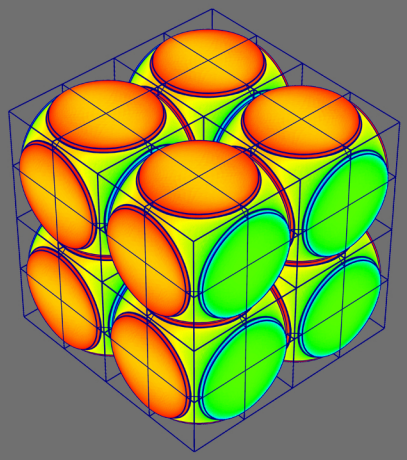
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Майков Д.Н., Макаров С.С. Алгоритм для ускорения расчетов параметров фильтрации при решении обратной коэффициентной задачи пьезопроводности. Математическое моделирование и численные методы, 2026, № 1, с. 87–98.

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/400/

Параметры загрузки:
IP: 3.41.188.32
17.11.2026 08:13:54

УДК 517.951 DOI: 10.18698/2309-3684-2026-1-8798

Алгоритм для ускорения расчетов параметров фильтрации при решении обратной коэффициентной задачи пьезопроводности

© Д.Н. Майков[1,2], С.С. Макаров[2]

[1]ООО «Сиам Мастер», Томская область, Томск, 634003, Россия
[2]Удмуртский федеральный исследовательский центр Уральского отделения Российской академии наук, Удмуртская Республика, Ижевск, 426067, Россия

В работе представлен алгоритм ускорения расчетов параметров при решении обратной коэффициентной задачи пьезопроводности, описывающей однофазную изотермическую фильтрацию. При решении обратной коэффициентной задачи для определения параметров фильтрации системы «скважина–пласт–граница» основную вычислительную нагрузку создают расчетные операции при решении уравнения пьезопроводности. Предложенный алгоритм основан на применении аппроксимации решения уравнения в виде безразмерного давления. Проведенный численный анализ предложенного алгоритма на примере модели горизонтальной скважины с многостадийным гидроразрывом пласта, работающей с постоянным и переменным дебитом, показал, что использование предложенного алгоритма существенно снижает сложность расчетов решения обратной коэффициентной задачи при проведении гидродинамических исследований скважин и сокращает время вычислений.

Ключевые слова: *гидродинамические исследования скважин, обратная коэффициентная задача, уравнение пьезопроводности, алгоритм ускорения, аппроксимация, безразмерное давление*

Введение. При интерпретации результатов гидродинамических исследований скважин (ГДИС) для нахождения параметров фильтрации системы «скважина-пласт-граница» решается обратная коэффициентная задача пьезопроводности. Для решения обратной коэффициентной задачи используются различные алгоритмы оптимизации, например [1, 2]. Эффективность каждого алгоритма во многом определяется характеристиками адаптируемой функции. Основными показателями работы алгоритмов оптимизации являются: число итераций, выполненных в процессе оптимизации; количество вызовов расчета целевой функции; а также величина погрешности полученных результатов относительно фактических данных. Время, затрачиваемое на проведение расчетов при решении обратной коэффициентной задачи, зависит от множества факторов, в частности, от количества переменных дебитов/давлений, известных по истории добычи и тип модели «скважина-пласт-граница». Количество вызовов расчета искомой функции при использовании методов оптимизации во время

интерпретации результатов ГДИС в среднем составляет от сотни до тысячи.

Общие подходы к решению обратных коэффициентных задач при интерпретации результатов гидродинамических исследованиях скважин, развиты в работах [3-6], а исследования в области решения обратных коэффициентных задач подземной гидродинамики приведены в работах [7-13]. В работе [14] приводится метод количественной оценки проницаемостей матрицы и трещин модели сплошной среды с двойной пористостью посредством решения обратной коэффициентной задачи. Численное исследование алгоритмов оптимизации при решении обратной коэффициентной задачи при ГДИС приведении в [15].

