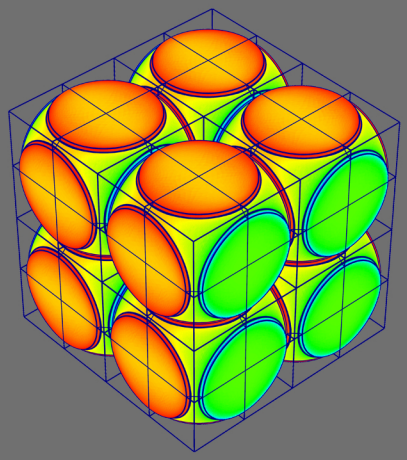
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Сесюкалов В.А. Моделирование структуры управления на основе дискретного принципа Беллмана в задачах с особым управлением. Математическое моделирование и численные методы, 2026, № 1, с. 3–21.

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/396/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.217.38
16.07.2026 00:23:52

УДК 629.7 DOI: 10.18698/2309-3684-2026-1-321

Моделирование структуры управления на основе дискретного принципа Беллмана в задачах с особым управлением

© Сесюкалов В.А.

[1]МАИ (НИУ), Москва, 125993, Россия

Целью работы является определение (синтез) структур управления в задачах управления динамическими объектами. Структурой управления в данной работе называется последовательность регулярных и особых (в смысле принципа максимума Понтрягина) участков управления, приводящих к решению транспортной задачи. В работе изложен алгоритм определения структуры управления на основе дискретного принципа оптимальности Беллмана для аддитивного критерия качества. Алгоритм предлагается для использования на первоначальных этапах исследования и определения первого приближения. Алгоритм предполагает поиск управления в рассматриваемой фазовой области на сетке по фазовым параметрам. Аппроксимация дискретной функции Беллмана между узлами фазовой сетки производится с помощью кусочно-линейной телевизионной развертки фазового пространства. Приведены численные алгоритмы преобразования координаты фазовой сетки в значение параметра развертки и обратно, от известного значения параметра развертки к соответствующей координате фазовой сетки. Применение алгоритма рассмотрено на примере задачи наискорейшего подъема самолета (задача на быстродействие), содержащей особые экстремали управления. Представлены структуры управления, полученные применением предлагаемого алгоритма, приведены реплики этих траекторий, полученные в рамках принципа максимума Понтрягина. Приведенный алгоритм, в целом, показал удовлетворительную сходимость к решениям по принципу максимума, удовлетворяющим условиям транспортной задачи. Однако удовлетворить всем необходимым условиям оптимальности для полученных по алгоритму структур не удалось. Среди трудностей применения алгоритма можно отметить высокую степень накопления ошибок, сложность удовлетворения граничных условий, необходимость в хорошем решателе задачи нелинейного программирования. Среди плюсов можно отметить получение большого спектра структур управления подозрительных на оптимальность, возможность параллелизма вычислений, легкий учет фазовых ограничений.

Ключевые слова: *принцип Беллмана, оптимизация, принцип максимума Понтрягина, особое управление, структура управления*

Введение. Задача синтеза траекторий с особым управлением занимает значимую область проблем теории управления из-за того, что окончательного решения этой задачи пока не получено [1-3], кроме того, нелинейность исходной задачи позволяет предполагать наличие нерегулярного решения [1], [3], [4]. Как следствие, существует не один подход к решению задачи синтеза программной траектории с особой экстремалью.

Один из способов решения задачи синтеза – принцип максимума Понтрягина [5]. В ряде задач управление входит линейно в функцию Понтрягина и при этом нельзя однозначно сказать удовлетворяет ли хотя бы одно из граничных значений управления условию:

$$\mathbf{u}_{\mathbf{opt}} = \max_{\mathbf{u}} \mathrm{H},$$

где H – функция Понтрягина, $\mathbf{u}$ – управление.

Особая экстремаль тогда удовлетворяет условию:

$$\frac{\mathrm{dH}}{\mathrm{d}u} = 0$$

на некотором промежутке хотя бы для одного управления.

