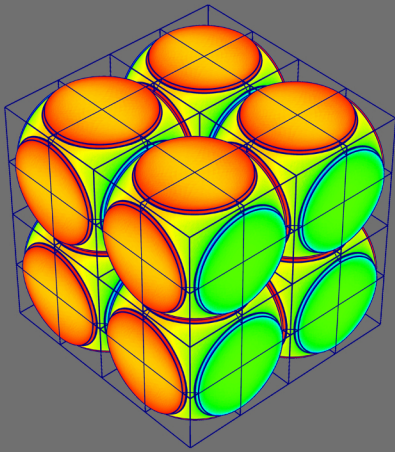




Математическое моделирование и численные методы

Димитриенко А.Ю. Модель циклического деформирования и усталости упругопластических материалов, разносопротивляющихся растяжению-сжатию. Математическое моделирование и численные методы, 2026, № 1, с. 140-164.

Источник: <https://mmcm.bmstu.ru/articles/403/>

Модель циклического деформирования и усталости упругопластических материалов, разносопротивляющихся растяжению - сжатию

© А.Ю. Димитриенко

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Предложена модель упругопластического деформирования материалов, разносопротивляющихся растяжению-сжатию. Модель является модификацией модели Армстронга–Фредерика–Кадашевича–Бондаря, на случай различия упругопластических свойств при растяжении-сжатии. Это различие учитывается с помощью зависимости параметров упрочнения и пределов текучести от первого инварианта тензора напряжений. Сформулирована постановка задачи теории пластического течения в скоростях для материалов, разносопротивляющихся растяжению-сжатию. Предложен метод обоснования постановки задачи циклического деформирования упруго-пластических разносопротивляющихся материалов, метод основан на асимптотических разложениях и введении двух масштабов времени. Предложен критерий малоциклового усталости разносопротивляющихся материалов. Рассмотрен пример численного решения задачи циклического деформирования упругопластических материалов, показано, что разработанная модель достаточно хорошо описывает кривые циклического деформирования сталей 34CrNiMo6, S275 и S460, а также соответствующие кривые малоциклового усталости.

Ключевые слова: пластичность, усталость, циклическое деформирование, растяжение-сжатие, теория течения, асимптотические разложения

Введение. Циклические процессы нагружения упругопластических конструкций являются важным классом задач механики деформируемого твердого тела, которому посвящено большое количество работ [1-26 и др.]. Для расчета таких конструкций наиболее широко в настоящее время используются модели упругопластичности, относящиеся к классу теории пластического течения [5-19] и деформационной теории пластичности [1-4]. Среди большого числа различных моделей теории пластического течения для циклических процессов наибольшее применение получили модели с комбинированным изотропным и кинематическим упрочнением, прежде всего модель АФКВ, предложенная Армстронгом–Фредериком–Кадашевичем [5,6, 15], и развитая в работах В.С. Бондаря [10,12, 23], в том числе для асимметричного циклического нагружения. Развитие этой же модели было осуществлено Шабошем [16-18] с помощью мульти-компонентного представления напряжений упрочнения, описываемых кинетическими (эволюционными) уравнениями.

Одним из менее исследованных в настоящее время аспектов этой проблемы является разработка моделей циклического деформирования и усталости упруго-пластических конструкций, которые учитывают различие упруго-пластических и усталостных свойств при растяжении-сжатии. Обычно для учета влияния вида напряженного состояния на пластические свойства материалов применяют теории, использующие третий инвариант тензора напряжений [10,11], однако при этом теории пластичности выходят за рамки принципа квазилинейности (тензорной линейности) моделей пластичности [2,6,27]. Другой подход основан на использовании первого инварианта тензора напряжений, он используется в деформационных теориях пластичности [28,29] и в других моделях нелинейного деформирования материалов [30,31]. Для моделей многоциклового усталости этот же подход был успешно применен при разработке «химического» критерия усталостной прочности [32].

Целью настоящей работы являлось развитие модели теории пластического течения АФКВ, для материалов, разносопротивляющихся растяжению-сжатию, с учетом усталостного разрушения. В работе предложена формулировка трехмерной задачи упруго-пластичности в скоростях в общей постановке для произвольных процессов нагружения, а также метод обоснования перехода к постановке задачи упруго-пластичности и усталости при циклических нагружениях.

Модель упругопластических изотропных материалов, разносопротивляющихся растяжению-сжатию. Рассмотрим ортонормированный базис $\vec{e}_i$, компоненты всех векторов и тензоров далее будем рассматривать в этом базисе. Введем обозначения для главных инвариантов произвольного симметричного тензора 2-го ранга a относительно группы изотропии

$$I_1(a) = a_{ij}\delta_{ij} = a_{kk}, \quad I_2(a) = \sqrt{\frac{3}{2} p_{ij}(a) p_{ij}(a)} = \sqrt{B_{ijkl} a_{ij} a_{kl}},$$

здесь a_{ij} — компоненты тензора a ; $I_1(a)$, $I_2(a)$ — первый и второй главные инварианты тензора a , $p_{ij}(a) = a_{ij} - \frac{1}{3} a_{kk} \delta_{ij}$ — компоненты девиатора тензора a_{ij} [33], для которого имеют место следующие формулы [33]:

$$\begin{aligned} p_{ij}(a) &= \Gamma_{ijkl} a_{kl}, \\ \Gamma_{ijkl} &= \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl}, \quad B_{ijkl} = \frac{3}{2} \Gamma_{ijmn} \Gamma_{mnkl} = \frac{3}{2} \Gamma_{ijkl}, \\ \frac{\partial I_1(a)}{\partial a_{ij}} &= \delta_{ij}, \quad \frac{\partial I_2(a)}{\partial a_{ij}} = \frac{3 p_{ij}(a)}{2 I_2(a)}, \end{aligned} \quad (1)$$

где δ_{ij} — символ Кронекера, Γ_{ijkl} — изотропный ортопроектор [33].

Рассмотрим изотропный деформируемый материал, проявляющий упруго-пластические свойства. Примем следующие допущения:

- 1) деформации материала малые, материал является изотропным;
- 2) имеет место модель аддитивности упругих и пластических деформаций,

$$\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{kl}^e + \varepsilon_{kl}^p, \quad (2)$$

здесь ε_{kl} , ε_{kl}^e , ε_{kl}^p — компоненты тензоров полных, упругих и пластических деформаций, соответственно;

- 3) для упругих деформаций имеет место обобщенный закон Гука [27]

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^e, \quad (3)$$

где σ_{ij} — компоненты тензора напряжений и C_{ijkl} — компоненты тензора модулей упругости для случая изотропного материала

$$C_{ijkl} = \lambda_0 \delta_{ij} \delta_{kl} + 2\mu_0 \Delta_{ijkl}, \quad (4)$$

здесь λ_0 , μ_0 — константы Ламе, Δ_{ijkl} — единичный тензор четвертого ранга [33];

- 4) пластические деформации подчиняются ассоциированному закону пластического течения

$$\dot{\varepsilon}_{kl}^p = \chi \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}, \quad (5)$$

где λ — параметр нагружения, $\dot{\lambda} = \frac{d\lambda}{dt}$ — производная по времени t , а f — пластический потенциал, χ — индикатор пластического нагружения

$$\chi = \begin{cases} 0, & \text{если } f < 0 \text{ или } (f=0 \text{ и } Df \leq 0) \\ 1, & \text{если } (f=0 \text{ и } Df > 0) \end{cases}, \quad (6)$$

где $Df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \dot{\sigma}_{kl}$ — частичная производная по времени от пластического потенциала f ;

- 5) для пластического потенциала f принимается следующая модель, относящаяся к классу комбинированного нелинейного кинематического/изотропного упрочнения, но с различным упрочнением в областях растяжения-сжатия

$$f = f(I_1(\sigma), I_2(a), e_u^p), \quad (7)$$

где $I_1(\sigma)$ — первый инвариант тензора напряжений, $I_2(a)$ — второй инвариант приведенного тензора напряжений $a_{ij} = \sigma_{ij} - h_{ij}$, где h_{ij} — напряжения упрочнения, e_u^p — полная накопленная пластическая деформация, $\dot{e}_u^p$ — скорость ее накопления:

$$e_u^p = \int_0^t I_2(\dot{\varepsilon}_{ij}^p) d\tau, \quad \dot{e}_u^p \equiv I_2(\dot{\varepsilon}^p) = \sqrt{B_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{ij}^p \dot{\varepsilon}_{kl}^p}. \quad (8)$$

Для напряжений упрочнения h_{ij} принимаются кинетические уравнения, которые используются в классической модели АФКВ, но модифицированные тем, что параметры упрочнения в этой модели зависят от первого инварианта $I_1(\sigma)$ и тем самым различаются при растяжении и при сжатии:

$$\dot{h}_{ij} = H \dot{\varepsilon}_{kl}^p + \Phi_{ij} \dot{e}_u^p, \quad (9)$$

где H — параметр упрочнения, зависящий от $I_1(\sigma)$ и e_u^p

$$H = H_+ \chi_+(I_1(\sigma)) + H_- \chi_-(I_1(\sigma)). \quad (10)$$

Здесь H_+ , H_- — функции упрочнения при растяжении и сжатии, в общем случае, зависящие от e_u^p , а $\chi_+(I_1(\sigma))$ и $\chi_-(I_1(\sigma))$ — функции Хевисайда от первого инварианта тензора напряжений

$$\chi_+(X) = \begin{cases} 1, & \text{если } X \geq 0 \\ 0, & \text{если } X < 0 \end{cases}, \quad \chi_-(X) = 1 - \chi_+(X). \quad (11)$$