В аналитическом решении уравнения пьезопроводности при проведении ГДИС для учета изменяющихся дебитов используется принцип суперпозиции, при котором происходит наложение комплексной модели «скважина-пласт-граница» предыдущих режимов работы скважины в одной точке [16]. Такой подход применяется при каждом вызове расчета искомой функции в процессе оптимизации. В результате, в зависимости от сложности модели и числа режимов работы скважины, решение обратной коэффициентной задачи может значительно затянуться, что усложняет процесс интерпретации результатов ГДИС.

Во многих работах, например [17-19], рассматривается процесс фильтрации флюида в трещиновато-пористых коллекторах на основе модели двойной пористости Уоррена–Рута. Данная модель описывает совместное изменение давлений в пористой матрице и системе трещин и широко применяется при интерпретации результатов ГДИС.

Целью данной работы является разработка алгоритма, позволяющего ускорить проведение расчетов параметров фильрации при решении обратной коэффициентной задачи пезопроводности по результатам ГДИС с сохранением точности вычислений.

Постановка задачи. Обратная коэффициентная задача заключается в определении вектора неизвестных параметров фильтрации пласта **y** на основе известных измеренных значений забойного давления **x**. Поиск вектора **y** осуществляется путем решения задачи минимизации целевой функции, представляющей собой сумму квадратов отклонений между расчетными и измеренными данными:

$$\epsilon = \sum_{i=1}^{N} \left[\mathbf{f}_i(\mathbf{y}) - \mathbf{x}_i \right]^2 .$$

Здесь N — общее число моментов измерения; i — индекс, относящийся к определенному моменту времени измерения;

$x = [x_1, x_2, \ldots, x_N]^T$ — вектор измеренных значений забойного давления в N дискретных моментов времени $t_1, t_2, \ldots, t_N$ (эти данные являются результатом проведения ГДИС);

$$\mathbf{f}(\mathbf{y}) = [f_1(\mathbf{y}), f_2(\mathbf{y}), \ldots, f_N(\mathbf{y})]^T$$

— вектор расчетных значений забойного давления, соответствующих моментам времени $t_1, t_2, \ldots, t_N$; $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \ldots, y_m]^T$ — вектор искомых (управляющих) параметров, которые подлежат определению в процессе решения обратной коэффициентной задачи. В контексте данной работы к параметрам **y** относятся: толщина пласта h, проницаемость k, пористость ϕ, общая сжимаемость c_t, объемный коэффициент B и вязкость флюида μ. Каждый элемент вектора $\mathbf{f}(\mathbf{y})$ вычисляется как результат решения прямой задачи уравнения пьезопроводности для заданного набора параметров **y** и с учетом заданных начальных и граничных условий. Таким образом, решение обратной задачи требует многократного решения прямой задачи для различных векторов **y** в процессе решения обратной коэффициентной задачи с целью найти такой вектор **y**, который минимизирует невязку ϵ.

Процесс фильтрации, составляющий прямую задачу, описывается уравнением пьезопроводности:

$$\phi c_t \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{k}{\mu} div(\nabla p) + q^*, \tag{1}$$

где ϕ — пористость; c_t — коэффициент общей сжимаемости; p — давление; t — время; k — тензор проницаемости; μ — вязкость жидкости; q^* — приведенный внешний источник/сток.

Для решения уравнения (1) вводятся допущения, а также начальные и граничные условия. Пласт принимается однородным с постоянной толщиной $h = const$; скважина работает при постоянном дебите $Q = const$. Для учета изменяющихся дебитов используется принцип суперпозиции [16]. В качестве начального условия полагаем, что на момент времени $t = 0$ давление в пласте однородно и равно начальному давлению p_i:

$$p(t = 0, r) = p_i,$$

где r — радиальная координата.

В качестве внутреннего граничного условия на границе «скважина–пласт» принимается модель линейного источника:

$$\lim_{r\to 0} r\frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{QB\mu}{2\pi kh}, \quad t > 0.$$

В качестве внешнего граничного условия в ГДИС чаще всего используются модель бесконечного пласта:

$$\lim_{r\to\infty} p\left(t=0, r\right) = p_i, \quad t > 0,$$

модель границы постоянного давления (граничное условие первого рода):

$$p\left(t, r = r_e\right) = p_i, \quad t > 0,$$

модель непроницаемой границы (граничное условие второго рода):

$$\left.\frac{\partial p}{\partial r}\right|_{r=r_e} = 0, \quad t > 0,$$

где r_e — радиус внешней границы.