Существует несколько подходов для того, чтобы избежать данное затруднение:

1) использование особых вариаций управления, что приводит к обобщенному условию Келли (скобкам Пуассона, скобкам Ли, условиям общности положения) [1], [6-9];

2) использование вариаций в пространстве состояний, что приводит к уравнению кратных максимумов и трансформирует исходную задачу к некоторой производной [2], [6];

3) регуляризация исходной задачи так, чтобы исчезла линейность по управлению, а решение производной задачи приближалось к исходной [10-12];

4) использование уравнения Беллмана [6], [13].

Эти способы дают возможность определить вид функции управления и тот факт будет ли особый режим оптимален. Однако для исходно нелинейной задачи процесс решения все равно вызывает трудности, прежде всего из-за того, что решать краевую задачу принципа максимума приходится численно. В таком случае для упрощения анализа задачи хорошо бы иметь априорную информацию о возможном количестве участков особого управления.

Для этого подходят методы использующие более общую постановку проблемы по сравнению с принципом максимума, например, на основе уравнения Беллмана, методы линеаризации исходной задачи, методы разбиения области поиска и решения задачи нелинейного программирования, различные прямые методы поиска и т.д. [8], [13-15].

В работе предлагается алгоритм определения структуры управления в задаче программного движения на основе дискретного уравнения Беллмана. Затем предпринимается попытка отыскания «точного» решения на основе полученного приближения с применением принципа максимума и скобок Пуассона в конкретном примере.

Математическая постановка задачи. Рассматривается задача динамического управления объектом в следующем виде:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = f\left(\mathbf{x},\mathbf{u},t\right), \\ J = \Phi_0\left(\mathbf{x}_0\right) + \Phi_{\mathrm{f}}\left(\mathbf{x}_{\mathbf{f}}\right) + \int\limits_{t_0}^{t_f} \varphi\left(\mathbf{x},\mathbf{u},t\right) dt, \\ \mathbf{u} \in \mathbf{U}, \\ x\left(\mathbf{t}_0\right) = \mathbf{G}_0 = \mathbf{x}_0, \\ x\left(\mathbf{t}_{\mathbf{f}}\right) = \mathbf{G}_{\mathbf{f}} = \mathbf{x}_{\mathbf{f}}, \end{cases} \tag{1}$$

где $\mathbf{x}$ — вектор фазовых переменных; $\mathbf{f}\left(\cdot\right)$ — вектор правых частей ОДУ; $\mathbf{u}$ — управление; $\mathbf{U}$ — ограниченное, замкнутое множество; t — время; J — целевой функционал; $\left(t_0 - t_f\right)$. — длительность перехода (время) из состояния $\mathbf{x}_0$ в $\mathbf{x}_{\mathbf{f}}$; $\mathbf{G}_0, \mathbf{G}_{\mathbf{f}}$ — левые или правые граничные условия, на данном этапе полагаются не зависимыми от времени.

Хотя бы одно из управлений входит в эти равенства линейно. При этом будем считать момент времени t_0 заданным, а момент времени t_f не фиксированным, но конечным.

Требуется определить управление $\mathbf{u}$ переводящее динамический объект из начального состояния $\mathbf{G}_0$ в конечное $\mathbf{G}_{\mathbf{f}}$, т.е. решить транспортную задачу.

Структурой управления в рамках данного исследования будем считать последовательность участков регулярного и особого режима управления, приводящую к решению транспортной задачи.

Для решения данной задачи воспользуемся дискретным принципом Беллмана. Для этого введем сетку фазовых стояний, элементами которой являются $\mathbf{x}_{\mathbf{i}}$, и времени с элементами t_i, теперь задачу (1) можно переписать:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{x}_{\mathrm{i}}}{\mathrm{d}t} = f\left(\mathbf{x}_{\mathrm{i}}, \mathbf{u}_{\mathrm{i}}, t\right), \\ \mathbf{x}_{\mathrm{i}}\left(t_{i-1}\right) = \mathbf{x}_{\mathrm{i-1}}^{\mathrm{f}}, \\ \mathbf{x}_{\mathrm{i}}\left(t_{i}\right) = \mathbf{x}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{f}}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} J_0 = \Phi_0\left(\mathbf{x}_0\right) + \int\limits_{\mathrm{t}_0}^{\mathrm{t}_1} \varphi\left(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t\right) \mathrm{d}t, \\ J_i = \int\limits_{\mathrm{t}_{\mathrm{i-1}}}^{\mathrm{t}_{\mathrm{i}}} \varphi\left(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t\right) \mathrm{d}t, \\ J_f = \Phi_f\left(\mathbf{x}_{\mathbf{f}}\right) + \int\limits_{\mathrm{t}_{\mathrm{N-1}}}^{\mathrm{t}_{\mathrm{f}}} \varphi\left(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t\right) \mathrm{d}t, \end{cases}$$