Для тензора Φ_{ij} принимается выражение, как в модели АФКВ, но модифицированное на случай различия свойств при растяжении - сжатии

$$\Phi_{ij} = H_2 \varepsilon_{ij}^p - H_1 h_{ij}, \quad (12)$$

где H_1 и H_2 — функции, в общем случае зависящие от e_u^p , а также и от первого инварианта тензора напряжений $I_1(\sigma)$, аналогично (1.13)

$$H_\alpha = H_{\alpha+} \chi_+(I_1(\sigma)) + H_{\alpha-} \chi_-(I_1(\sigma)), \quad \alpha = 1, 2. \quad (13)$$

Модель с пластическим потенциалом в модифицированной форме Друккера-Прагера. Конкретный вид пластического потенциала (7) выберем в модифицированной форме Друккера-Прагера [8,9], которая позволяет учесть зависимость поверхности пластичности от

растяжении-сжатия, за счет учета 1-го инварианта тензора напряжений

$$f = \frac{1}{2} I_2^2(a) + A_f I_1(\sigma) - B_f, \quad (14)$$

где коэффициенты A_f и B_f имеют вид

$$A_f = \frac{\sigma_{yC}^2 - \sigma_{yT}^2}{2(\sigma_{yC} + \sigma_{yT})}, \quad B_f = \frac{1}{4}(\sigma_{yC}^2 + \sigma_{yT}^2). \quad (15)$$

Здесь σ_{yT} , σ_{yC} — пределы текучести при растяжении и сжатии, полагаем их зависящими от накопленных пластических деформаций

$$\sigma_{yT} = \sigma_{yT}(e_u^p), \quad \sigma_{yC} = \sigma_{yC}(e_u^p). \quad (16)$$

Принимаются условия, которые наиболее часто реализуются для конструкционных материалов: $0 < \sigma_{yT} \leq \sigma_{yC}$, следовательно, $A_f > 0$, $B_f \geq 0$.

Для функций (16) примем следующие аналитические зависимости, по аналогии с моделями без учета зависимости пластических свойств от растяжения-сжатия [10,11]

$$\sigma_{yT,C}(e_u^p) = \sigma_{yT,C}^0 + (\sigma_{yT,C}^1 - \sigma_{yT,C}^0)(1 - \exp(-\beta_{pT,C} e_u^p)), \quad (17)$$

где σ_{yT}^0 , σ_{yT}^1 , β_{pT} и σ_{yC}^0 , σ_{yC}^1 , β_{pC} — материальные константы модели.

Вычислим производные от пластического потенциала (14), с учетом (1)

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{3}{2} p_{ij}(a) + A_f \delta_{ij} \equiv A_{ij}. \quad (18)$$

После подстановки выражения (18) в (5), получаем уравнение для скорости пластических деформаций

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \chi \dot{\lambda} A_{ij}. \quad (19)$$

Таким образом, предложенная модель содержит следующие материальные константы и функции:

$$\lambda_0, \mu_0, H_+, H_-, H_{1+}, H_{1-}, H_{2+}, H_{2-}, \quad (20)$$

$$\sigma_{yT}^0, \sigma_{yT}^1, \beta_{pT} \text{ и } \sigma_{yC}^0, \sigma_{yC}^1, \beta_{pC}.$$

Частичная производная Df , определяющая условие пластического деформирования, для потенциала (14) имеет вид

$$Df = A_{ij} \dot{\sigma}_{ij} \quad (21)$$

Выражение для параметра нагружения. Дифференцируем по времени пластический потенциал (14), тогда с учетом (18), получим

$$\frac{d}{dt} f = A_{ij} \dot{\sigma}_{ij} - \frac{3}{2} p_{ij}(a) \dot{h}_{ij} - f_e \dot{e}_u^p, \quad (22)$$

где обозначено

$$f_e = - \frac{\partial f}{\partial e_u^p}. \quad (23)$$

Из условия пластичности (6), получаем, что когда $\chi = 1$ должны выполняться условия

$$f = 0 \text{ и } \frac{d}{dt} f = 0. \quad (24)$$

Подставляя в это уравнение выражения (22), (9) и (12), приходим к следующему уравнению

$$A_{ij} \dot{\sigma}_{ij} - B_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p - C_e \dot{e}_u^p = 0, \quad (25)$$

где введены обозначения

$$B_{ij} = \frac{3}{2} p_{ij}(a) H, \quad C_e = \frac{3}{2} p_{ij}(a) (H_2 \varepsilon_{ij}^p - H_1 h_{ij}) + f_e. \quad (26)$$

После подстановки уравнения (19) в (26), получаем уравнение для параметра нагружения

$$A_{ij} \dot{\sigma}_{ij} - \Phi_1 \dot{\lambda} - C_e \dot{e}_u^p = 0, \quad (27)$$

где

$$\Phi_1 = A_{ij} B_{ij}. \quad (28)$$

Из (28) выражаем параметр нагружения

$$\dot{\lambda} = (A_{ij} \dot{\sigma}_{ij} - C_e \dot{e}_u^p) / \Phi_1. \quad (29)$$

Подставляя выражение (29) в (8), получаем соотношение между $\dot{e}_u^p$ и $\dot{\lambda}$

$$\dot{e}_u^p = \chi \gamma A_u \dot{\lambda}, \quad (30)$$

где введены обозначения

$$\gamma = \text{sign}(\dot{\lambda}), \quad A_u = \sqrt{B_{ijkl} A_{ij} A_{kl}}. \quad (31)$$

После подстановки выражения (30) в (29) получаем итоговое уравнение для параметра нагружения $\dot{\lambda}$

$$\dot{\lambda} = \chi \bar{A}_{ij} \dot{\sigma}_{ij}, \quad (32)$$

где обозначены

$$\bar{A}_{ij} = A_{ij} / \bar{\Phi}_1, \quad \bar{\Phi}_1 = \Phi_1 + C_e \gamma A_u. \quad (33)$$

Подставляя выражение (30) и (19) в (9), получаем уравнение для тензора упрочнения

$$\dot{h}_{ij} = \Phi_{ij}^p \dot{\lambda}, \quad (34)$$

где обозначено

$$\Phi_{ij}^p = A_{ij} H + (H_2 \varepsilon_{ij}^p - H_1 h_{ij}) \gamma A_u. \quad (35)$$

Система уравнений (32) и (34) рассматривается относительно $\dot{\lambda}$ и h_{ij} , и позволяет вычислить эти функции в зависимости от ε_{ij}^p и σ_{ij} . Эта система является нелинейной алгебраической относительно $\dot{\lambda}$ и дифференциальной относительно h_{ij} .

Определяющие соотношения и постановка задачи упруго-пластичности в скоростях. Подставляя выражение (32) в (19), получаем

$$\dot{\varepsilon}_{kl}^p = Q_{kl ij} \dot{\sigma}_{ij}, \quad (36)$$

где введен тензор 4-го ранга, связывающий скорости пластических деформаций и напряжений

$$Q_{ijkl} = \chi A_{ij} \bar{A}_{kl}. \quad (37)$$

Дифференцируя соотношение упругости (3) по времени и подставляя в него (36), получаем следующее соотношение, связывающее скорости полных деформаций со скоростями напряжений

$$\dot{\sigma}_{mp} = \tilde{C}_{mpkl} \dot{\varepsilon}_{kl}, \quad (38)$$

где обозначен

$$\tilde{C}_{mpkl} = T_{mpij}^{-1} C_{ijkl} \quad (39)$$

— приведенный тензор модулей упругости, а T_{ijuv}^{-1} — тензор обратный к тензору

$$T_{ijmn} = \Delta_{ijmn} + C_{ijkl} Q_{klmn}. \quad (40)$$

Приведенный тензор $\tilde{C}_{ijkl}$ зависит от пластических деформаций ε_{ij}^p , напряжений σ_{kl} , а также от $\dot{\lambda}$ и h_{ij} , в отличие от C_{ijkl} он несимметричен по парам индексов.

Подставляя соотношение (38) в (36), получаем соотношение между скоростями пластических деформаций и скоростями полных деформаций

$$\dot{\varepsilon}_{kl}^p = Y_{klmn} \dot{\varepsilon}_{mn}, \quad (41)$$

где введен тензор концентрации пластических деформаций

$$Y_{klij} = Q_{klmn} \tilde{C}_{mnij}. \quad (42)$$

Тензоры деформаций, пластических деформаций и напряжений вычисляются по известным скоростям этих тензоров следующим образом:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}(t) &= \varepsilon_{ij}(0) + \int_0^t \dot{\varepsilon}_{ij}(\tau) d\tau, \quad \varepsilon_{ij}^p(t) = \varepsilon_{ij}^p(0) + \int_0^t \dot{\varepsilon}_{ij}^p(\tau) d\tau, \\ \sigma_{ij}(t) &= \int_0^t \dot{\sigma}_{ij}(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (43)$$

Таким образом, общая система определяющих соотношений упруго-пластичности в рамках рассмотренной модели может быть представлена в скоростях в виде системы соотношений (32), (34) и (38), (41).

