,\ \ \sigma_{yC}^{0} = 0.9\ ГПа,\ \ \sigma_{yC}^{1} = 0.6\ ГПа,\ \ \beta_{pC} = 2.5.$$

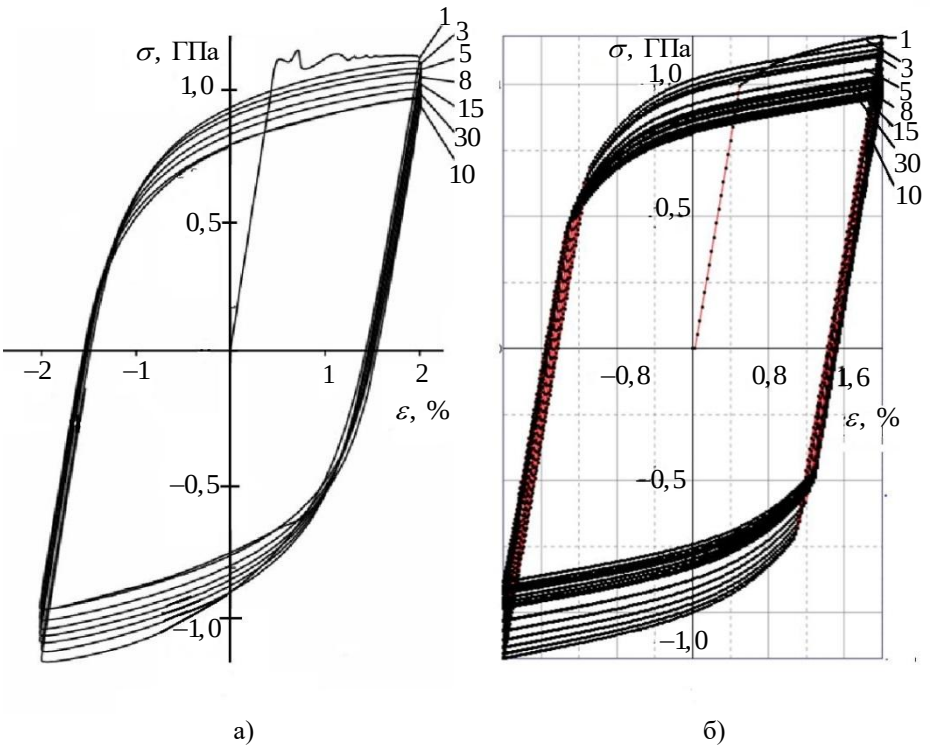
На рис. 2 показаны циклические диаграммы деформирования для низкопрочной стали S 275. Экспериментальные данные взяты из работы [35]. Число циклов нагружения составляло $n = 30$. Сталь S 275 является циклически упрочняющимся материалом: пределы текучести при растяжении и сжатии для нее возрастают с накоплением циклических пластических деформаций. Учет в упруго-пластической модели различия пластических свойств при растяжении и сжатии позволяет более точно описать циклические диаграммы деформирования стали S 275. Начальный и переменный пределы текучести при сжатии для этой стали больше, чем при растяжении, а константы

упрочнения, наоборот, меньше. Были получены следующие значения материальных констант для этой стали:

$$E = 214\ ГПа,\ \ H_{+} = 20\ ГПа,\ \ H_{-} = 18\ ГПа,\ \ H_{1+} = 1986\ ГПа,$$

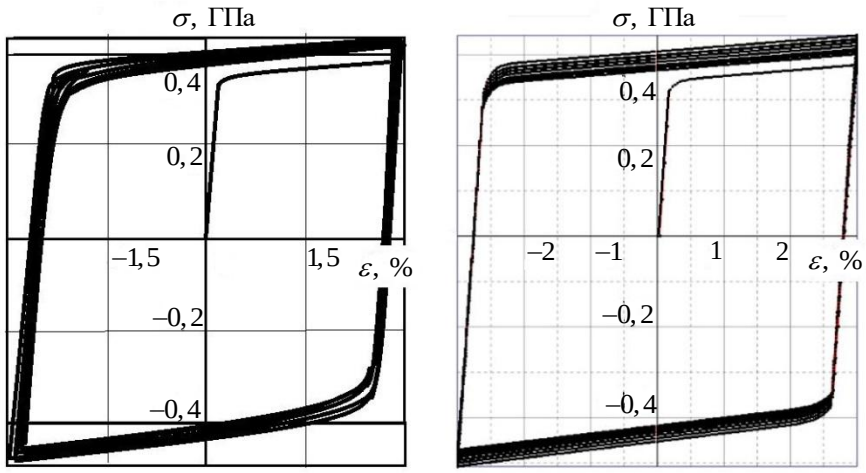
$$H_{1-} = 753\ ГПа,\ \ H_{2+} = 1497\ ГПа,\ \ H_{2-} = 1302\ ГПа,\ \ \sigma^{0}_{yT} = 0.311\ ГПа,$$

$$\sigma^{1}_{yT} = 0.35\ ГПа,\ \ \beta_{pT} = 2.5,\ \ \sigma^{0}_{yC} = 0.36\ ГПа,\ \ \sigma^{1}_{yC} = 0.4\ ГПа,\ \ \beta_{pC} = 2.5.$$



а) б)

Рис. 1. Сравнительные диаграммы циклического деформирования стали 34CrNiMo6: а) — эксперимент [34], б) — расчет по предложенной модели



а) б)

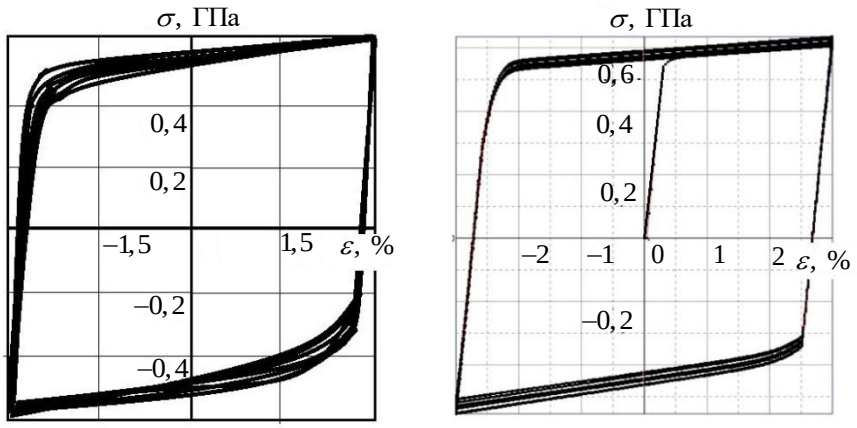
Рис. 2. Сравнительные диаграммы циклического деформирования стали S 275: а) — эксперимент [35], б) — расчет по предложенной модели