Для решения уравнения пьезопроводности (1) для идеализированных геометрий пласта (бесконечный пласт, круговой пласт с центральной скважиной, прямоугольный пласт) применяются аналитические методы, суть которых заключается в применении преобразования Лапласа к исходному уравнению, что позволяет получить точное решение в пространстве изображений (в образах Лапласа). Затем, для нахождения решения во временной области, выполняется обратное преобразование, например, с помощью алгоритма Стефеста [20]. Таким образом, расчёт забойного давления включает вычисление решения в пространстве Лапласа, его обратное преобразование и переход к размерным величинам с использованием безразмерных переменных, которые в большинстве случаев имеют следующий вид:

$$p_D = \frac{kh}{18.41QB\mu}\Delta p, \;\; t_D = \frac{0,00036k}{\varphi\mu c_t r^2}t, \tag{2}$$

где p_D — безразмерное давление; p — давление, атм; Q — дебит, м^3/сут, μ — вязкость жидкости, сП; B — объемный коэффициент жидкости, м^3/ст.м^3; k — проницаемость пласта, мД; h — толщина пласта, м; t_D — безразмерное время; t — время, ч; ϕ — пористость; c_t — коэффициент общей сжимаемости, атм$^{-1}$; r — радиус скважины, м.

При решении обратной коэффициентной задачи для определения параметров системы «скважина–пласт–граница» основную вычислительную нагрузку создают расчетные операции при решении уравнения пьезопроводности. Если параметры влияют только на переход к

размерным величинам, не изменяя аналитического решения уравнения пьезопроводности в безразмерной форме, это решение можно вычислить один раз, аппроксимировать и далее использовать аппроксимацию вместо повторного пересчёта, что существенно ускоряет вычисления.

Алгоритм аппроксимации функции аналитической модели при решении уравнения пьезопроводности. При поиске параметров в уравнении пьезопровоности вводят границы поиска. Исходя из этого алгоритм аппроксимации следующий:

1) определение значений минимального и максимального безразмерного времени (t_{Dmin}, t_{Dmax}) на основе границ поиска и безразмерных переменных (2);

2) ввод дискретного пространства для независимой переменной безразмерного времени t_D в интервале $0.9t_{Dmin} - 1.1t_{Dmax}$ с логарифмическим шагом и дискретностью n точек на log-цикл, при $n = 10$;

3) расчет безразмерного давления p_D в точках полученного массива безразмерного времени;

4) аппроксимация безразмерного давления p_D от безразмерного времени t_D.

Для аппроксимации p_D от t_D использовался алгоритм, описанный в работе [16], который обладает хорошей сходимостью с оригинальной функцией при малой погрешности. Пример аппроксимации безразмерного давления от безразмерного времени приведен на рис. 1. Использование предложенной аппроксимации в расчетах оптимизации следующее: вместо непосредственного вычисления размерного изменения давления по функции уравнения пьезопроводности сначала производится расчет безразмерного давления с использованием аппроксимации. Затем полученное значение преобразуется в размерный вид с применением безразмерных переменных (2) и используется для дальнейших расчетов.

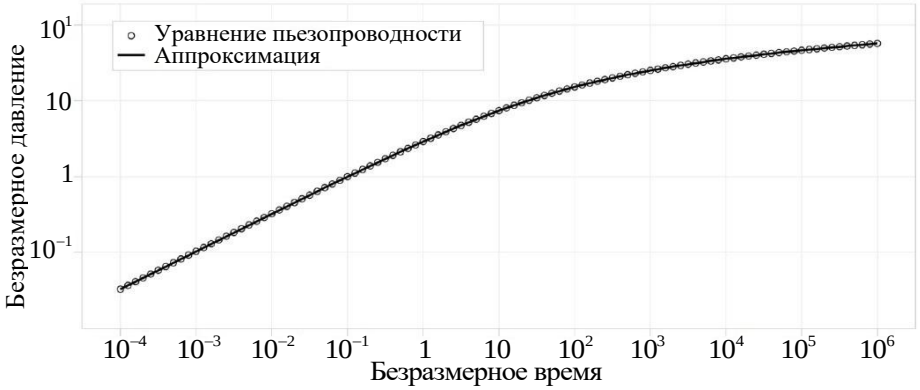


Рис. 1. Сопоставление вариантов расчета безразмерного давления по аппроксимации и уравнению пьезопроводности