К этой системе присоединяются уравнения равновесия в скоростях

$$\nabla_i \dot{\sigma}_{ij} = 0, \quad x_i \in V, \quad (44)$$

в рассматриваемой области V , а также соотношения Коши в скоростях

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_i \dot{u}_j + \nabla_j \dot{u}_i), \quad x_i \in V \cup \Sigma, \quad (45)$$

граничные условия в скоростях на внешней поверхности Σ , области V

$$\dot{u}_i|_{\Sigma_u} = \dot{u}_{ei}, \quad n_i \dot{\sigma}_{ij}|_{\Sigma_\sigma} = \dot{S}_i, \quad (46)$$

где u_{ei} — компоненты заданного вектора перемещений, а S_{ei} — заданного вектора усилий, а также начальные условия

$$\begin{aligned} t=0: \quad \sigma_{ij} &= 0, \quad \varepsilon_{ij} = 0, \quad \varepsilon_{ij}^p = 0, \quad \dot{\varepsilon}_{ij}^p = 0, \quad u_j = 0, \\ h_{ij} &= 0, \quad \dot{\lambda} = 0, \quad x_i \in V \cup \Sigma. \end{aligned} \quad (47)$$

где $\nabla_i = \partial / \partial x_i$ — производные по координатам в ортонормированном базисе $\vec{e}_i$, Σ_u — часть поверхности, на которой задан вектор перемещений, а Σ_σ — часть поверхности, на которой задан вектор усилий.

Задача об одномерном растяжении-сжатии упругопластического тонкого стержня. Рассмотрим задачу об одномерного нагружении тонкого упругопластического стержня, когда напряженно-деформированное состояние можно считать содержащим по одной ненулевой продольной компоненте у тензора напряжений и деформаций, а поперечными деформациями можно пренебречь

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \sigma \neq 0, \text{ остальные } \sigma_{ij} \equiv 0, \\ \varepsilon_{11} &= \varepsilon \neq 0, \text{ остальные } \varepsilon_{ij} = 0, \\ \varepsilon_{11}^p &= \varepsilon^p \neq 0, \text{ остальные } \varepsilon_{ij}^p \equiv 0.\end{aligned}\tag{48}$$

В этом случае имеем: $I_1(\sigma) = \sigma$, $I_2(\sigma) = |\sigma|$, $p_{11}(\sigma) = \frac{2}{3}(\sigma - h)$.

Определяющие соотношения (32), (34) и (38), (41) в данном случае сводятся к следующей системе одномерных уравнений

$$\begin{aligned}\dot{\sigma} &= \tilde{C}_{1111}\dot{\varepsilon}, \quad \dot{\varepsilon}^p = Y_{1111}\dot{\varepsilon}, \\ \dot{h} &= A_{11}(H + \gamma_2(H_2\varepsilon^p - H_1h))\dot{\lambda}, \\ \dot{\lambda} &= \chi\bar{A}_{11}\dot{\sigma},\end{aligned}\tag{49}$$

где коэффициенты в этих уравнениях выражаются по формулам

$$\begin{aligned}\tilde{C}_{1111} &= T_{1111}^{-1}C_{1111}, \quad T_{1111} = 1 + \chi C_{1111}Q_{1111}, \\ Y_{1111} &= \chi Q_{1111}\tilde{C}_{1111}, \quad Q_{1111} = A_{11}\bar{A}_{11}, \\ \bar{A}_{11} &= A_{11} / \bar{\Phi}_1, \quad \bar{\Phi}_1 = \Phi_1 + C_e\gamma A_u, \quad A_u = |A_{11}|, \\ A_{11} &= \sigma - h + A_f, \quad \Phi_{11}^p = A_{11}H + (H_2\varepsilon^p - H_1h)\gamma A_u, \\ \Phi_1 &= A_{11}B_{11}, \quad B_{11} = (\sigma - h)H, \\ C_e &= (\sigma - h)(H_2\varepsilon^p - H_1h) + f_e, \quad f_e = \frac{\partial B_f}{\partial e_u^p} - \frac{\partial A_f}{\partial e_u^p} \sigma.\end{aligned}\tag{50}$$

Так как $\gamma = \gamma_1\gamma_2$, $\gamma = \text{sign}(\dot{\lambda})$, $\gamma_1 = \text{sign}(\bar{A}_{11})$, $\gamma_2 = \text{sign}(\dot{\sigma})$ и $\gamma_1 A_u = A_{11}$, то

$$\begin{aligned}\bar{A}_{11} &= ((\sigma - h)\bar{\Phi}_{11}^p + f_e\gamma_2)^{-1}, \\ \bar{\Phi}_1 &= A_{11}((\sigma - h)\bar{\Phi}_{11}^p + f_e\gamma_2), \quad \bar{\Phi}_{11}^p = H + \gamma_2(H_2\varepsilon^p - H_1h).\end{aligned}\tag{51}$$

Уравнение поверхности пластичности (14), (24) в данной задаче имеет вид

$$f = \frac{1}{2}(\sigma - h)^2 + A_f \sigma - B_f = 0. \quad (52)$$

Решение системы уравнений (45)-(48) осуществляется численно, с помощью неявной конечно-разностной схемы.

Примеры численного расчета. Были проведены расчеты циклических диаграмм деформирования $\sigma \sim \varepsilon$ для 3-х различных сталей. Нагружение рассматривалось в жестком режиме (при заданной циклической деформации: $\varepsilon = \varepsilon_{\max} \sin \omega t$). Проводилось сравнение результатов расчетов с экспериментальными диаграммами циклического деформирования, по результатам которого определялись материальные константы модели (20) из условий наилучшего совпадения экспериментальных циклических диаграмм с расчетными. Параметры упрочнения полагались константами, модуль упругости определялся E из табличных значений.

На рис. 1 показаны циклические диаграммы деформирования для высокопрочной стали 34CrNiMo6. Экспериментальные данные взяты из работы [34]. Число циклов нагружения составляло $n = 30$. Сталь 34CrNiMo6 является циклически разупрочняющимся материалом: пределы текучести при растяжении и сжатии для нее уменьшаются с накоплением циклических пластических деформаций. Учет в упруго-пластической модели различия пластических свойств при растяжении и сжатии позволяет более точно описать циклические диаграммы деформирования стали 34CrNiMo6. Были получены следующие значения материальных констант для этой стали:

$$\begin{aligned} E &= 210 \text{ ГПа}, \quad H_+ = 33 \text{ ГПа}, \quad H_- = 40 \text{ ГПа}, \quad H_{1+} = 265 \text{ ГПа}, \\ H_{1-} &= 200 \text{ ГПа}, \quad H_{2+} = 1508 \text{ ГПа}, \quad H_{2-} = 1311 \text{ ГПа}, \quad \sigma_{yT}^0 = 0.975 \text{ ГПа}, \\ \sigma_{yT}^1 &= 0.7 \text{ ГПа}, \quad \beta_{pT} = 2.5, \quad \sigma_{yC}^0 = 0.9 \text{ ГПа}, \quad \sigma_{yC}^1 = 0.6 \text{ ГПа}, \quad \beta_{pC} = 2.5. \end{aligned}$$

На рис. 2 показаны циклические диаграммы деформирования для низкопрочной стали S 275. Экспериментальные данные взяты из работы [35]. Число циклов нагружения составляло $n = 30$. Сталь S 275 является циклически упрочняющимся материалом: пределы текучести при растяжении и сжатии для нее возрастают с накоплением циклических пластических деформаций. Учет в упруго-пластической модели различия пластических свойств при растяжении и сжатии позволяет более точно описать циклические диаграммы деформирования стали S 275. Начальный и переменный пределы текучести при сжатии для этой стали больше, чем при растяжении, а константы

упрочнения, наоборот, меньше. Были получены следующие значения материальных констант для этой стали:

$$E = 214 \text{ ГПа}, H_+ = 20 \text{ ГПа}, H_- = 18 \text{ ГПа}, H_{1+} = 1986 \text{ ГПа}, \\ H_{1-} = 753 \text{ ГПа}, H_{2+} = 1497 \text{ ГПа}, H_{2-} = 1302 \text{ ГПа}, \sigma_{yT}^0 = 0.311 \text{ ГПа}, \\ \sigma_{yT}^1 = 0.35 \text{ ГПа}, \beta_{pT} = 2.5, \sigma_{yC}^0 = 0.36 \text{ ГПа}, \sigma_{yC}^1 = 0.4 \text{ ГПа}, \beta_{pC} = 2.5.$$