На рис. 3 показаны циклические диаграммы деформирования для средне-прочной стали S 460. Экспериментальные данные взяты из работы [35]. Число циклов нагружения составляло $n = 30$. Сталь S 460 является циклически упрочняющимся материалом: пределы текучести при растяжении и сжатии для нее, так же как и для стали S 275, возрастают с накоплением циклических пластических деформаций, но в отличие от этой для стали S 460 растяжение и сжатие влияют на пластические свойства в другом соотношении: начальный и переменный пределы текучести при растяжении для этой стали больше, чем при сжатии, а константы упрочнения, наоборот, меньше. Были получены следующие значения материальных констант для этой стали S 460:

$$E = 205\ ГПа,\ \ H_{+} = 20\ ГПа,\ \ H_{-} = 40\ ГПа,\ \ H_{1+} = 1200\ ГПа,$$

$$H_{1-} = 1300\ ГПа,\ \ H_{2+} = 1506\ ГПа,\ \ H_{2-} = 1297\ ГПа,\ \ \sigma_{yT}^{0} = 0.487\ ГПа,$$

$$\sigma_{yT}^{1} = 0.5\ ГПа,\ \ \beta_{pT} = 2,\ \ \sigma_{yC}^{0} = 0.3\ ГПа,\ \ \sigma_{yC}^{1} = 0.35\ ГПа,\ \ \beta_{pC} = 2.$$



а) б)

Рис. 3. Сравнительные диаграммы циклического деформирования стали S 460: а) — эксперимент [35], б) — расчет по предложенной модели

Критерий длительной прочности упруго-пластических материалов, разносопротивляющихся растяжению-сжатию. Следуя общей теории накопления дисперсных повреждений [23,36], положим, что локальное разрушение изотропного упруго-пластического материала в некоторой точке конструкции наступает, когда впервые в момент времени t_* выполняется условие

$$z(t_*) = 1, \tag{53}$$

где $z(t)$ — некоторый параметр повреждаемости.

Параметр повреждаемости $z(t)$ выберем согласно модифицированному «химическому критерию» [32] длительной и усталостной прочности, в основе которого лежит концепция разрушения материала при достижении химическим термодинамическим потенциалом [27] предельного значения. Модифицирование «химического» критерия заключается в том, что для упругопластических материалов параметр повреждаемости выбираем состоящим из 3-х слагаемых

$$z(t) = z_0 + z_p(t) + z_r(t), \tag{54}$$

где z_0 — мгновенная часть повреждений, описывающая условно мгновенную прочность материала, не зависящую от длительности и истории действия напряжений; $z_p(t)$ — необратимая часть накопления повреждений, которая возникает при относительно кратковременно действующем большом уровне напряжений, при котором воз-

никают пластические деформации; $z_r(t)$ — обратимая часть повреждений, которая описывает накопление повреждений при длительно действующих напряжениях в упругой области, в том числе переменных напряжениях (т.е. явление усталости), но без длительного «отдыха», на этапах отдыха, когда нет нагрузок, эта часть повреждений постепенно залечивается и стремится к нулю.

Модель мгновенных повреждений. Для изотропных материалов мгновенная часть повреждений z_0 — выбирается согласно «трехповерхностной модели» статической прочности, предложенной в работе [32]

$$z_0 = \frac{\sigma_u^2}{3\sigma_S^2(1+B_C V(\sigma))} + \frac{\sigma_+^2}{\sigma_{T+}^2}, \tag{55}$$

здесь обозначены инварианты тензора напряжений: $\sigma = I_1(\sigma)$ — первый, $\sigma_\pm = \frac{1}{2}(|\sigma| \pm \sigma)$ — знакопостоянные инварианты, а $\sigma_u = I_2(\sigma)$ — второй инвариант.

В выражении (55) введены также обозначения для σ_T, σ_C, σ_S — пределов мгновенной прочности при растяжении, сжатии и сдвиге, которые связаны между собой следующими соотношениями: $\sigma_C \geq \sqrt{3}\sigma_S \geq \sigma_T > 0$. Константы B_C и σ_{T+} (предел прочности при всестороннем растяжении) выражаются через пределы статической прочности при растяжении, сжатии и сдвиге

$$B_C = \left(\frac{\sigma_C^2}{3\sigma_S^2} - 1\right)\frac{1}{\sigma_C},\ \sigma_{T+} = \left(\frac{1}{\sigma_T^2} - \frac{1}{3\sigma_S^2}\right)^{-1/2}. \tag{56}$$

Функция $V(\sigma)$ в выражении (55) описывает гладкий переход накопления микро-повреждений между областями растяжения и сжатия:

$$V(\sigma) = \begin{cases} 0, & \textit{если} \quad \sigma > 0 \\ -\sigma, & \textit{если} -\sigma_C < \sigma < 0 \\ \sigma_C & \textit{если} \quad \sigma < -\sigma_C \end{cases}. \tag{57}$$

Модель (55) с учетом (57) позволяет учитывать эффект различия накопления повреждений в области растяжения и сжатия, который характерен для большинства материалов.

Модель накопления необратимых повреждений в области пластических деформаций. Для необратимой части повреждений в

области пластических деформаций $z_p(t)$ примем модель, согласно которой повреждения накапливаются одновременно с накоплением пластических деформаций, но различным образом в области растяжения и сжатия:

$$z_p(t) = K_p^+ (e_{u+}^p)^{\beta_+} + K_p^- (e_{u-}^p)^{\beta_-},$$
$$e_{u\pm}^p = \int_0^t I_2(\dot{\varepsilon}^p(\tilde{t}))\chi_\pm(I_1(\sigma(\tilde{t})))d\tilde{t}. \qquad (58)$$

Здесь K_p^+, K_p^-, β^+, β^- — константы модели, $\tilde{t}$ — переменная интегрирования по времени, а $e_{u\pm}^p$ — накопленные пластические деформации в области растяжения и сжатия, соответственно.