$$\mathbf{u}_{\mathbf{i}} \in \mathbf{U}_{\mathbf{i}},$$

$$x\left(t_0\right) = \mathbf{G}_0 = \mathbf{x}_0,$$

$$x\left(t_f\right) = \mathbf{G}_{\mathbf{f}} = \mathbf{x}_{\mathbf{f}},$$

где $\mathbf{u}_{\mathbf{i}}$ — управление, переводящее систему из точки с координатами $\mathbf{x}_{\mathbf{i-1}}^{\mathbf{f}}$ в точку с координатами $\mathbf{x}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{f}}$; N — количество точек сетки по времени.

Пользуясь теперь известными соотношениями управление $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1 \ldots \mathbf{u}_{\mathbf{f}}$ можно определить из [15]:

Управление $\mathbf{u}_0$ для левой граничной точки можно определить из следующей задачи на условный минимум:

$$\begin{cases} B_0\left(\mathbf{x}\right) = \min\limits_{\mathbf{u}_0} J_0\left(\mathbf{x}, \mathbf{u}_0\right), \\ \mathbf{x}_0 \le \mathbf{x} \le \mathbf{x}_1^{\mathbf{f}}\left(\mathbf{u}_0\right), \\ \mathbf{x}_1^{\mathbf{f}} - \int\limits_{t_0}^{t_1} \mathbf{f}\left(\mathbf{x}, \mathbf{u}_0, t\right) dt = \mathbf{x}_0\left(\mathbf{u}_0\right), \\ \mathbf{x}_0\left(\mathbf{u}_0\right) \in \mathbf{G}_0, \\ \mathbf{u}_0 \in \mathbf{U}_0, \end{cases} \tag{2}$$

где B — дискретная функция Беллмана

Управление $\mathbf{u}_{\mathbf{i}}$ для точек из интервала $\left(t_0, t_f\right)$ можно определить из решения следующей задачи на условный минимум:

$$\begin{cases} B_i(\mathbf{x}) = \min\limits_{\mathbf{u_i}}\left(J(\mathbf{x},\mathbf{u_i}) + B_{i-1}\left(\mathbf{x_i^f}(\mathbf{u_i})\right)\right), \\ \mathbf{x_{i-1}^f} \le x \le \mathbf{x_i^f}(\mathbf{u_i}), \\ \mathbf{x_i^f} - \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u_i},t)\,dt = \mathbf{x_{i-1}^f}(\mathbf{u_i}), \\ \mathbf{u_i} \in \mathbf{U_i}. \end{cases}, i = \overline{2, N-1} \qquad (3)$$

Управление $\mathbf{u_f} = \mathbf{u_N}$ для правой граничной точки можно определить из решения следующей задачи на условный минимум:

$$\begin{cases} B_N(\mathbf{x}) = \min\limits_{\mathbf{u_N}}\left(J(\mathbf{x},\mathbf{u_N}) + B_{N-1}\left(\mathbf{x_{N-1}^f}(\mathbf{u_N})\right) + \Phi_f(\mathbf{x_N})\right) \\ \mathbf{x_{N-1}^f} \le x \le \mathbf{x_N^f}(\mathbf{u_N}) \\ \mathbf{x_N^f} - \int\limits_{t_{N-1}}^{t_N} \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u_N},t)\,dt = \mathbf{x_{N-1}^f}(\mathbf{u_i}), \\ \mathbf{x_N^f} \in \mathbf{G_f} \\ \mathbf{u_N} \in \mathbf{U_N} \end{cases} \qquad (4)$$

Чаще всего для отыскания $B_i(x)$ используют схему с обратным ходом от функции с номером N к функции с номером «0». Система условий (2)-(4) имеет немного другой вид. В данном случае для определения $B_i(x)$ используется прямой ход, таким образом, оптимальная конечная точка, а следовательно и оптимальная траектория определится из условия:

$$\mathbf{x_{opt}^f} = \min_{i \in N_t} \min_{\mathbf{x} \in \mathbf{G_f}} B_N^i(\mathbf{x}), \qquad (5)$$

где N_t — количество временных шагов.