Из рис. 1 видно, что предлагаемая аппроксимация демонстрирует хорошую согласованность с результатами, полученными при решении уравнения пьезопроводности во всем временном диапазоне, что позволяет использовать её для определения безразмерного давления при интерпретации результатов ГДИС.

Численный анализ предлагаемого алгоритма. Численное исследование предлагаемого алгоритма проводилось на двух наборах данных при переменном дебите и при постоянном дебите. В качестве целевых данных оптимизации использовались сгенерированные значения давления при помощи расчета по модели горизонтальной скважины с многостадийным гидроразрывом пласта (МГРП), находящейся в бесконечном однородном пласте [21, 22]. При переменном дебите целевые точки давления брались по одной точке в середине каждого режима работы скважины, при постоянном дебите равномерно отбирались 10 точек во временном интервале работы скважины. Скин-фактор и влияние ствола скважины не учитывались. Исходные неизменяемые параметры модели следующие: длина горизонтального участка $L = 500$ м, количество равномерно распределенных по длине горизонтального ствола трещин ГРП $n = 20$, полудлина всех трещин $x_f = 20$ м, угол всех трещин относительно горизонтального ствола $\alpha = 90°$. В первом варианте скважина работала $t = 1000$ часов с постоянным дебитом $Q = 100$ м^3/сут, во втором – скважина работала с изменяющимися во времени дебитами как, описано в [16].

Обратная коэффициентная задача решалась методом оптимизации Левенберга-Марквардта [15]. С помощью метода оптимизации находились следующие параметры: толщина h, проницаемость k, пористость пласта ϕ, объемный коэффициент B, вязкость флюида μ, общая сжимаемость пласта c_t. Параметры, при которых были сгене-

рированы целевые данные давления, начальное приближение и границы поиска приведены в таблице 1.

Результаты расчётов приведены в таблице 2 и на рисунках 2, 3. Общее число вызовов расчета размерного давления при расчетах оптимизации не изменилось при расчетах с использованием аппроксимации по сравнению с расчетами без аппроксимации и составило 268 при переменном дебите и 131 при постоянном дебите, что говорит о хорошей точности аппроксимации, обеспечивающей минимальную погрешность при описании оригинальной функции. Это позволило увеличить скорость вычислений при минимальных погрешностях (см. таблицу 2).

Таблица 1

Миноры при половинном распределении элементов между подматрицами в (4)

Параметр	Генерация целевого давления	Начальное приближение	Минимальная граница	Максимальная граница
Толщина пласта, h (м)	10	50.05	0.1	100
Проницаемость пласта, k (мД)	100	500.05	0.1	1000
Пористость, ϕ	0.2	0.25	0.1	0.4
Общая сжимаемость, c_t (атм$^{-1}$)	$5 \cdot 10^{-5}$	$5.05 \cdot 10^{-5}$	10^{-6}	$5 \cdot 10^{-4}$
Объемный коэффициент, B (м3/ст.м3)	1	1.4	0.8	2
Вязкость флюида, μ (сП)	5	50.5	1	100

Таблица 2

Параметры модели при поиске

Дебит	Время расчета, с	
	Без аппроксимации	С аппроксимацией
Постоянный	26.23	1.3
Изменяющийся	69.72	18.07

На рис. 2 и 3 представлены результаты поиска параметров методом оптимизации. Как видно из графиков, рассчитанное забойное давление с использованием аппроксимационной функции идентично с исходными данными, полученными при проведении ГДИС.