Метод двухмасштабного времени для упругопластического деформирования тел при циклических нагружениях. Рассмотрим случай циклического изменения внешних нагрузок, действующих на рассматриваемое упруго-пластическое тело, т.е. полагаем, что функции заданные на границе тела перемещения u_{ei} и вектор напряжений S_{ei} являются периодическими по времени

$$\Omega(t) = \Omega(t + t_p),\ \Omega = \{u_{ei}, S_{ei}\}, \qquad (59)$$

где t_p — период цикла колебаний. Будем рассматривать задачи, при которых в теле реализуется нагружение с большим числом циклов $n_{\max}$ упруго-пластических колебаний, т.е. $n_{\max} \gg 1$. Тогда можно ввести два масштаба процессов циклического деформирования упруго-пластических тел [32]: «быстрое» время τ, которое соответствует изменению истинного времени t в пределах одного цикла колебаний t_p, и «медленное» время, которое соответствует изменениям истинного времени t в пределах максимального числа циклов колебаний $t_{\max} = n_{\max} t_p$:

$$\tau = \frac{t}{t_p},\ \bar{t} = \frac{t}{t_{\max}}, \qquad (60)$$

а также ввести малый параметр

$$\varkappa = \frac{t_p}{t_{\max}} = \frac{1}{n_{max}} << 1, \qquad (61)$$

с помощью которого быстрое время можно представить в следующем виде $\tau = \bar{t} / \varkappa$.

Периодические граничные функции (59) можно рассматривать как 1-периодические функции от быстрого времени: $\Omega(\tau)=\Omega(\tau+1)$, $\Omega=\{u_{ei},S_{ei}\}$.

Основное дополнительное допущение для предложенной выше модели циклического деформирования упруго-пластической среды при циклическом нагружении вида (59) состоит в том, напряжения, деформации и перемещения, являющиеся решением задачи (32), (34) и (38), (41), (44)-(47), можно искать в виде асимптотических разложений функций от малому параметру $\varkappa$, в которых все члены разложений являются функциями двухмасштабного времени, т.е.

$$\begin{gathered} W(x_i,t)=W^0(x_i,\tau,\overline{t})+\varkappa W^1(x_i,\tau,\overline{t})+\varkappa^2...,\\ x_i\in V,\ \ \tau\in[0,1],\ \ \overline{t}\in[0,1],\ \ W=\{u_i,\varepsilon_{ij},\varepsilon_{ij}^p,\sigma_{ij}\}. \end{gathered} \tag{62}$$

Дифференцирование функций двухмасштабного времени осуществляем по правилам дифференцирования сложных функций

$$\dot{W}=W_{;t}+\frac{1}{\varkappa}W_{;\tau}, \tag{63}$$

где обозначены производные: $\dot{W}=\dfrac{\partial W}{\partial t}$, $W_{;t}=\dfrac{\partial W}{\partial\overline{t}}$, $W_{;\tau}=\dfrac{\partial W}{\partial\tau}$.

Подставляя в (62) разложение (63), получаем асимптотическое разложение для производных по времени

$$\dot{W}=\frac{1}{\varkappa}W_{;\tau}^0+W_{;t}^0+W_{;\tau}^1+\varkappa\left(W_{;t}^1+W_{;\tau}^2\right)+\varkappa^2....\tag{64}$$

Подставляя разложения (62) и (64) в задачу (32), (34) и (38), (41), (44)-(47), после приравнивания к нулю слагаемых при одинаковых степенях от малого параметра, получаем следующую рекуррентную последовательность задач упруго-пластичности:

1) задача при $\varkappa^{-1}$:

$$\nabla_i \sigma^0_{ij;\tau} = 0;$$
$$\sigma^0_{ij;\tau} = \tilde{C}^0_{ijkl}\varepsilon^0_{kl;\tau}, \quad \varepsilon^{p0}_{kl;\tau} = Y^0_{klij}\varepsilon^0_{ij;\tau};$$
$$\lambda^0_{;\tau} = A^{\varepsilon 0}_{ij}\varepsilon^0_{ij;\tau}, \quad \dot{h}^0_{ij;\tau} = \Phi^{h0}_{ij} - \Phi^{h0}h^0_{ij}, \quad e^{p0}_{u;\tau} = I_2(\varepsilon^{p0}_{ij;\tau});$$
$$\varepsilon^0_{ij;\tau} = \frac{1}{2}(\nabla_i u^0_{j;\tau} + \nabla_j u^0_{i;\tau}); \tag{65}$$
$$u^0_{i;\tau}\Big|_{\Sigma_u} = u_{ei;\tau}, \quad n_i\sigma^0_{ij;\tau}\Big|_{\Sigma_\sigma} = S_{ei;\tau};$$
$$\left[u^0_{i;\tau}\right] = 0, \quad n_i\left[\sigma^0_{ij;\tau}\right] = 0;$$
$$\tau = 0: \quad \sigma^0_{ij} = 0, \quad \varepsilon^0_{ij} = 0, \quad \varepsilon^{p0}_{ij} = 0, \quad u^0_j = 0, \quad \varepsilon^{p0}_{u\pm} = 0;$$