Соответственно количество таких координат и соответствующих траекторий будет равно числу временных шагов.

Численный алгоритм для синтеза структуры управления. Одна из основных трудностей в схеме Беллмана состоит в вычислении функции Беллмана предыдущего временного шага B_{i-1}. Поскольку функция задана таблично, то имеется несколько способов ее аппроксимации, например, в виде развертки или интерполяционного многочлена. Применение развертки позволяет выразить многомерную функцию в виде функции одной переменной, таким образом изменяется форма хранения информации о функции и существенно упрощается восстановление значений функции в межузловых точках [16]:

$$F: \ \mathbf{x_n} \in \mathbb{R}_n \to z \in \mathbb{R}, \tag{6}$$

где $\mathbf{x_n}$ — n-мерный вектор фазовых переменных, z — параметр развертки.

Рассмотрим формирование телевизионной развертки. При построении телевизионной развертки используется структура нумерации точек друг за другом в последовательности нарастания одной из фазовых координат. После достижения заданного предела фазовой сетки происходит «разворот» направления нумерации и процесс продолжается. Для двумерного случая вид развертки показан на рис. 1.

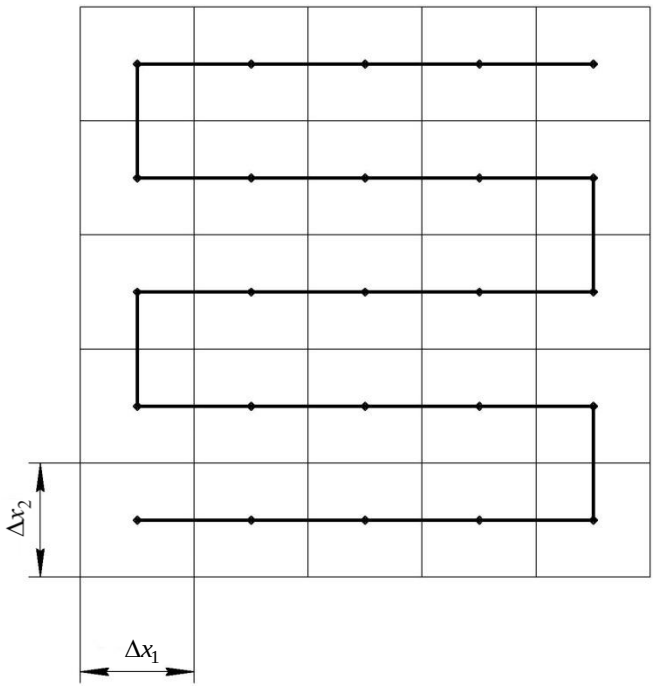


Рис. 1. Телевизионная развертка для размерности 2. Для наглядности соединены середины гиперкубов (здесь квадрат со сторонами Δx_1, Δx_2 — это частный случай гиперкуба)

Выбор данного типа развертки обусловлен относительной простотой формирования развертки с точки зрения программной реализации.

В рамках данной работы считаем, что исходное n-мерное множество X ограничено $\left(\mathbf{x_i} \in \left[\mathbf{xd_i}, \mathbf{xu_i}\right]\right)$, замкнуто и выпукло. Тогда задавшись некоторыми числами $\mathbf{a_i}\left(i = \overline{1,n}\right)$, которые будут обозначать количество узловых точек по i-ой координате, получим общее число гиперкубов:

$$N_f = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{a_i}.$$

Каждый из них ограничивает некоторую область в пространстве $\mathbb{R}_n$. Тогда длина ребра гиперкуба вдоль i-ой координаты:

$$\Delta \mathbf{x_i} = \frac{\mathbf{xu_i} - \mathbf{xd_i}}{\mathbf{a_i} - 1}; i = \overline{1, n}.$$