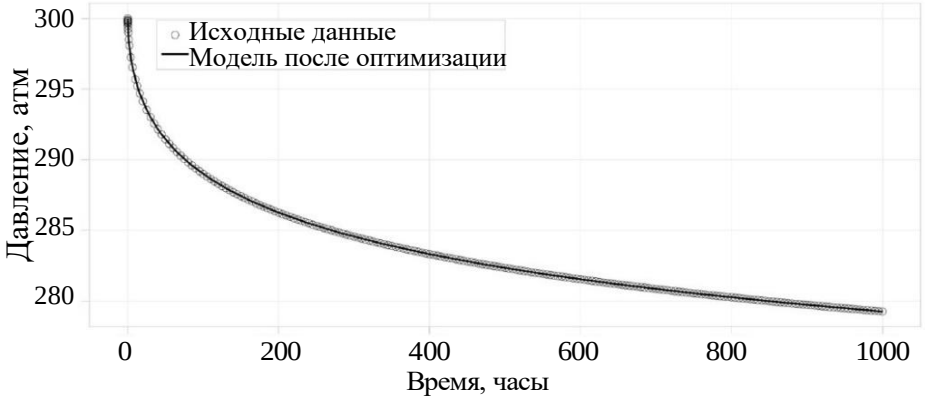


Рис. 2. Результат поиска параметров модели при постоянном дебите

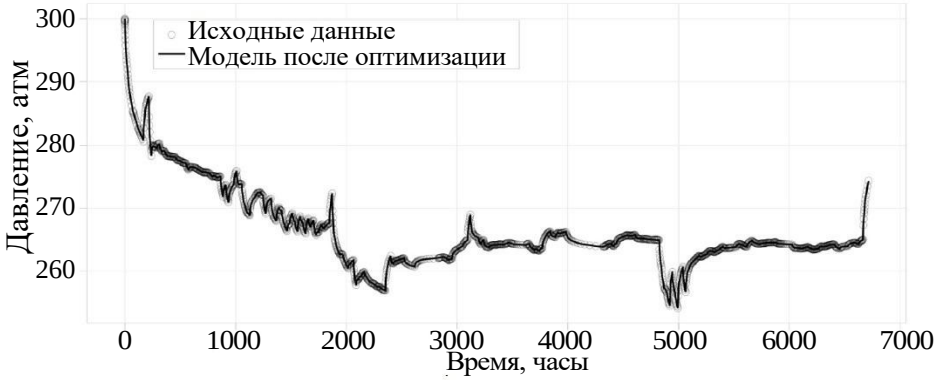


Рис. 3. Результат поиска параметров модели при переменном дебите

В результате использования алгоритма с применением аппроксимации число вызовов функции аналитической модели снизилось с 131 до 1 при постоянном дебите и с 268 до 1 при изменяющемся дебите, а скорость расчётов возросла. Результаты работы обсуждались на конференции [23].

Выводы. В работе представлен алгоритм, позволяющий ускорить проведение расчетов параметров фильтрации при решении обратной коэффициентной задачи пьезопроводности по результатам ГДИС с сохранением точности вычислений. Применение предложенного алгоритма позволяет кратно увеличить скорость расчетов при минимальных погрешностях вычислений, что позволяет оперативно производить интерпретацию результатов ГДИС.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Kochenderfer M.J., Wheeler T.A. *Algorithms for Optimization*. The MIT Press, 2019, 520 p.

[2] Arora R.K. *Optimization: Algorithms and Applications*. Chapman and Hall/CRC, 2015, 466p.

[3] Бек Дж., Блакуэлл Б., Сент-Клэр Ч. *Некорректные обратные задачи теплопроводности*. Москва, Мир, 1989, 310 с.

[4] Романов В.Г. *Обратные задачи математической физики*. Москва, Наука, 1984, 263 с.

[5] Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. *Методы решения некорректных задач*. Москва, Наука, 1979, 287 с.

[6] Алифанов О.М. *Обратные задачи теплообмена*. Москва, Машиностроение, 1988, 280 с.

[7] Голубев Г.В., Данилаев П.Г., Тумашев Г.Г. *Определение гидропроводности неоднородных нефтяных пластов нелокальными методами*. Казань, КГУ, 1978, 176 с.