2) задача при $\varkappa^0$:

$$\nabla_i \sigma^1_{ij;\tau} + \nabla_i \sigma^0_{ij;t} = 0;$$
$$\sigma^1_{ij;\tau} + \sigma^0_{ij;t} = \tilde{C}^0_{ijkl}(\varepsilon^1_{kl;\tau} + \varepsilon^0_{kl;t}) + \tilde{C}^1_{ijkl}\varepsilon^0_{kl;\tau};$$
$$\varepsilon^{p1}_{kl;\tau} + \varepsilon^{p0}_{kl;t} = Y^0_{klij}(\varepsilon^1_{ij;\tau} + \varepsilon^0_{ij;t}) + Y^1_{klij}\varepsilon^0_{ij;\tau};$$
$$\lambda^1_{;\tau} + \lambda^0_{;t} = A^{\varepsilon 0}_{ij}(\varepsilon^1_{ij;\tau} + \varepsilon^0_{ij;t}) + A^{\varepsilon 1}_{ij}\varepsilon^0_{ij;\tau};$$
$$h^1_{ij;\tau} + h^0_{ij;t} = \Phi^{h1}_{ij} - \Phi^{h1}h^0_{ij} - \Phi^{h0}h^1_{ij}; \tag{66}$$
$$\varepsilon^1_{ij;\tau} + \varepsilon^0_{ij;t} = \frac{1}{2}(\nabla_i u^1_{j;\tau} + \nabla_j u^1_{i;\tau} + \nabla_i u^0_{j;t} + \nabla_j u^0_{i;t});$$
$$(u^1_{i;\tau} + u^0_{i;t})\Big|_{\Sigma_u} = 0, \quad n_i(\sigma^1_{ij;\tau} + \sigma^0_{ij;t})\Big|_{\Sigma_\sigma} = 0;$$
$$\left[u^1_{i;\tau} + u^0_{i;t}\right] = 0, \quad n_i\left[\sigma^1_{ij;\tau} + \sigma^0_{ij;t}\right] = 0;$$
$$\tau = 0: \quad \sigma^1_{ij} = 0, \quad \varepsilon^1_{ij} = 0, \quad \varepsilon^{p1}_{ij} = 0, \quad u^1_j = 0, \quad \varepsilon^{p1}_{u\pm} = 0;$$

и т.д. при более высоких степенях $\varkappa$.

Для тензоров $\Pi = \{\tilde{C}_{mpkl}, Y_{klij}, A^{\varepsilon}_{ij}, \Phi^h_{ij}, \Phi^h\}$, зависящих от пластических деформаций и напряжений, после подстановки в них разложений (62) также получаем асимптотические разложения вида (62), в которых Π^0 и Π^1, соответственно, это нулевые и первые члены этих разложений, причем

$$\Pi^0 = \Pi(\sigma^0_{mn}, \varepsilon^{p0}_{sq}, e^{p0}_u, h^0_{ij}, \lambda^0_{;\tau}), \quad \Pi = \{\tilde{C}_{mpkl}, Y_{klij}, A^{\varepsilon}_{ij}, \Phi^h_{ij}, \Phi^h\},$$
$$\Pi^1 = \Pi^1(\sigma^0_{mn}, \varepsilon^{p0}_{sq}, e^{p0}_u, h^0_{ij}, \lambda^0_{;\tau}, \sigma^1_{mn}, \varepsilon^{p1}_{sq}, e^{p1}_u, h^1_{ij}, \lambda^1_{;\tau}). \tag{67}$$

Функции (67) в отличие от граничных функций (59) не обязательно являются 1-периодическими по быстрому времени τ, но в соответствии с основным допущением предлагаемой модели, полагаем, что при переходе от одного периода колебаний к следующему перио-

ду непериодичность этих функций мало меняется, т.е. является функцией медленного времени, поэтому решение задачи в нулевом приближении – функции $\{\Pi^0,\ \varepsilon_{ij}^0,\ u_j^0\}$ зависят как от быстрого времени τ, так и от медленного времени $\overline{t}$.

Для получения решения задачи упруго-пластичности с точностью до $\varkappa$ достаточно рассмотреть только задачу в нулевом приближении (65). Если решение этой задачи непериодично, то необходимо ее решение для различных моментов меленного времени.

Модель малоцикловой усталости. Модель малоцикловой усталости строим при следующих допущениях и предположениях:

1) циклическое деформирование осуществляется в пластической области, при этом непериодичностью функций $\{\Pi^0,\ \varepsilon_{ij}^0,\ u_j^0\}$, являющихся решением задачи (65), можно пренебречь, т.е. функции $\{\Pi^0,\ \varepsilon_{ij}^0,\ u_j^0\}$ полагаются зависящими только от быстрого времени τ и 1-периодическими по τ;

2) обратимые повреждения $z_r(t)$ за число циклов малоциклового нагружения не успевают сильно развиться и ими можно пренебречь по сравнению с мгновенными повреждениями z_0 и необратимыми повреждениями $z_p(t)$, т.е.

$$z(t) = z_0 + z_p(t). \tag{68}$$

Используя эти допущения 1), 2), подставим асимптотические разложения (62) в выражения (55) и (58) для параметров z_0 и $z_p(t)$, и ограничимся только удержанием главных членов в этих разложениях.

Применим теорему [32] об интегрировании квази-периодических функций: интегралы в формулах (58) могут быть представлены в следующем виде:

$$\int_0^t \dot{e}_u^p(\tilde{t})\chi_{\pm}(I_1(\sigma(\tilde{t})))d\tilde{t} = \overline{t}\,\langle\langle \dot{e}_u^p \chi_{\pm}\rangle\rangle + O(\varkappa), \tag{69}$$

т.е. «медленное» и «быстрое» времена считаются независимыми, а $O(\varkappa)$ означает члены, имеющие величину малого порядка $\varkappa$ по сравнению с первыми членами в (58). Здесь введено осреднение по быстрому времени

$$\langle\langle f\rangle\rangle = \int_0^1 f(\tau)d\tau. \tag{70}$$

Черту сверху далее над медленным временим опускаем.

Тогда выражение (58) для параметра повреждаемости можно представить в следующем виде

$$z_p(\overline{t}) = K_p^+(\overline{t}\langle\langle \dot{e}_u^p \chi_+ \rangle\rangle)^{\beta_+} + K_p^-(\overline{t}\langle\langle \dot{e}_u^p \chi_- \rangle\rangle)^{\beta_-}. \qquad (71)$$

Подставляя (71) в (68), а затем в (53), получаем критерий малоцикловой усталости

$$z(\overline{t}_*) = \frac{(\sigma_{u,\max})^2}{3\sigma_S^2} + \frac{(\sigma_{+,\max})^2}{\sigma_{T+}^2} + \\ + K_p^+(\overline{t}\langle\langle \dot{e}_u^p \chi_+ \rangle\rangle)^{\beta_+} + K_p^-(\overline{t}\langle\langle \dot{e}_u^p \chi_- \rangle\rangle)^{\beta_-} = 1, \qquad (72)$$

где $\overline{t}_*$ — время до разрушения, $\sigma_{u\max} = \max \sigma_u$, $\sigma_{+\max} = \max \sigma_+$ максимальные значения инвариантов σ_u и σ_+ в цикле колебаний.