Введем сквозную нумерацию вершин этих гиперкубов таким образом:

1) сначала занумеруем вершины вдоль возрастания одной из координат (для определенности пусть будет координата с номером n) при фиксированных остальных. Тогда вершина с координатами $\{\mathbf{xd}_1, \mathbf{xd}_2 \ldots \mathbf{xd_n}\}$ будет иметь номер 1, а с координатами $\{\mathbf{xd}_1, \mathbf{xd}_2 \ldots \mathbf{xu_n}\}$ номер $\mathbf{a_n}$, координаты промежуточных можно получить

$$\{\mathbf{xd}_1, \mathbf{xd}_2 \ldots \mathbf{xd_n} + \Delta \mathbf{x_n} \cdot i\}, i = \overline{1, \mathbf{a_n}};$$

2) теперь сделаем шаг по координате $\mathbf{x_{n-1}}$ и занумеруем вершины в порядке уменьшения координаты $\mathbf{x_n}$. Тогда вершины будут иметь координаты

$$\{\mathbf{xd}_1, \mathbf{xd}_2 \ldots \mathbf{xd_{n-1}} + \Delta \mathbf{x_{n-1}}, \mathbf{xu_n} - \Delta \mathbf{x_n} \cdot i\}, i = \overline{1, \mathbf{a_n}}$$

и номера в сквозной нумерации с $(\mathbf{a_n} + 1)$ по $2\mathbf{a_n}$. По достижении граничного значения по координате $\mathbf{x_{n-1}}$, сделаем шаг по координате $\mathbf{x_{n-2}}$ и продолжим нумеровать вершины вдоль убывания координаты $\mathbf{x_{n-1}}$;

3) продолжая таким образом, получим взаимнооднозначное дискретное отображение множества $\mathbf{X}$ на одномерное множество целых чисел – телевизионную развертку

Алгоритм получения ближайшего «наименьшего» номера вершины к заданной координате $(\mathbf{y} \in \mathbf{X} : \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \ldots \mathbf{y_n}\})$, прямое преобразование, тогда выглядит следующим образом:

1) Рассчитаем вспомогательное число d:

$$\mathbf{d_i} = \frac{\mathbf{y_i} - \mathbf{xu_i}}{\Delta \mathbf{x_i}} + 1,\ i = \overline{1, n};$$

$$\mathbf{d_i} = \mathbf{a_i} - \mathbf{d_i} \ \forall \frac{\mathbf{d_{i-1}}}{2} = 0,\ i = \overline{2, n-1};$$

$$\mathbf{d_n} = \mathbf{a_n} - \mathbf{d_n} + 1, \frac{\mathbf{d_{n-1}}}{2} = 0;$$

обозначающее абсолютный сдвиг вершины, имеющей наименьший номер, относительно условного начала отсчета $\{\mathbf{xd}_1, \mathbf{xd}_2 \ldots \mathbf{xd_n}\}$. Оператор $\cdot$ обозначает взятие наименьшего целого.

2) Теперь можно вычислить номер вершины:

$$No = \sum_{i=1}^{n} \left(\prod_{j=i+1}^{n} \mathbf{a_j} \cdot (\mathbf{d_i} - 1) \right).$$

Значение произведения при (j=n+1) равно единице.

Алгоритм, обратный данному, т.е. для вычисления координаты вершины $\boldsymbol{y}$ по данному номеру No, обратное преобразование, выглядит следующим образом:

1) Вычислим количество интервалов:

$$No_in^{*1} = No - 1.$$

2) Вычислим вспомогательное число d:

$$\begin{cases} \mathbf{d_i} = \dfrac{No_in^{*1}}{\prod_{j=i+1}^{n} \mathbf{a_j}} + 1 \\ No_in^{*(i+1)} = No_in^{*i} - (\mathbf{d_i} - 1) \cdot \prod_{j=i+1}^{n} \mathbf{a_j} \end{cases}, \ i = \overline{1, n},$$

$$\mathbf{d1}_1 = \mathbf{d}_1,$$

$$\mathbf{d1_i} = \mathbf{a_i} - \mathbf{d_i} + 1, \forall \frac{\mathbf{d_{i-1}}}{2} = 0, \ i = \overline{2, n}.$$