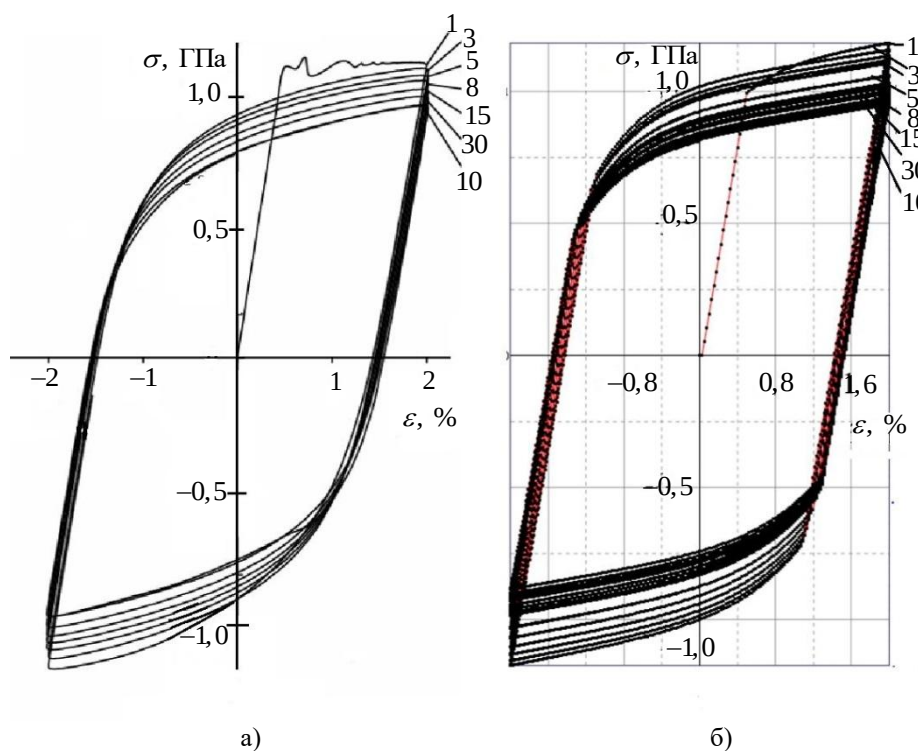


Рис. 1. Сравнительные диаграммы циклического деформирования стали 34CrNiMo6: а) — эксперимент [34], б) — расчет по предложенной модели

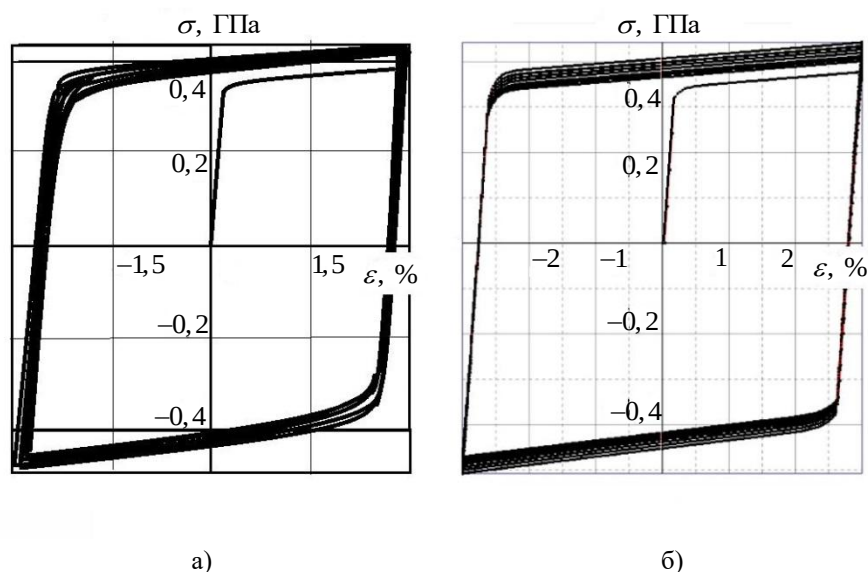


Рис. 2. Сравнительные диаграммы циклического деформирования стали S 275:
а) — эксперимент [35], б) — расчет по предложенной модели

На рис. 3 показаны циклические диаграммы деформирования для средне-прочной стали S 460. Экспериментальные данные взяты из работы [35]. Число циклов нагружения составляло $n = 30$. Сталь S 460 является циклически упрочняющимся материалом: пределы текучести при растяжении и сжатии для нее, так же как и для стали S 275, возрастают с накоплением циклических пластических деформаций, но в отличие от этой для стали S 460 растяжение и сжатие влияют на пластические свойства в другом соотношении: начальный и переменный пределы текучести при растяжении для этой стали больше, чем при сжатии, а константы упрочнения, наоборот, меньше. Были получены следующие значения материальных констант для этой стали S 460:

$$\begin{aligned}
 E &= 205 \text{ ГПа}, \quad H_+ = 20 \text{ ГПа}, \quad H_- = 40 \text{ ГПа}, \quad H_{1+} = 1200 \text{ ГПа}, \\
 H_{1-} &= 1300 \text{ ГПа}, \quad H_{2+} = 1506 \text{ ГПа}, \quad H_{2-} = 1297 \text{ ГПа}, \quad \sigma_{yT}^0 = 0.487 \text{ ГПа}, \\
 \sigma_{yT}^1 &= 0.5 \text{ ГПа}, \quad \beta_{pT} = 2, \quad \sigma_{yC}^0 = 0.3 \text{ ГПа}, \quad \sigma_{yC}^1 = 0.35 \text{ ГПа}, \quad \beta_{pC} = 2.
 \end{aligned}$$

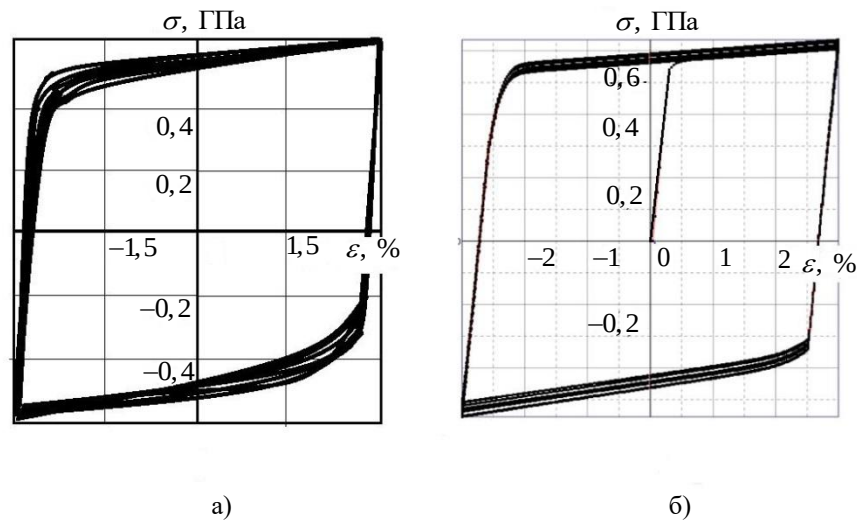


Рис. 3. Сравнительные диаграммы циклического деформирования стали S 460:
а) — эксперимент [35], б) — расчет по предложенной модели

Критерий длительной прочности упруго-пластических материалов, разносопротивляющихся растяжению-сжатию. Следуя общей теории накопления дисперсных повреждений [23,36], положим, что локальное разрушение изотропного упруго-пластического материала в некоторой точке конструкции наступает, когда впервые в момент времени t_* выполняется условие

$$z(t_*) = 1, \quad (53)$$

где $z(t)$ — некоторый параметр повреждаемости.

Параметр повреждаемости $z(t)$ выберем согласно модифицированному «химическому критерию» [32] длительной и усталостной прочности, в основе которого лежит концепция разрушения материала при достижении химическим термодинамическим потенциалом [27] предельного значения. Модифицирование «химического» критерия заключается в том, что для упругопластических материалов параметр повреждаемости выбираем состоящим из 3-х слагаемых

$$z(t) = z_0 + z_p(t) + z_r(t), \quad (54)$$

где z_0 — мгновенная часть повреждений, описывающая условно мгновенную прочность материала, не зависящую от длительности и истории действия напряжений; $z_p(t)$ — необратимая часть накопления повреждений, которая возникает при относительно кратковременно действующем большом уровне напряжений, при котором воз-

никают пластические деформации; $z_r(t)$ — обратимая часть повреждений, которая описывает накопление повреждений при длительно действующих напряжениях в упругой области, в том числе переменных напряжениях (т.е. явление усталости), но без длительного «отдыха», на этапах отдыха, когда нет нагрузок, эта часть повреждений постепенно залечивается и стремится к нулю.

Модель мгновенных повреждений. Для изотропных материалов мгновенная часть повреждений z_0 — выбирается согласно «трехповерхностной модели» статической прочности, предложенной в работе [32]

$$z_0 = \frac{\sigma_u^2}{3\sigma_s^2(1+B_C V(\sigma))} + \frac{\sigma_+^2}{\sigma_{T+}^2}, \quad (55)$$

здесь обозначены инварианты тензора напряжений: $\sigma = I_1(\sigma)$ — первый, $\sigma_{\pm} = \frac{1}{2}(|\sigma| \pm \sigma)$ — знакопостоянные инварианты, а $\sigma_u = I_2(\sigma)$ — второй инвариант.

В выражении (55) введены также обозначения для σ_T , σ_C , σ_S — пределов мгновенной прочности при растяжении, сжатии и сдвиге, которые связаны между собой следующими соотношениями: $\sigma_C \geq \sqrt{3}\sigma_S \geq \sigma_T > 0$. Константы B_C и σ_{T+} (предел прочности при всестороннем растяжении) выражаются через пределы статической прочности при растяжении, сжатии и сдвиге

$$B_C = \left(\frac{\sigma_C^2}{3\sigma_S^2} - 1 \right) \frac{1}{\sigma_C}, \quad \sigma_{T+} = \left(\frac{1}{\sigma_T^2} - \frac{1}{3\sigma_S^2} \right)^{-1/2}. \quad (56)$$

Функция $V(\sigma)$ в выражении (55) описывает гладкий переход накопления микро-повреждений между областями растяжения и сжатия:

$$V(\sigma) = \begin{cases} 0, & \text{если } \sigma > 0 \\ -\sigma, & \text{если } -\sigma_C < \sigma < 0. \\ \sigma_C & \text{если } \sigma < -\sigma_C \end{cases} \quad (57)$$

Модель (55) с учетом (57) позволяет учитывать эффект различия накопления повреждений в области растяжения и сжатия, который характерен для большинства материалов.