Полученный критерий имеет сходство с критерием малоцикловой усталости Мэнсона-Коффина [37], который содержит аддитивным образом накопления повреждаемости за счет мгновенно-упругой части и пластических деформаций. Первые два слагаемых в (72) соответствуют накоплению повреждаемости за счет мгновенно-упругой нагружения, а вторые два слагаемые соответствуют накоплению повреждаемости за счет накопления пластических деформаций. Зависимость от числа циклов в критерии Менсона-Коффина связана с амплитудой пластической деформации степенной функцией. В критерии (72) медленное время, которое фактически является числом циклов, связано с накопленными пластическими деформациями также в виде степенной функции. Однако эта степенная зависимость в критерии (72) является более сложной, и она различна для областей растяжения и сжатия.

Пример численного моделирования. Рассматривался случай одномерного циклического растяжения-сжатия упруго-пластического стержня в жестком режиме деформирования. Расчет упруго-пластических диаграмм деформирования по предложенной модели представлен выше. Далее рассчитывались значения параметра повреждаемости $z(\overline{t})$ согласно критерию усталостной прочности (72) при различных значениях максимальной деформации в цикле $\varepsilon_{\max}$, в результате была вычислена функция $z(\overline{t}, \varepsilon_{\max}; R)$, где $R = \{K_p^+, \beta^+, K_p^-, \beta^-\}$ — набор материальных констант модели. Из условия $z(\overline{t}_*, \varepsilon_{\max}; R) = 1$ получаем зависимость предельного значения числа циклов $\overline{t}_*$ до разрушения с $\varepsilon_{\max}$, т.е. функцию $\varepsilon_{\max} = f_d(\overline{t}_*; R)$. Из условия наилучшего совпадения данной функции с кривой малоцикловой усталости $\varepsilon_{\max} = f_d^{(\text{Э})}(\overline{t}_*)$ определялись константы R. Для сплава 34CrNiMo6 с помощью предложенного алгоритма были найдены следующие значения:

$$K_p^+ = 0.00593,\ K_p^+ = 0.00497,$$

$$\beta^+ = 1{,}175,\ \beta^- = 0{,}952,\ \sigma_T = 1{,}25\ \text{ГПа}.$$

На рис. 4 показаны экспериментальная [34] и расчетная кривые малоцикловой усталости сплава 34CrNiMo6, медленное время $\bar{t}^*$ было выбрано совпадающим с числом циклов усталостного разрушения.

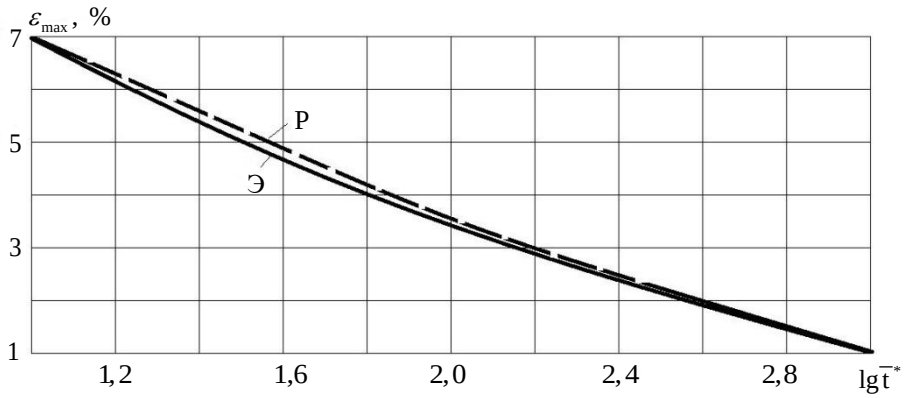


Рис. 4. Экспериментальная (Э) [34] и расчетная (Р) кривые малоцикловой усталости сплава 34CrNiMo6

Для сплава S 275 с помощью предложенного алгоритма были найдены следующие значения:

$$K_p^+ = 0.0938,\ K_p^+ = 0.0891,$$

$$\beta^+ = 0{,}462,\ \beta^- = 0{,}395,\ \sigma_T = 0{,}58\ \text{ГПа}.$$

На рис. 5 показаны экспериментальная [35] и расчетная кривые малоцикловой усталости сплава S 275, полученная с помощью разработанного алгоритма.

Проведенные вычисления показывают, что предложенная модель малоцикловой усталости позволяет достаточно хорошо аппроксимировать экспериментальные данные при одноосном симметричном циклическом нагружении и может служить основой для решения задач прогнозирования долговечности элементов конструкций из упруго-пластических материалов при циклических нагружениях.

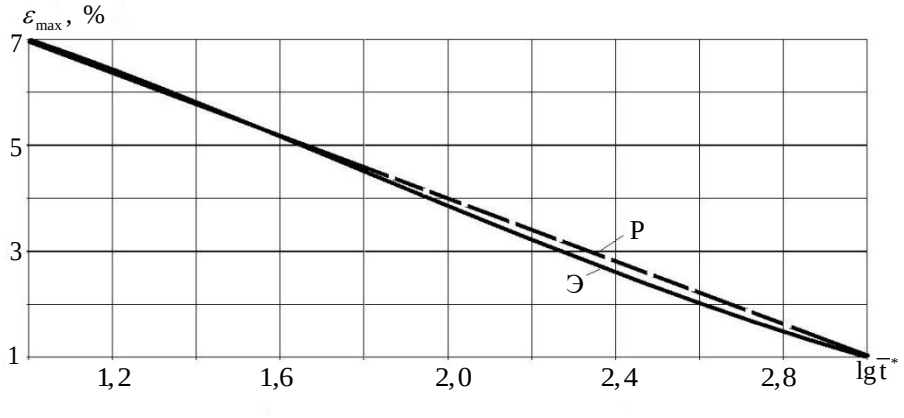


Рис. 5. Экспериментальная (Э) [35] и расчетная (Р) кривые малоцикловой усталости сплава S245