3) Теперь можно определить координаты:

$$\mathbf{y_i} = (\mathbf{d1_i} - 1) \cdot \Delta \mathbf{x_i} + \mathbf{xd_i}, \ i = \overline{1, n}.$$

Теперь имея некоторый решатель задач (2) – (4) на условный экстремум алгоритм определения подходящего значения B_{i-1} для очередной итерации состоит из:

1) определения ближайшего, наименьшего номера No, такого, что заданная фазовая координата лежит между ним и точкой с номером $No+1$;

2) определения фазовой координаты $\mathbf{x^{No}}$, по которой происходит изменение дискретной функции Беллмана;

3) Вычисление приближения к дискретной функции Беллмана по формуле:

$$B_{i-1}(x) = B_{i-1}^{No} + \left(B_{i-1}^{No+1} - B_{i-1}^{No}\right) \cdot \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}^{\mathbf{No}}}{\mathbf{x}^{\mathbf{No}+1} - \mathbf{x}^{\mathbf{No}}}.$$

Таким образом, весь алгоритм в целом представляется в виде последовательности независимых задач (2) - (4)для каждой точки расчетной области фазовых переменных в рамках одного временного шага.

Стоит отметить, что алгоритм прямого преобразования в параметр развертки работает плохо. Во-первых, он некорректно работает в случае, если количество точек нечетное хотя бы по одной координате и, во-вторых, иногда алгоритм выдает соседний номер (по крайней мере для количества координат равное 3) на единицу больше. Первое ограничение в целом не существенно, а второе предлагается парировать проверкой принадлежности координаты y диапазону $\left[\mathbf{x}^{\mathbf{No}}, \mathbf{x}^{\mathbf{No}+1}\right]$.

Описание модельной задачи. Для проверки предлагаемого алгоритма рассмотрим задачу об оптимальном наборе высоты самолета (ЛА) с критерием быстродействия [3], [7]. Динамическая система описывается системой дифференциальных уравнений движения:

$$\mathbf{f}(\mathbf{z}) = \begin{cases} \dot{h} = u \cdot v \\ \dot{v} = \dfrac{T(h)}{m} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\rho(h) \cdot S \cdot v^2}{m} \cdot C_{D,0} - 2\dfrac{m \cdot g_0^2}{\rho(h) \cdot S \cdot v^2} \cdot C_{D,1} - u g_0 \\ \dot{m} = -C_s(v) \cdot T(h) \end{cases}$$

где $\mathbf{z} = (h\, v\, m)^T$, h — текущая высота полета самолета, v — текущая скорость полета самолета, m — текущая масса ЛА, u — угол тангажа, $T(h)$ — тяга двигателя ЛА, $\rho(h)$ — плотность атмосферы, $C_s(v)$ — коэффициент массового расхода топлива. Символом «·» над фазовыми координатами отмечена производная по времени.

$$T(h) = C_{t,1} \cdot \left(1 - \frac{h}{C_{t,2}} + h^2 \cdot C_{t,3}\right),$$

$$\rho(h) = \frac{p_0 \cdot \left(\dfrac{\theta_0 - \beta \cdot h}{\theta_0}\right)^{\frac{g_0}{\beta \cdot R}}}{R \cdot (\theta_0 - \beta \cdot h)},$$

$$C_s(v) = C_{s,1} \cdot \left(1 + \frac{v}{C_{s,2}}\right).$$

В статье [7] система уравнений движения записана с опечаткой, это станет очевидно, если аккуратно произвести преобразования. В диссертации [3, стр. 54] система записана верно.

Величины коэффициентов представлены в таблице 1.

Рассматривается задача быстродействия:

$$J\left(t_f\right) = t_f = \int_0^{t_f} \mathrm{d}t .$$

Критерий является аддитивным.