[8] Закиров С.Н., Индрупский И.М., Закиров Э.С., Закиров И.С. *Новые принципы и технологии разработки месторождений нефти и газа. Часть 2*. Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2009, 484 с.

[9] Закиров Э.С. *Трехмерные многофазные задачи прогнозирования, анализа и регулирования разработки месторождений нефти и газа*. Москва, Изд. дом «Грааль», 2001, 303 с.

[10] Мирзаджанзаде А.Х., Хасанов М.М., Бахтизин Р.Н. *Моделирование процессов нефтегазодобычи. Нелинейность, неравновесность, неопределенность*. Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2004, 368 с.

[11] Хайруллин М.Х., Хисамов Р.С., Шамсиев М.Н., Фархуллин Р.Г. *Интерпретация результатов гидродинамических исследований скважин методами регуляризации*. Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2006, 172 с.

[12] Oliver D.S., Reynolds A.C., Ning L. *Inverse theory for petroleum reservoir characterization and history matching*. Cambridge, Cambridge University Press, 2008, 380 p.

[13] Sun N.Z. *Inverse problems in groundwater modeling*. Vol. 6. Springer Netherlands, 1999, 338 p.

[14] Карчевский А.Л., Назарова Л.А., Назаров Л.А. Метод определения фильтрационных характеристик трещиновато-пористого пласта на основе решения обратной задачи по данным регистрации расходных параметров скважины. *Прикладная механика и техническая физика*, 2021, т. 62, № 6(370). с. 74–80.

[15] Майков Д.Н., Макаров С.С. Численное исследование алгоритмов оптимизации при адаптации гидродинамической модели по результатам исследований скважин. *Математическое моделирование*, 2022, т. 34, № 9, с. 71-82.

[16] Майков Д.Н., Исупов С.В., Макаров С.С., Аниканов А.С. Метод ускорения расчета давления при изменяющихся дебитах по истории эксплуатации скважины. *Нефтяное хозяйство*, 2021, № 9, с. 105–107.

[17] Maaref S., Moosavi R., Riazi M. Comparison of Numerical Methods to Solve Warren-Root PDE of Naturally Fractured Reservoirs. *The 1st National Conference on Oil and Gas Fields Development*, 2015.

[18] Истрафилов М.Я., Морозкин Н.Н. Решение задачи фильтрации в трещиноватом пласте с использованием модели Уоррена-Рута. *Вестник Башкирского университета*, 2017, т. 22, № 1, с. 15-19.

[19] Майков Д.Н., Макаров С.С. Метод ускорения численного решения дифференциального уравнения пьезопроводности модели пласта с двойной пористостью. *Математическое моделирование и численные методы*, 2024, № 3, с. 3–17.

[20] Stehfest H. Algorithm 368: Numerical inversion of Laplace transforms. *Communications ACM*, 1970, № 1, pp. 47–49.

[21] Zerzar A. Interpretation of multiple hydraulically fractured horizontal wells. *SPE International Improved Oil Recovery Conference in Asia Pacific*. *SPE-84888-MS*, 2003. DOI: https://doi.org/10.2118/84888-MS.

[22] Craig D.P. Blasingame T.A. Constant-rate drawdown solutions derived for multiple arbitrarily oriented uniform-flux, infinite-conductivity, or finite-conductivity fractures in an infinite-slab reservoir. *SPE Gas Technology Symposium. SPE-100586-MS*, 2006. DOI: https://doi.org/10.2118/100586-MS.

[23] Майков Д.Н., Макаров С.С. Алгоритм ускорения расчетов при решении обратной коэффициентной задачи для уравнения пьезопроводности. *Материалы Всероссийской конференции с международным участием «Теория управления и математическое моделирование», посвященной памяти профессора Н.В. Азбелева и профессора Е.Л. Тонкова*. УдГУ, 2025, с. 243–245.

Статья поступила в редакцию 10.10.2025

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:
Майков Д.Н., Макаров С.С. Алгоритм для ускорения расчетов параметров фильтрации при решении обратной коэффициентной задачи пьезопроводности. *Математическое моделирование и численные методы*, 2026, № 1, с. 87–98.