Выводы. Предложена модель упругопластического деформирования и усталости изотропных материалов, разносопротивляющихся растяжению-сжатию. Модель является развитием определяющих соотношений теории пластического течения с комбинированным изотропным – кинематическим упрочнением на основе модели AFKB и пластического потенциала типа Друккера-Прагера. Сформулирована постановка задачи упругопластичности в скоростях. Предложен метод обоснования постановки задачи упругопластичности при циклических нагружениях, основанный на асимптотических разложениях и введении двух масштабов времени. Предложена модель малоцикловой усталости для материалов, разносопротивляющихся растяжению-сжатию. Рассмотрен пример численного решения одномерной задачи упругопластического деформирования и малоцикловых колебаний при циклических нагружениях. Показано, что предложенная модель достаточно хорошо аппроксимирует кривые симметричного циклического деформирования сталей 34CrNiMo6, S 275 и S 460 , а также соответствующие им кривые малоцикловой усталости.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ильюшин А.А. *Пластичность. Упруго–пластические деформации*. Москва, УРСС, 2018, 392 с.

[2] Ильюшин А.А. *Пластичность: основы общей математической теории.* Москва, УРСС, 2020, 270 с.

[3] Ильюшин А.А., Ленский В.В. *Сопротивление материалов*. Москва, Физматлит, 1959, 372 с.

[4] Москвитин В.В. *Циклические нагружения элементов конструкций.* Москва, УРСС, 2019, 344 с.

[5] Кадашевич Ю. И., Новожилов В. В. Теория пластичности, учитывающая остаточные микронапряжения. *Известия РАН. Механика твердого тела*, 1981, № 5, с. 99–110.

[6] Кадашевич Ю.И. О различных тензорно-линейных соотношениях в теории пластичности. *Исследования по упругости и пластичности*, 1967, вып. 6, с. 39-45.

[7] Ишлинский А.Ю. Общая теория пластичности с линейным упрочнением. *Украинский математический журнал*, 1954, т. 6, вып. 3, с. 314−324.

[8] Drucker D.C. Relation of experiments to mathematical theories of plasticity. *Journal of Applied Mechanics*, 1949, vol. 16, 349–357.

[9] Prager W. A new method of analyzing stresses and strains in work hardening plastic solids. *Journal of Applied Mechanics*. 1956, vol. 23, pp. 493–496.

[10] Бондарь В.С., Даншин В.В. *Пластичность. Пропорциональные и непропорциональные нагружения*. Москва, Физматлит, 2008, 176 с.

[11] Бондарь В.С. *Неупругость. Варианты теории.* Москва, Физматлит, 2004, 144 с.

[12] Бондарь В.С., Бурчаков С.В., Даншин В.В. Математическое моделирование процессов упругопластического деформирования и разрушения материалов при циклических нагружениях. *Проблемы прочности и пластичности*, 2010, вып. 72, с. 18-27.

[13] Зубчанинов В.Г. *Математическая теория пластичности*. Тверь, ТГТУ, 2002, 300 с.

[14] Митенков Ф.М., Волков И.А., Игумнов Л.А., Каплиенко А.В., Коротких Ю.Г., Панов В.А. *Прикладная теория пластичности*. Москва, Физматлит, 2015, 284 с.

[15] Amstrong, P.J., Frederick C.O. A mathematical represention of the multiaxial Bauschinger effect. *CEGB Report* No. *RD/B/N 731*. *Materials at High Temperatures*, 1966, vol. 24, pp. 1-26.

[16] Chaboche J.L. On some modifications of kinematic hardening to improve the description of ratchetting effects. *International Journal of Plasticity*, 1991, vol. 7, pp.661–678.

[17] Chaboche J.L. Modeling of ratchetting: evaluation of various approaches. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 1994, vol. 13, no. 4, pp. 501–518.

[18] Chaboche J.L., Nouailhas D., Pacou D., Paulmier P. Modeling of the cyclic response and ratchetting effects on inconel-718 alloy. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 1991, vol. 10, no. 1, pp.101–121.

[19] Abdel-Karim M. Modified kinematic hardening rules for simulations of ratchetting. *International Journal of Plasticity*, 2009, vol. 25, no. 8, pp. 1560–1587.

[20] Романов А.Н. Энергетические критерии разрушения при малоцикловом нагружении. *Проблемы прочности*, 1974, № 1, с. 3−10.

[21] Hill R. *The mathematical theory of plasticity*. Oxford, Oxford University Press, 1950, 407 p.

[22] Радаев Ю.Н. *Пространственная задача математической теории пластичности:* Учебное пособие. Самара, Издательство «Самарский университет», 2004, 142 с.

[23] Бондарь В.С., Даншин В.В., Макаров Д.А. Математическое моделирование процессов деформирования и накопления повреждений при циклических нагружениях. *Вестник ПНИПУ*, 2014, № 2, с. 125-152.

[24] Димитриенко Ю. И., Юрин Ю. В., Сборщиков С. В. *Многомасштабное моделирование упругопластических композиционных материалов*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2024, 228 с.

[25] Димитриенко Ю.И., Сборщиков С.В., Димитриенко А.Ю., Юрин Ю.В. Микроструктурная модель деформационной теории пластичности квазиизотропных композиционных материалов. *Математическое моделирование и численные методы*, 2021, № 4, с. 17–44.

[26] Димитриенко Ю.И., Черкасова М.С., Димитриенко А.Ю. Микроструктурная модель анизотропной теории течения для упруго-пластических слоистых композитов. *Математическое моделирование и численные методы*, 2022, № 3, с. 47–70.

[27] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. Т. 1. Тензорный анализ*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011, 367 с.

[28] Быков Д. Л. *О некоторых соотношениях между инвариантами напряжений и деформаций в физически нелинейных средах*. *Упругость и неупругость.* Москва, Изд-во Моск. ун-та, 1971, вып. 2, с. 114–128.