Модель накопления необратимых повреждений в области пластических деформаций. Для необратимой части повреждений в

области пластических деформаций $z_p(t)$ примем модель, согласно которой повреждения накапливаются одновременно с накоплением пластических деформаций, но различным образом в области растяжения и сжатия:

$$\begin{aligned} z_p(t) &= K_p^+(e_{u+}^p)^{\beta^+} + K_p^-(e_{u-}^p)^{\beta^-}, \\ e_{u\pm}^p &= \int_0^t I_2(\dot{\varepsilon}^p(\tilde{t})) \chi_{\pm}(I_1(\sigma(\tilde{t}))) d\tilde{t}. \end{aligned} \quad (58)$$

Здесь K_p^+ , K_p^- , β^+ , β^- — константы модели, $\tilde{t}$ — переменная интегрирования по времени, а $e_{u\pm}^p$ — накопленные пластические деформации в области растяжения и сжатия, соответственно.

Метод двухмасштабного времени для упругопластического деформирования тел при циклических нагружениях. Рассмотрим случай циклического изменения внешних нагрузок, действующих на рассматриваемое упруго-пластическое тело, т.е. полагаем, что функции заданные на границе тела перемещения u_{ei} и вектор напряжений S_{ei} являются периодическими по времени

$$\Omega(t) = \Omega(t + t_p), \quad \Omega = \{u_{ei}, S_{ei}\}, \quad (59)$$

где t_p — период цикла колебаний. Будем рассматривать задачи, при которых в теле реализуется нагружение с большим числом циклов $n_{\max}$ упруго-пластических колебаний, т.е. $n_{\max} \gg 1$. Тогда можно ввести два масштаба процессов циклического деформирования упруго-пластических тел [32]: «быстрое» время τ , которое соответствует изменению истинного времени t в пределах одного цикла колебаний t_p , и «медленное» время, которое соответствует изменениям истинного времени t в пределах максимального числа циклов колебаний $t_{\max} = n_{\max} t_p$:

$$\tau = \frac{t}{t_p}, \quad \bar{t} = \frac{t}{t_{\max}}, \quad (60)$$

а также ввести малый параметр

$$\varkappa = \frac{t_p}{t_{\max}} = \frac{1}{n_{\max}} \ll 1, \quad (61)$$

с помощью которого быстрое время можно представить в следующем виде $\tau = \bar{t} / \varkappa$.

Периодические граничные функции (59) можно рассматривать как 1-периодические функции от быстрого времени: $\Omega(\tau) = \Omega(\tau + 1)$, $\Omega = \{u_{ei}, S_{ei}\}$.

Основное дополнительное допущение для предложенной выше модели циклического деформирования упруго-пластической среды при циклическом нагружении вида (59) состоит в том, напряжения, деформации и перемещения, являющиеся решением задачи (32), (34) и (38), (41), (44)-(47), можно искать в виде асимптотических разложений функций от малому параметру $\varkappa$, в которых все члены разложений являются функциями двухмасштабного времени, т.е.

$$W(x_i, t) = W^0(x_i, \tau, \bar{t}) + \varkappa W^1(x_i, \tau, \bar{t}) + \varkappa^2 \dots, \quad (62)$$

$$x_i \in V, \quad \tau \in [0, 1], \quad \bar{t} \in [0, 1], \quad W = \{u_i, \varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, \sigma_{ij}\}.$$

Дифференцирование функций двухмасштабного времени осуществляем по правилам дифференцирования сложных функций

$$\dot{W} = W_{;t} + \frac{1}{\varkappa} W_{;\tau}, \quad (63)$$

где обозначены производные: $\dot{W} = \frac{\partial W}{\partial t}$, $W_{;t} = \frac{\partial W}{\partial \bar{t}}$, $W_{;\tau} = \frac{\partial W}{\partial \tau}$.

Подставляя в (62) разложение (63), получаем асимптотическое разложение для производных по времени

$$\dot{W} = \frac{1}{\varkappa} W_{;\tau}^0 + W_{;t}^0 + W_{;\tau}^1 + \varkappa (W_{;t}^1 + W_{;\tau}^2) + \varkappa^2 \dots \quad (64)$$

Подставляя разложения (62) и (64) в задачу (32), (34) и (38), (41), (44)-(47), после приравнивания к нулю слагаемых при одинаковых степенях от малого параметра, получаем следующую рекуррентную последовательность задач упруго-пластичности:

1) задача при $\varkappa^{-1}$:

$$\begin{aligned}
 \nabla_i \sigma_{ij;\tau}^0 &= 0; \\
 \sigma_{ij;\tau}^0 &= \tilde{C}_{ijkl}^0 \varepsilon_{kl;\tau}^0, \quad \varepsilon_{kl;\tau}^{p0} = Y_{klij}^0 \varepsilon_{ij;\tau}^0; \\
 \lambda_{;\tau}^0 &= A_{ij}^{\varepsilon 0} \varepsilon_{ij;\tau}^0, \quad \dot{h}_{ij;\tau}^0 = \Phi_{ij}^{h0} - \Phi^{h0} h_{ij}^0, \quad e_{u;\tau}^{p0} = I_2(\varepsilon_{ij;\tau}^{p0}); \\
 \varepsilon_{ij;\tau}^0 &= \frac{1}{2}(\nabla_i u_{j;\tau}^0 + \nabla_j u_{i;\tau}^0); \\
 u_{i;\tau}^0 \Big|_{\Sigma_u} &= u_{ei;\tau}, \quad n_i \sigma_{ij;\tau}^0 \Big|_{\Sigma_\sigma} = S_{ei;\tau}; \\
 [u_{i;\tau}^0] &= 0, \quad n_i [\sigma_{ij;\tau}^0] = 0; \\
 \tau = 0: \quad \sigma_{ij}^0 &= 0, \quad \varepsilon_{ij}^0 = 0, \quad \varepsilon_{ij}^{p0} = 0, \quad u_j^0 = 0, \quad \varepsilon_{u\pm}^{p0} = 0;
 \end{aligned} \tag{65}$$

2) задача при $\varkappa^0$:

$$\begin{aligned}
 \nabla_i \sigma_{ij;\tau}^1 + \nabla_i \sigma_{ij;t}^0 &= 0; \\
 \sigma_{ij;\tau}^1 + \sigma_{ij;t}^0 &= \tilde{C}_{ijkl}^0 (\varepsilon_{kl;\tau}^1 + \varepsilon_{kl;t}^0) + \tilde{C}_{ijkl}^1 \varepsilon_{kl;\tau}^0; \\
 \varepsilon_{kl;\tau}^{p1} + \varepsilon_{kl;t}^{p0} &= Y_{klij}^0 (\varepsilon_{ij;\tau}^1 + \varepsilon_{ij;t}^0) + Y_{klij}^1 \varepsilon_{ij;\tau}^0; \\
 \lambda_{;\tau}^1 + \lambda_{;t}^0 &= A_{ij}^{\varepsilon 0} (\varepsilon_{ij;\tau}^1 + \varepsilon_{ij;t}^0) + A_{ij}^{\varepsilon 1} \varepsilon_{ij;\tau}^0; \\
 h_{ij;\tau}^1 + h_{ij;t}^0 &= \Phi_{ij}^{h1} - \Phi^{h1} h_{ij}^0 - \Phi^{h0} h_{ij}^1; \\
 \varepsilon_{ij;\tau}^1 + \varepsilon_{ij;t}^0 &= \frac{1}{2}(\nabla_i u_{j;\tau}^1 + \nabla_j u_{i;\tau}^1 + \nabla_i u_{j;t}^0 + \nabla_j u_{i;t}^0); \\
 (u_{i;\tau}^1 + u_{i;t}^0) \Big|_{\Sigma_u} &= 0, \quad n_i (\sigma_{ij;\tau}^1 + \sigma_{ij;t}^0) \Big|_{\Sigma_\sigma} = 0; \\
 [u_{i;\tau}^1 + u_{i;t}^0] &= 0, \quad n_i [\sigma_{ij;\tau}^1 + \sigma_{ij;t}^0] = 0; \\
 \tau = 0: \quad \sigma_{ij}^1 &= 0, \quad \varepsilon_{ij}^1 = 0, \quad \varepsilon_{ij}^{p1} = 0, \quad u_j^1 = 0, \quad \varepsilon_{u\pm}^{p1} = 0;
 \end{aligned} \tag{66}$$

и т.д. при более высоких степенях $\varkappa$.