Майков Дмитрий Николаевич — ведущий специалист, ООО «СиамМастер», младший научный сотрудник ФГБУН УдмФИЦ УрО РАН. e-mail: dimaMS2@mail.ru

Макаров Сергей Сергеевич — д-р техн. наук, ведущий научный сотрудник, ФГБУН Удм ФИЦ УрО РАН. e-mail: ssmak15@mail.ru

Algorithm for accelerating the computation of filtration parameters in solving the inverse coefficient problem for the diffusivity equation

© D.N. Maykov[1,2], S.S. Makarov[2]

[1]SIAM MASTER Ltd, Tomsk region, Tomsk, 634003, Russia
[2]Udmurt Federal Research Center of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Udmurt Republic, Izhevsk, 426067, Russia

This paper presents an algorithm for accelerating the computation of parameters in solving the inverse coefficient problem for the diffusivity equation that describes single-phase isothermal filtration. When solving the inverse coefficient problem to determine the filtration parameters of the "well–reservoir–boundary" system, the main computational load is generated by the numerical operations involved in solving the diffusivity equation. The proposed algorithm is based on applying an approximation of the solution to the diffusivity equation in the form of dimensionless pressure. A numerical study performed for a horizontal well with multi-stage hydraulic fracturing operating under both constant and variable production rates showed that the algorithm markedly reduces the computational complexity of the inverse coefficient problem during hydrodynamic welltest interpretation and substantially shortens computation time.

***Keywords**: pressure transient analysis, inverse coefficient problem, diffusivity equation, acceleration algorithm, approximation, dimensionless pressure*

REFERENCES

[1] Kochenderfer M.J., Wheeler T.A. *Algorithms for Optimization*. The MIT Press, 2019, 520 p.

[2] Arora R.K. *Optimization: Algorithms and Applications*. Chapman and Hall/CRC, 2015, 466p.

[3] Beck J., Blackwell B., St. Clair C. *Nekorrektnye obratnye zadachi teploprovodnosti* [Ill-posed inverse problems of heat conduction]. Moscow, Mir Publ., 1989, 310 p.

[4] Romanov V.G. *Obratnye zadachi matematicheskoj fiziki* [Inverse problems of mathematical physics]. Moscow, Publishers Nauka, 1984, 263 p.

[5] Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. *Metody resheniya nekorrektnyh zadach* [Methods for solving ill-posed problems]. Moscow, Publishers Nauka, 1979, 287 p.

[6] Alifanov O.M. *Inverse problems of heat transfer* [Obratnye zadachi teploobmena]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1988, 280 p.

[7] Golubev G.V., Danilaev P.G., Tumashev G.G. *Opredelenie gidroprovodno-sti neodnorodnyh neftyanyh plastov nelokal'nymi metodami* [Determination of hydraulic conductivity of heterogeneous oil formations by non-local methods]. Kazan, Kazan Federal University Publishing House, 1978, 176 p.

[8] Zakirov S.N., Indrupskiy I.M., Zakirov E.S., Zakirov I.S. *Novye prin-cipy i tekhnologii razrabotki mestorozhdenij nefti i gaza. CHast' 2* [New principles and technologies for oil and gas field development. Part 2]. Izhevsk, Izhevsk Institute of Computer Science, 2009, 484 p.

[9] Zakirov E.S. *Trekhmernye mnogofaznye zadachi prognozirovaniya, analiza i regulirovaniya razrabotki mestorozhdenij nefti i gaza* [Three-dimensional multiphase problems of forecasting, analysis and regulation of oil and gas field development]. Moscow, Graal Publishing House, 2001, 303 p.

[10] Mirzadzhanzade A.Kh., Khasanov M.M., Bakhtizin R.N. *Modelirovanie processov neftegazodobychi. Nelinejnost', neravnovesnost', neopredelen-nost'* [Modeling of oil and gas production processes. Nonlinearity, nonequilibrium, uncertainty]. Izhevsk, Izhevsk Institute of Computer Science, 2004, 368 p.