[29] Быков Д.Л., Пелешко В.А. Определяющие соотношения деформирования, анизотропной деградации и разрушения наполненных полимерных материалах в процессах преобладающего растяжения с изменяющимся направлением оси и отдыхами. *Известия РАН. Механика твердого тела*, 2009, т. 44, № 5, с. 59-67.

[30] Ломакин Е.В., Королькова О.П. Задачи механики разрушения тел, свойства которых чувствительны к виду напряженного состояния, для условий продольного сдвига. *Математическое моделирование в естественных науках*, 2023, т. 1, с. I-IV.

[31] Федоренко А.Н., Федулов Б.Н., Ломакин Е.В. Задача потери устойчивости тонкостенных конструкций из композиционных материалов, свойства которых зависят от типа нагружения. *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*, 2019, № 3, с. 104-111.

[32] Димитриенко Ю.И., Димитриенко А.Ю. «Химический» критерий для моделирования усталостной долговечности материалов, разносопротивляющихся растяжению-сжатию. *Математическое моделирование и численные методы,* 2024, № 3, с. 18–42.

[33] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды: учебное пособие: в 4 томах. Т 1. Тензорный анализ*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011, 463 с.

[34] Branco R., Costa J. D. M., Antunes F.V., Perdigão S. Monotonic and cyclic behavior of DIN 34CrNiMo6 tempered alloy steel. *Metals*, 2016, vol. 6, 98, pp. 1-14.

[35] Versaillot P.D. *Effect of Cyclic Loading on the mechanical properties of steel*. Dissertation. Romania, Universitatea Politehnica Timisoara, 2017, 172 p.

[36] Ильюшин А.А., Победря Б.Е. *Основы математической теории термовязкоупругости*. Москва, Наука, 1970, 282 с

[37] Manson S.S. *Behaviour of materials under conditions of thermal stress*. *National Advisory Committee for Aeronautics. Technical Note 2933*. Ohio, Lewis Flight Propul ion Laboratory Cleveland, 1954, 106 p.

Статья поступила в редакцию 18.12.2025

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Димитриенко А.Ю. Модель циклического деформирования и усталости упругопластических материалов, разносопротивляющихся растяжению-сжатию. *Математическое моделирование и численные методы*, 2026, № 1, с. 140–164.

Димитриенко Александр Юрьевич — аспирант кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: sasha.dimit@mail.ru

A model of cyclic deformation and fatigue of elastic-plastic materials with different resistance in tension and compression

© A.Yu. Dimitrienko

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

A model of elastic-plastic deformation of materials with different resistance to tension and compression is proposed. The model is a modification of the Armstrong–Frederick–Kadashevich–Bondar model for the case of differences in elastic-plastic properties under tension and compression. This difference is taken into account using the dependence of the hardening parameters and yield strengths on the first invariant of the stress tensor. A statement of the problem of the theory of plastic flow in velocities for materials with different resistance to tension and compression is formulated. A method for justifying the statement of the problem of cyclic deformation of elastic-plastic materials with different resistance is proposed. The method is based on asymptotic expansions and the introduction of two time scales. A criterion for low-cycle fatigue of materials with different resistance is proposed. An example of a numerical solution to the problem of cyclic deformation of elastic-plastic materials is considered. It is shown that the developed model describes the cyclic deformation curves of 34CrNiMo6, S275b, and S460 steels, as well as the corresponding low-cycle fatigue curves, quite well.

***Keywords**: plasticity, fatigue, cyclic deformation, tension-compression, flow theory, asymptotic expansions*

REFERENCES

[1] Ilyushin A.A. *Plastichnost'. Uprugo-plasticheskie deformacii* [Plasticity. Elastic-plastic deformations]. Moscow, URSS, 2018, 392 p.

[2] Ilyushin A.A. *Plastichnost': osnovy obshchej matematicheskoj teorii* [Plasticity: Fundamentals of General Mathematical Theory]. Moscow, URSS, 2020, 270 p.

[3] Ilyushin A.A., Lensky V.V. *Soprotivlenie materialov* [Resistance of materials]. Moscow, Fizmatlit Publ., 1959, 372 p.

[4] Moskvitin V.V. *Ciklicheskie nagruzheniya elementov konstrukcij* [Cyclic loading of structural elements]. Moscow, URSS, 2019, 344 p.

[5] Kadashevich Yu. I., Novozhilov V. V. *Teoriya plastichnosti, uchityvayushchaya ostatochnye mikronapryazheniya*. [Theory of plasticity taking into account residual microstresses]. *Mechanics of Solids*, 1981, no. 5, pp. 99–110.

[6] Kadashevich Yu.I. O razlichnyh tenzorno-linejnyh sootnosheniyah v teorii plastichnosti [On various tensor-linear relations in the theory of plasticity]. *Issledovaniya po uprugosti i plastichnosti* [Studies in elasticity and plasticity], 1967, iss. 6, pp. 39-45.

[7] Ishlinsky A. Yu. General theory of plasticity with linear hardening. *Ukrainian Mathematical Journal*, 1954, vol. 6, iss. 3, pp. 314−324.

[8] Drucker D.C. Relation of experiments to mathematical theories of plasticity. *Journal of Applied Mechanics*, 1949, vol. 16, 349–357.

[9] Prager W. A new method of analyzing stresses and strains in work hardening plastic solids. *Journal of Applied Mechanics*. 1956, vol. 23, pp. 493–496.

[10] Bondar V.S., Danshin V.V. *Plastichnost'. Proporcional'nye i neproporcional'nye nagruzheniya* [Plasticity. Proportional and disproportionate loads]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2008, 176 p.

[11] Bondar V.S. *Neuprugost'. Varianty teorii* [Inelasticity. Theory variants]. Moscow, Fizmatlit, 2004, 144 p.

[12] Bondar V.S., Burchakov S.V., Danshin V.V. Mathematically modeling the processes of elastoplastic deformation and failure of materials under cyclic loading. *Problemy prochnosti i plastichnosti* [Problems of Strength and Plasticity], 2010, is. 72, pp. 18-27.

[13] Zubchaninov V.G. *Matematicheskaya teoriya plastichnosti* [Mathematical theory of plasticity]. Tver, Publishing House of TSTU, 2002, 300 p.