Для тензоров $\Pi = \{\tilde{C}_{mpkl}, Y_{klij}, A_{ij}^\varepsilon, \Phi_{ij}^h, \Phi^h\}$, зависящих от пластических деформаций и напряжений, после подстановки в них разложений (62) также получаем асимптотические разложения вида (62), в которых Π^0 и Π^1 , соответственно, это нулевые и первые члены этих разложений, причем

$$\begin{aligned}
 \Pi^0 &= \Pi(\sigma_{mn}^0, \varepsilon_{sq}^{p0}, e_u^{p0}, h_{ij}^0, \lambda_{;\tau}^0), \quad \Pi = \{\tilde{C}_{mpkl}, Y_{klij}, A_{ij}^\varepsilon, \Phi_{ij}^h, \Phi^h\}, \\
 \Pi^1 &= \Pi^1(\sigma_{mn}^0, \varepsilon_{sq}^{p0}, e_u^{p0}, h_{ij}^0, \lambda_{;\tau}^0, \sigma_{mn}^1, \varepsilon_{sq}^{p1}, e_u^{p1}, h_{ij}^1, \lambda_{;\tau}^1).
 \end{aligned} \tag{67}$$

Функции (67) в отличие от граничных функций (59) не обязательно являются 1-периодическими по быстрому времени τ , но в соответствии с основным допущением предлагаемой модели, полагаем, что при переходе от одного периода колебаний к следующему перио-

ду неперриодичность этих функций мало меняется, т.е. является функцией медленного времени, поэтому решение задачи в нулевом приближении – функции $\{\Pi^0, \varepsilon_{ij}^0, u_j^0\}$ зависят как от быстрого времени τ , так и от медленного времени $\bar{t}$.

Для получения решения задачи упруго-пластичности с точностью до $\varkappa$ достаточно рассмотреть только задачу в нулевом приближении (65). Если решение этой задачи неперриодично, то необходимо ее решение для различных моментов медленного времени.

Модель малоциклового усталости. Модель малоциклового усталости строим при следующих допущениях и предположениях:

1) циклическое деформирование осуществляется в пластической области, при этом неперриодичностью функций $\{\Pi^0, \varepsilon_{ij}^0, u_j^0\}$, являющихся решением задачи (65), можно пренебречь, т.е. функции $\{\Pi^0, \varepsilon_{ij}^0, u_j^0\}$ полагаются зависящими только от быстрого времени τ и 1-периодическими по τ ;

2) обратимые повреждения $z_r(t)$ за число циклов малоциклового нагружения не успевают сильно развиться и ими можно пренебречь по сравнению с мгновенными повреждениями z_0 и необратимыми повреждениями $z_p(t)$, т.е.

$$z(t) = z_0 + z_p(t). \quad (68)$$

Используя эти допущения 1), 2), подставим асимптотические разложения (62) в выражения (55) и (58) для параметров z_0 и $z_p(t)$, и ограничимся только удержанием главных членов в этих разложениях.

Применим теорему [32] об интегрировании квази-периодических функций: интегралы в формулах (58) могут быть представлены в следующем виде:

$$\int_0^t \dot{e}_u^p(\tilde{t}) \chi_{\pm}(I_1(\sigma(\tilde{t}))) d\tilde{t} = \bar{t} \langle \langle \dot{e}_u^p \chi_{\pm} \rangle \rangle + O(\varkappa), \quad (69)$$

т.е. «медленное» и «быстрое» времена считаются независимыми, а $O(\varkappa)$ означает члены, имеющие величину малого порядка $\varkappa$ по сравнению с первыми членами в (58). Здесь введено осреднение по быстрому времени

$$\langle \langle f \rangle \rangle = \int_0^1 f(\tau) d\tau. \quad (70)$$

Черту сверху далее над медленным временем опускаем.

Тогда выражение (58) для параметра повреждаемости можно представить в следующем виде

$$z_p(\bar{t}) = K_p^+(\bar{t} \langle \dot{\epsilon}_u^p \chi_+ \rangle)^{\beta_+} + K_p^-(\bar{t} \langle \dot{\epsilon}_u^p \chi_- \rangle)^{\beta_-}. \quad (71)$$

Подставляя (71) в (68), а затем в (53), получаем критерий малоциклового усталости

$$z(\bar{t}_*) = \frac{(\sigma_{u,\max})^2}{3\sigma_s^2} + \frac{(\sigma_{+, \max})^2}{\sigma_{T+}^2} + K_p^+(\bar{t} \langle \dot{\epsilon}_u^p \chi_+ \rangle)^{\beta_+} + K_p^-(\bar{t} \langle \dot{\epsilon}_u^p \chi_- \rangle)^{\beta_-} = 1, \quad (72)$$

где $\bar{t}_*$ — время до разрушения, $\sigma_{u\max} = \max \sigma_u$, $\sigma_{+\max} = \max \sigma_+$ максимальные значения инвариантов σ_u и σ_+ в цикле колебаний.

Полученный критерий имеет сходство с критерием малоциклового усталости Мэнсона-Коффина [37], который содержит аддитивным образом накопления повреждаемости за счет мгновенно-упругой части и пластических деформаций. Первые два слагаемых в (72) соответствуют накоплению повреждаемости за счет мгновенно-упругой нагружения, а вторые два слагаемые соответствуют накоплению повреждаемости за счет накопления пластических деформаций. Зависимость от числа циклов в критерии Мэнсона-Коффина связана с амплитудой пластической деформации степенной функцией. В критерии (72) медленное время, которое фактически является числом циклов, связано с накопленными пластическими деформациями также в виде степенной функции. Однако эта степенная зависимость в критерии (72) является более сложной, и она различна для областей растяжения и сжатия.

Пример численного моделирования. Рассматривался случай одномерного циклического растяжения-сжатия упруго-пластического стержня в жестком режиме деформирования. Расчет упруго-пластических диаграмм деформирования по предложенной модели представлен выше. Далее рассчитывались значения параметра повреждаемости $z(\bar{t})$ согласно критерию усталостной прочности (72) при различных значениях максимальной деформации в цикле $\epsilon_{\max}$, в результате была вычислена функция $z(\bar{t}, \epsilon_{\max}; R)$, где $R = \{K_p^+, \beta^+, K_p^-, \beta^-\}$ — набор материальных констант модели. Из условия $z(\bar{t}_*, \epsilon_{\max}; R) = 1$ получаем зависимость предельного значения числа циклов $\bar{t}_*$ до разрушения с $\epsilon_{\max}$, т.е. функцию $\epsilon_{\max} = f_d(\bar{t}_*; R)$. Из условия наилучшего совпадения данной функции с кривой малоциклового усталости $\epsilon_{\max} = f_d^{(3)}(\bar{t}_*)$ определялись константы R . Для сплава 34CrNiMo6 с помощью предложенного алгоритма были найдены следующие значения:

$$K_p^+ = 0.00593, K_p^- = 0.00497,$$

$$\beta^+ = 1.175, \beta^- = 0.952, \sigma_T = 1.25 \text{ ГПа}.$$

На рис. 4 показаны экспериментальная [34] и расчетная кривые малоциклового усталости сплава 34CrNiMo6, медленное время $\bar{t}^*$ было выбрано совпадающим с числом циклов усталостного разрушения.

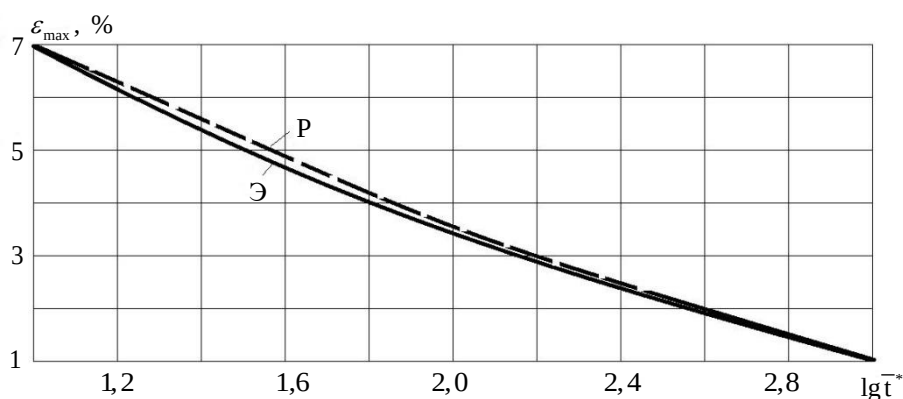


Рис. 4. Экспериментальная (Э) [34] и расчетная (Р) кривые малоциклового усталости сплава 34CrNiMo6

Для сплава S 275 с помощью предложенного алгоритма были найдены следующие значения:

$$K_p^+ = 0.0938, K_p^- = 0.0891,$$

$$\beta^+ = 0.462, \beta^- = 0.395, \sigma_T = 0.58 \text{ ГПа}.$$

На рис. 5 показаны экспериментальная [35] и расчетная кривые малоциклового усталости сплава S 275, полученная с помощью разработанного алгоритма.

Проведенные вычисления показывают, что предложенная модель малоциклового усталости позволяет достаточно хорошо аппроксимировать экспериментальные данные при одноосном симметричном циклическом нагружении и может служить основой для решения задач прогнозирования долговечности элементов конструкций из упруго-пластических материалов при циклических нагружениях.