[11] Khairullin M.Kh., Khisamov R.S., Shamsiev M.N., Farkhullin R.G. *Interpretaciya rezul'tatov gidrodinamicheskih issledovanij skvazhin metodami regulyarizacii* [Interpretation of the results of hydrodynamic studies of wells using regularization methods]. Izhevsk, Izhevsk Institute of Computer Science, 2006, 172 p.

[12] Oliver D.S., Reynolds A.C., Ning L. *Inverse theory for petroleum reservoir characterization and history matching*. Cambridge, Cambridge University Press, 2008, 380 p.

[13] Sun N.Z. *Inverse problems in groundwater modeling*. Vol. 6. Springer Netherlands, 1999, 338 p.

[14] Karchevsky A.L., Nazarova L.A., Nazarov L.A. Determining the fluid transport properties of a fractured porous reservoir by solving the inverse problem using well output measurements. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2021, vol. 62, no. 6(370), pp. 74–80.

[15] Maykov D.N., Makarov S.S. Numerical investigation of optimization algorithms for the hydrodynamic model adaptation based on the well test results. *Mathematical Models and Computer Simulations*, 2022, vol. 34, № 9, pp. 71-82.

[16] Maykov D.N., Isupov S.V., Makarov S.S., Anikanov A.S. Metod uskoreniya

rascheta davleniya pri izmenyayushchihsya debitah po istorii ekspluatacii skvazhiny [The efficient method for pressure calculation at variable rate]. *Neftyanoe hozyajstvo* [Oil Industry], № 9, 2021, pp. 105–107. DOI: 10.24887/0028-2448-2021-9-105-107.

[17] Maaref S., Moosavi R., Riazi M. Comparison of Numerical Methods to Solve Warren-Root PDE of Naturally Fractured Reservoirs. *The 1st National Conference on Oil and Gas Fields Development*, 2015.

[18] Istrafilov M.Ya., Morozkin N.N. Solution of the filtration problem in the fissured formation using Warren-Root model. Vestnik Bashkirskogo Universiteta [Bulletin of the Bashkir University], 2017, vol. 22, no. 1, pp. 15-19.

[19] Maykov D.N., Makarov S.S. The efficient method for numerical solution of dual porosity reservoir model. *Mathematical modeling and computational methods*, 2024, no. 3. pp. 3–17.

[20] Stehfest H. Algorithm 368: Numerical inversion of Laplace transforms. *Communications ACM*, 1970, № 1, pp. 47–49.

[21] Zerzar A. Interpretation of multiple hydraulically fractured horizontal wells. *SPE International Improved Oil Recovery Conference in Asia Pacific*. *SPE-84888-MS*, 2003. DOI: https://doi.org/10.2118/84888-MS.

[22] Craig D.P. Blasingame T.A. Constant-rate drawdown solutions derived for multiple arbitrarily oriented uniform-flux, infinite-conductivity, or finite-conductivity fractures in an infinite-slab reservoir. *SPE Gas Technology Symposium. SPE-100586-MS*, 2006. DOI: https://doi.org/10.2118/100586-MS.

[23] Maikov D.N., Makarov S.S. Algoritm uskoreniya raschetov pri reshenii obratnoj koefficientnoj zadachi dlya uravneniya p'ezoprovodnosti [Algorithm for accelerating calculations when solving the inverse coefficient problem for the piezoconductivity equation*]. Materialy Vserossijskoj konferencii s mezhdunarodnym uchastiem «Teoriya upravleniya i matematicheskoe modelirovanie», posvyashchennoj pamyati professora N.V. Azbeleva i professora E.L. Tonkov*a [Proceedings of the All-Russian Conference with International Participation «Control Theory and Mathematical Modeling» dedicated to the memory of Professor N.V. Azbelev and Professor E.L. Tonkov]. Udmurt State University, 2025, pp. 243–245.

Maykov D.N., Leading specialist SIAM MASTER Ltd, Junior Researcher Udmurt Federal Research Center of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences. e-mail: dimaMS2@mail.ru

Makarov S.S., Dr. Sc. (Eng.), Leading Researcher; Udmurt Federal Research Center of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences. e-mail: ssmak15@mail.ru