[14] Mitenkov F.M., Volkov I.A., Igumnov L.A., Kaplienko A.V., Korotkikh Yu.G., Panov V.A. *Prikladnaya teoriya plastichnosti* [Applied theory of plasticity]. Moscow, Fizmatlit, 2015, 284 p.

[15] Amstrong, P.J., Frederick C.O. A mathematical represention of the multiaxial Bauschinger effect. *CEGB Report* No. *RD/B/N 731*. *Materials at High Temperatures*, 1966, vol. 24, pp. 1-26.

[16] Chaboche J.L. On some modifications of kinematic hardening to improve the description of ratchetting effects. *International Journal of Plasticity*, 1991, vol. 7, pp.661–678.

[17] Chaboche J.L. Modeling of ratchetting: evaluation of various approaches. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 1994, vol. 13, no. 4, pp. 501–518.

[18] Chaboche J.L., Nouailhas D., Pacou D., Paulmier P. Modeling of the cyclic response and ratchetting effects on inconel-718 alloy. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 1991, vol. 10, no. 1, pp.101–121.

[19] Abdel-Karim M. Modified kinematic hardening rules for simulations of ratchetting. *International Journal of Plasticity*, 2009, vol. 25, no. 8, pp. 1560–1587.

[20] Romanov A.N. Energeticheskie kriterii razrusheniya pri malociklovom nagruzhenii [Energy criteria of destruction under low-cycle loading]. *Strength of Materials*, 1974, no. 1, pp. 3−10.

[21] Hill R. *The mathematical theory of plasticity*. Oxford, Oxford University Press, 1950, 407 p.

[22] Radaev Yu.N. *Prostranstvennaya zadacha matematicheskoj teorii plastichnosti: Uchebnoe posobie* [Radaev Yu.N. Spatial problem of the mathematical theory of plasticity: Textbook]. Samara, Samara University Press, 2004, 142 p.

[23] Bondar V.S., Danshin V.V., Makarov D.A. Matematicheskoe modelirovanie processov deformirovaniya i nakopleniya povrezhdenij pri ciklicheskih nagruzheniyah [Mathematical modeling of deformation processes and damage accumulation under cyclic loading]. *Vestnik PNIPU* [Bulletin of PNIPU], 2014, no. 2, pp. 125-152.

[24] Dimitrienko Yu. I., Yurin Yu. V., Sborshchikov S. V. *Mnogomasshtabnoe modelirovanie uprugoplasticheskih kompozicionnyh materialov* [Multiscale modeling of elastic-plastic composite materials]. Moscow, BMSTU Publ., 2024, 228 p.

[25] Dimitrienko Yu.I., Sborschikov S.V., Dimitrienko A.Yu., Yurin Yu.V. Modeling microstructural model of the plasticity defor-mation theory for quasi-isotropic composite materials. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2021, no. 4, pp. 17–44.

[26] Dimitrienko Yu.I., Cherkasova M.S., Dimitrienko A.Yu. Microstructural model anisotropic flow theory for elastic-plastic layered composites. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2022, no. 3, pp. 47–70.

[27] Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika sploshnoj sredy. T. 1. Tenzornyj analiz* [Continuum Mechanics. Vol. 1. Tensor analysis]. Moscow, BMSTU Publ., 2011, 367 p.

[28] Bykov D. L. *O nekotoryh sootnosheniyah mezhdu invariantami napryazhenij i deformacij v fizicheski nelinejnyh sredah. Uprugost' i neuprugost'* [On some relationships between stress and strain invariants in physically nonlinear media. Elasticity and Inelasticity]. Moscow, Lomonosov Moscow State University - Publishing House, 1971, iss. 2, no. 114–128.

[29] Bykov D.L., Peleshko V.A. Constitutive relations of strain, anisotropic degradation, and fracture of filled polymer materials in prevailing-tension processes with varying axis direction and relaxations. *Mechanics of Solids*, 2009, vol. 44, no. 5, pp. 705-711.

[30] Lomakin E.V., Korolkova O.P. Zadachi mekhaniki razrusheniya tel, svojstva kotoryh chuvstvitel'ny k vidu napryazhennogo sostoyaniya, dlya uslovij prodol'nogo sdviga [Problems of fracture mechanics of bodies whose properties are sensitive to the type of stress state, for longitudinal shear conditions]. *Matematicheskoe modelirovanie v estestvennyh naukah* [Mathematical Modeling in the Natural Sciences], 2023, vol. 1, pp. I-IV.

[31] Fedorenko A.N., Fedolov B.N., Lomakin E.V. Buckling problem of composite thin-walled structures with properties dependent on loading types. *Vestnik Permskogo nacional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika* [Bulletin of Perm National Research Polytechnic University], 2019, no. 3, pp. 104-111.

[32] Dimitrienko Yu.I., Dimitrienko A.Yu., «Chemical» criterion for modeling the fatigue life of materials with different resistance to tension and compression. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2024, no. 3, pp. 18–42.

[33] Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika sploshnoj sredy: uchebnoe posobie: v 4 tomah. T 1. Tenzornyj analiz* [Continuum mechanics: a textbook: in 4 volumes. Volume 1. Tensor analysis]. Moscow, BMSTU Publ., 2011, 463 p.

[34] Branco R., Costa J. D. M., Antunes F.V., Perdigão S. Monotonic and cyclic behavior of DIN 34CrNiMo6 tempered alloy steel. *Metals*, 2016, vol. 6, 98, pp. 1-14.

[35] Versaillot P.D. *Effect of Cyclic Loading on the mechanical properties of steel*. Dissertation. Romania, Universitatea Politehnica Timisoara, 2017, 172 p.

[36] Il'yushin A.A., Pobedrya B.E. Osnovy matematicheskoy teorii termovyazkouprugosti [Fundamentals of the mathematical theory of thermoviscoelasticity], Mos-cow, Nauka Publ, 1970, 282 p.

[37] Manson S.S. *Behaviour of materials under conditions of thermal stress. National Advisory Committee for Aeronautics. Technical Note 2933*. Ohio, Lewis Flight Propul ion Laboratory Cleveland, 1954, 106 p.

Dimitrienko A.Yu., Postgraduate Student of the Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: sasha.dimit@mail.ru