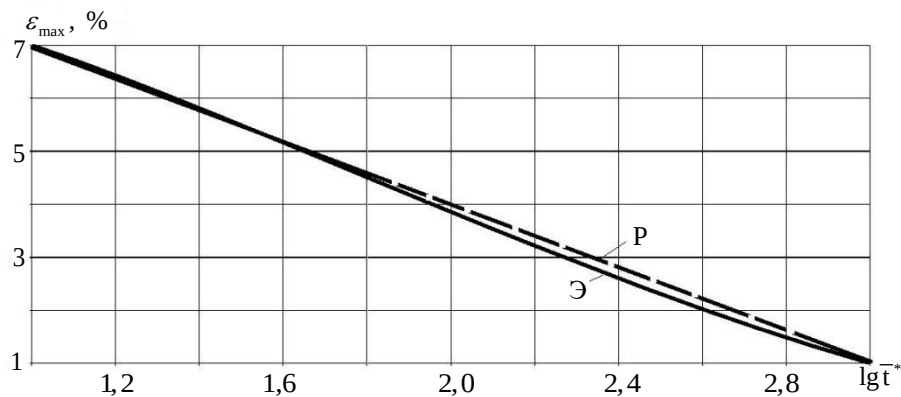


Рис. 5. Экспериментальная (Э) [35] и расчетная (Р) кривые малоциклового усталости сплава S245

Выводы. Предложена модель упругопластического деформирования и усталости изотропных материалов, разнсопротивляющихся растяжению-сжатию. Модель является развитием определяющих соотношений теории пластического течения с комбинированным изотропным – кинематическим упрочнением на основе модели АФКВ и пластического потенциала типа Друккера-Прагера. Сформулирована постановка задачи упругопластичности в скоростях. Предложен метод обоснования постановки задачи упругопластичности при циклических нагружениях, основанный на асимптотических разложениях и введении двух масштабов времени. Предложена модель малоциклового усталости для материалов, разнсопротивляющихся растяжению-сжатию. Рассмотрен пример численного решения одномерной задачи упругопластического деформирования и малоциклового колебаний при циклических нагружениях. Показано, что предложенная модель достаточно хорошо аппроксимирует кривые симметричного циклического деформирования сталей 34CrNiMo6, S 275 и S 460, а также соответствующие им кривые малоциклового усталости.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ильюшин А.А. *Пластичность. Упруго–пластические деформации.* Москва, УРСС, 2018, 392 с.
- [2] Ильюшин А.А. *Пластичность: основы общей математической теории.* Москва, УРСС, 2020, 270 с.
- [3] Ильюшин А.А., Ленский В.В. *Сопротивление материалов.* Москва, Физматлит, 1959, 372 с.
- [4] Москвитин В.В. *Циклические нагружения элементов конструкций.* Москва, УРСС, 2019, 344 с.
- [5] Кадашев Ю. И., Новожилов В. В. Теория пластичности, учитывающая остаточные микронапряжения. *Известия РАН. Механика твердого тела*, 1981, № 5, с. 99–110.

- [6] Кадашевич Ю.И. О различных тензорно-линейных соотношениях в теории пластичности. *Исследования по упругости и пластичности*, 1967, вып. 6, с. 39–45.
- [7] Ишлинский А.Ю. Общая теория пластичности с линейным упрочнением. *Украинский математический журнал*, 1954, т. 6, вып. 3, с. 314–324.
- [8] Drucker D.C. Relation of experiments to mathematical theories of plasticity. *Journal of Applied Mechanics*, 1949, vol. 16, 349–357.
- [9] Prager W. A new method of analyzing stresses and strains in work hardening plastic solids. *Journal of Applied Mechanics*. 1956, vol. 23, pp. 493–496.
- [10] Бондарь В.С., Даншин В.В. *Пластичность. Пропорциональные и непропорциональные нагружения*. Москва, Физматлит, 2008, 176 с.
- [11] Бондарь В.С. *Неупругость. Варианты теории*. Москва, Физматлит, 2004, 144 с.
- [12] Бондарь В.С., Бурчаков С.В., Даншин В.В. Математическое моделирование процессов упругопластического деформирования и разрушения материалов при циклических нагружениях. *Проблемы прочности и пластичности*, 2010, вып. 72, с. 18–27.
- [13] Зубчанинов В.Г. *Математическая теория пластичности*. Тверь, ТГТУ, 2002, 300 с.
- [14] Митенков Ф.М., Волков И.А., Игумнов Л.А., Каплиенко А.В., Коротких Ю.Г., Панов В.А. *Прикладная теория пластичности*. Москва, Физматлит, 2015, 284 с.
- [15] Armstrong, P.J., Frederick C.O. A mathematical representation of the multiaxial Bauschinger effect. *CEGB Report No. RD/B/N 731. Materials at High Temperatures*, 1966, vol. 24, pp. 1–26.
- [16] Chaboche J.L. On some modifications of kinematic hardening to improve the description of ratchetting effects. *International Journal of Plasticity*, 1991, vol. 7, pp.661–678.
- [17] Chaboche J.L. Modeling of ratchetting: evaluation of various approaches. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 1994, vol. 13, no. 4, pp. 501–518.
- [18] Chaboche J.L., Nouailhas D., Pacou D., Paulmier P. Modeling of the cyclic response and ratchetting effects on inconel-718 alloy. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 1991, vol. 10, no. 1, pp.101–121.
- [19] Abdel-Karim M. Modified kinematic hardening rules for simulations of ratchetting. *International Journal of Plasticity*, 2009, vol. 25, no. 8, pp. 1560–1587.
- [20] Романов А.Н. Энергетические критерии разрушения при малоцикловом нагружении. *Проблемы прочности*, 1974, № 1, с. 3–10.
- [21] Hill R. *The mathematical theory of plasticity*. Oxford, Oxford University Press, 1950, 407 p.
- [22] Радаев Ю.Н. *Пространственная задача математической теории пластичности: Учебное пособие*. Самара, Издательство «Самарский университет», 2004, 142 с.
- [23] Бондарь В.С., Даншин В.В., Макаров Д.А. Математическое моделирование процессов деформирования и накопления повреждений при циклических нагружениях. *Вестник ПНИПУ*, 2014, № 2, с. 125–152.
- [24] Димитриенко Ю. И., Юрин Ю. В., Сборщиков С. В. *Многомасштабное моделирование упругопластических композиционных материалов*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2024, 228 с.
- [25] Димитриенко Ю.И., Сборщиков С.В., Димитриенко А.Ю., Юрин Ю.В. Микроструктурная модель деформационной теории пластичности квазиизотропных композиционных материалов. *Математическое моделирование и численные методы*, 2021, № 4, с. 17–44.

- [26] Димитриенко Ю.И., Черкасова М.С., Димитриенко А.Ю. Микроструктурная модель анизотропной теории течения для упруго-пластических слоистых композитов. *Математическое моделирование и численные методы*, 2022, № 3, с. 47–70.
- [27] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. Т. 1. Тензорный анализ*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011, 367 с.
- [28] Быков Д. Л. *О некоторых соотношениях между инвариантами напряжений и деформаций в физически нелинейных средах. Упругость и неупругость*. Москва, Изд-во Моск. ун-та, 1971, вып. 2, с. 114–128.
- [29] Быков Д.Л., Пелешко В.А. Определяющие соотношения деформирования, анизотропной деградации и разрушения наполненных полимерных материалах в процессах преобладающего растяжения с изменяющимся направлением оси и отдыхами. *Известия РАН. Механика твердого тела*, 2009, т. 44, № 5, с. 59–67.
- [30] Ломакин Е.В., Королькова О.П. Задачи механики разрушения тел, свойства которых чувствительны к виду напряженного состояния, для условий продольного сдвига. *Математическое моделирование в естественных науках*, 2023, т. 1, с. I–IV.
- [31] Федоренко А.Н., Федулов Б.Н., Ломакин Е.В. Задача потери устойчивости тонкостенных конструкций из композиционных материалов, свойства которых зависят от типа нагружения. *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*, 2019, № 3, с. 104–111.
- [32] Димитриенко Ю.И., Димитриенко А.Ю. «Химический» критерий для моделирования усталостной долговечности материалов, разносопротивляющихся растяжению-сжатию. *Математическое моделирование и численные методы*, 2024, № 3, с. 18–42.
- [33] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды: учебное пособие: в 4 томах. Т. I. Тензорный анализ*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011, 463 с.
- [34] Branco R., Costa J. D. M., Antunes F.V., Perdigão S. Monotonic and cyclic behavior of DIN 34CrNiMo6 tempered alloy steel. *Metals*, 2016, vol. 6, 98, pp. 1–14.
- [35] Versaillot P.D. *Effect of Cyclic Loading on the mechanical properties of steel*. Dissertation. Romania, Universitatea Politehnica Timisoara, 2017, 172 p.
- [36] Ильюшин А.А., Победра Б.Е. *Основы математической теории термовязкоупругости*. Москва, Наука, 1970, 282 с.
- [37] Manson S.S. *Behaviour of materials under conditions of thermal stress*. National Advisory Committee for Aeronautics. Technical Note 2933. Ohio, Lewis Flight Propulsion Laboratory Cleveland, 1954, 106 p.

Статья поступила в редакцию 18.12.2025

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Димитриенко А.Ю. Модель циклического деформирования и усталости упруго-пластических материалов, разносопротивляющихся растяжению-сжатию. *Математическое моделирование и численные методы*, 2026, № 1, с. 140–164.

Димитриенко Александр Юрьевич — аспирант кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: sasha.dimit@mail.ru

A model of cyclic deformation and fatigue of elastic-plastic materials with different resistance in tension and compression

© A.Yu. Dimitrienko

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

A model of elastic-plastic deformation of materials with different resistance to tension and compression is proposed. The model is a modification of the Armstrong–Frederick–Kadashevich–Bondar model for the case of differences in elastic-plastic properties under tension and compression. This difference is taken into account using the dependence of the hardening parameters and yield strengths on the first invariant of the stress tensor. A statement of the problem of the theory of plastic flow in velocities for materials with different resistance to tension and compression is formulated. A method for justifying the statement of the problem of cyclic deformation of elastic-plastic materials with different resistance is proposed. The method is based on asymptotic expansions and the introduction of two time scales. A criterion for low-cycle fatigue of materials with different resistance is proposed. An example of a numerical solution to the problem of cyclic deformation of elastic-plastic materials is considered. It is shown that the developed model describes the cyclic deformation curves of 34CrNiMo6, S275b, and S460 steels, as well as the corresponding low-cycle fatigue curves, quite well.

Keywords: plasticity, fatigue, cyclic deformation, tension-compression, flow theory, asymptotic expansions

REFERENCES

- [1] Ilyushin A.A. *Plastichnost'. Uprugo-plasticheskie deformacii* [Plasticity. Elastic-plastic deformations]. Moscow, URSS, 2018, 392 p.
- [2] Ilyushin A.A. *Plastichnost': osnovy obshchej matematicheskoy teorii* [Plasticity: Fundamentals of General Mathematical Theory]. Moscow, URSS, 2020, 270 p.
- [3] Ilyushin A.A., Lensky V.V. *Soprotivlenie materialov* [Resistance of materials]. Moscow, Fizmatlit Publ., 1959, 372 p.
- [4] Moskvitin V.V. *Ciklicheskie nagruzheniya elementov konstrukcij* [Cyclic loading of structural elements]. Moscow, URSS, 2019, 344 p.
- [5] Kadashevich Yu. I., Novozhilov V. V. *Teoriya plastichnosti, uchityvayushchaya ostatochnye mikronapryazheniya*. [Theory of plasticity taking into account residual microstresses]. *Mechanics of Solids*, 1981, no. 5, pp. 99–110.
- [6] Kadashevich Yu.I. O razlichnyh tenzorno-linejnyh sootnosheniyah v teorii plastichnosti [On various tensor-linear relations in the theory of plasticity]. *Issledovaniya po uprugosti i plastichnosti* [Studies in elasticity and plasticity], 1967, iss. 6, pp. 39–45.
- [7] Ishlinsky A. Yu. General theory of plasticity with linear hardening. *Ukrainian Mathematical Journal*, 1954, vol. 6, iss. 3, pp. 314–324.
- [8] Drucker D.C. Relation of experiments to mathematical theories of plasticity. *Journal of Applied Mechanics*, 1949, vol. 16, 349–357.
- [9] Prager W. A new method of analyzing stresses and strains in work hardening plastic solids. *Journal of Applied Mechanics*. 1956, vol. 23, pp. 493–496.

- [10] Bondar V.S., Danshin V.V. *Plastichnost'. Proporcional'nye i neproporcional'nye nagruzheniya* [Plasticity. Proportional and disproportionate loads]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2008, 176 p.
- [11] Bondar V.S. *Neuprugost'. Varianty teorii* [Inelasticity. Theory variants]. Moscow, Fizmatlit, 2004, 144 p.
- [12] Bondar V.S., Burchakov S.V., Danshin V.V. Mathematically modeling the processes of elastoplastic deformation and failure of materials under cyclic loading. *Problemy prochnosti i plastichnosti* [Problems of Strength and Plasticity], 2010, is. 72, pp. 18-27.
- [13] Zubchaninov V.G. *Matematicheskaya teoriya plastichnosti* [Mathematical theory of plasticity]. Tver, Publishing House of TSTU, 2002, 300 p.
- [14] Mitenkov F.M., Volkov I.A., Igumnov L.A., Kaplienkov A.V., Korotkikh Yu.G., Panov V.A. *Prikladnaya teoriya plastichnosti* [Applied theory of plasticity]. Moscow, Fizmatlit, 2015, 284 p.
- [15] Armstrong, P.J., Frederick C.O. A mathematical representation of the multiaxial Bauschinger effect. *CEGB Report No. RD/B/N 731. Materials at High Temperatures*, 1966, vol. 24, pp. 1-26.
- [16] Chaboche J.L. On some modifications of kinematic hardening to improve the description of ratchetting effects. *International Journal of Plasticity*, 1991, vol. 7, pp.661–678.
- [17] Chaboche J.L. Modeling of ratchetting: evaluation of various approaches. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 1994, vol. 13, no. 4, pp. 501–518.
- [18] Chaboche J.L., Nouailhas D., Pacou D., Paulmier P. Modeling of the cyclic response and ratchetting effects on inconel-718 alloy. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 1991, vol. 10, no. 1, pp.101–121.
- [19] Abdel-Karim M. Modified kinematic hardening rules for simulations of ratchetting. *International Journal of Plasticity*, 2009, vol. 25, no. 8, pp. 1560–1587.
- [20] Romanov A.N. Energeticheskie kriterii razrusheniya pri malociklovom nagruzhenii [Energy criteria of destruction under low-cycle loading]. *Strength of Materials*, 1974, no. 1, pp. 3–10.
- [21] Hill R. *The mathematical theory of plasticity*. Oxford, Oxford University Press, 1950, 407 p.
- [22] Radaev Yu.N. *Prostranstvennaya zadacha matematicheskoy teorii plastichnosti: Uchebnoe posobie* [Radaev Yu.N. Spatial problem of the mathematical theory of plasticity: Textbook]. Samara, Samara University Press, 2004, 142 p.
- [23] Bondar V.S., Danshin V.V., Makarov D.A. Matematicheskoe modelirovanie processov deformirovaniya i nakopleniya povrezhdenij pri ciklicheskih nagruzheniyah [Mathematical modeling of deformation processes and damage accumulation under cyclic loading]. *Vestnik PNIPU* [Bulletin of PNIPU], 2014, no. 2, pp. 125-152.
- [24] Dimitrienko Yu. I., Yurin Yu. V., Sborshchikov S. V. *Mnogomasshtabnoe modelirovanie uprugoplasticheskikh kompozitsionnykh materialov* [Multiscale modeling of elastic-plastic composite materials]. Moscow, BMSTU Publ., 2024, 228 p.
- [25] Dimitrienko Yu.I., Sborshchikov S.V., Dimitrienko A.Yu., Yurin Yu.V. Modeling microstructural model of the plasticity deformation theory for quasi-isotropic composite materials. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2021, no. 4, pp. 17–44.

- [26] Dimitrienko Yu.I., Cherkasova M.S., Dimitrienko A.Yu. Microstructural model anisotropic flow theory for elastic-plastic layered composites. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2022, no. 3, pp. 47–70.
- [27] Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika sploshnoj sredy. T. 1. Tenzornyj analiz* [Continuum Mechanics. Vol. 1. Tensor analysis]. Moscow, BMSTU Publ., 2011, 367 p.
- [28] Bykov D. L. *O nekotoryh sootnosheniyah mezhdu invariantami napryazhenij i deformacij v fizicheski nelinejnyh sredah. Uprugost' i neuprugost'* [On some relationships between stress and strain invariants in physically nonlinear media. Elasticity and Inelasticity]. Moscow, Lomonosov Moscow State University - Publishing House, 1971, iss. 2, no. 114–128.
- [29] Bykov D.L., Peleshko V.A. Constitutive relations of strain, anisotropic degradation, and fracture of filled polymer materials in prevailing-tension processes with varying axis direction and relaxations. *Mechanics of Solids*, 2009, vol. 44, no. 5, pp. 705–711.
- [30] Lomakin E.V., Korolkova O.P. Zadachi mekhaniki razrusheniya tel, svoystva kotoryh chuvstvitel'ny k vidu napryazhennogo sostoyaniya, dlya uslovij prodol'nogo sdviga [Problems of fracture mechanics of bodies whose properties are sensitive to the type of stress state, for longitudinal shear conditions]. *Matematicheskoe modelirovanie v estestvennyh naukah* [Mathematical Modeling in the Natural Sciences], 2023, vol. 1, pp. I-IV.
- [31] Fedorenko A.N., Fedolov B.N., Lomakin E.V. Buckling problem of composite thin-walled structures with properties dependent on loading types. *Vestnik Permskogo nacional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika* [Bulletin of Perm National Research Polytechnic University], 2019, no. 3, pp. 104–111.
- [32] Dimitrienko Yu.I., Dimitrienko A.Yu., «Chemical» criterion for modeling the fatigue life of materials with different resistance to tension and compression. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2024, no. 3, pp. 18–42.
- [33] Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika sploshnoj sredy: uchebnoe posobie: v 4 tomah. T. 1. Tenzornyj analiz* [Continuum mechanics: a textbook: in 4 volumes. Volume 1. Tensor analysis]. Moscow, BMSTU Publ., 2011, 463 p.
- [34] Branco R., Costa J. D. M., Antunes F.V., Perdigão S. Monotonic and cyclic behavior of DIN 34CrNiMo6 tempered alloy steel. *Metals*, 2016, vol. 6, 98, pp. 1–14.
- [35] Versaillot P.D. *Effect of Cyclic Loading on the mechanical properties of steel*. Dissertation. Romania, Universitatea Politehnica Timisoara, 2017, 172 p.
- [36] Il'yushin A.A., Pobedrya B.E. *Osnovy matematicheskoy teorii termovyazkouprugosti* [Fundamentals of the mathematical theory of thermoviscoelasticity], Moscow, Nauka Publ, 1970, 282 p.
- [37] Manson S.S. *Behaviour of materials under conditions of thermal stress*. National Advisory Committee for Aeronautics. Technical Note 2933. Ohio, Lewis Flight Propulsion Laboratory Cleveland, 1954, 106 p.

Dimitrienko A.Yu., Postgraduate Student of the Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: sasha.dimit@mail.ru