В начальный момент времени ЛА находится в точке фазового пространства:

$$\mathbf{z}_1 = \begin{pmatrix} h \\ v \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3480\,м \\ 128.6\,м/с \\ 69000\,кг \end{pmatrix}.$$

Таблица 1

Метрики RMSE и MAPE для моделей AT-LSTM, NNETAR, Holt-Winters, ARIMA, FBM при прогнозировании 1 значение

Коэффициент	Величина	Коэффициент	Величина
S	122,6 м^2	θ_0	288,2 К
g_0	9,81 м/с^2	β	6,5·10^{-3} К/м
$C_{t,1}$	1,41·10^5 Н	R	288 Дж/(кг·К)
$C_{t,2}$	14910,816 м	$C_{s,1}$	1,0555·10^{-5} кг/(с·Н)
$C_{t,3}$	6,996·10^{-10} 1/м^2	$C_{s,2}$	441,907(7) м/с
p_0	1,013·10^5 Па	$C_{D,0}$	2,42·10^{-2}
		$C_{D,1}$	4,69·10^{-2}

В конечный момент времени t_f ЛА должен находится в точке фазового пространства:

$$\mathbf{z}_2 = \begin{pmatrix} h \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9144 \\ 191 \end{pmatrix}$$

Ограничение на управление:

$$0,262 \geq u \geq -0,262 .$$

Систему условий, полученную с помощью принципа максимума см. [3] или [7]. Оговоримся только, что в данном исследовании особое управление отыскивалось с применением скобок Пуассона.

Результаты моделирования. На рис. 2-5 представлены структуры управления в модельной задаче, полученные по алгоритму. На графиках обозначены зависимости фазовых координат и управления от времени для различных структур:

1) Структура О — полностью особая экстремаль управления;
2) Структура ОР — особая экстремаль, затем регулярная;
3) Структура РО — регулярная экстремаль, затем особая;
4) Структура ОРО — особая экстремаль, затем регулярная, затем особая;
5) Структура РОР — регулярная экстремаль, затем особая, затем регулярная.

Несмотря на немного рваное управление, представленное на рис. 5, можно сделать предположение о структуре управления. Приняв эту гипотезу в качестве первого приближения к оптимальной траектории, в рамках принципа максимума попытаемся определить более точное решение.

Для получения представленных решений использовалась двухшаговая условная оптимизация: на первом шаге перебором определялось приближение к решению, на втором полученное приближение уточнялось с применением алгоритма Левенберга-Марквардта (Minpack) или методом COBYLA [2].

Структура управления (РОР), полученная в работе [7], прослеживается.

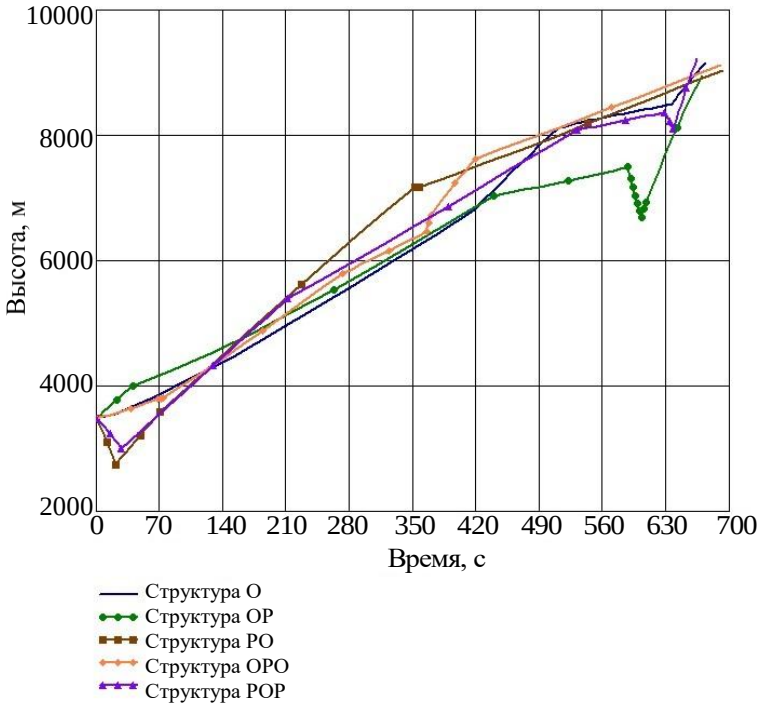


Рис. 2. Зависимость высоты полета ЛА от времени

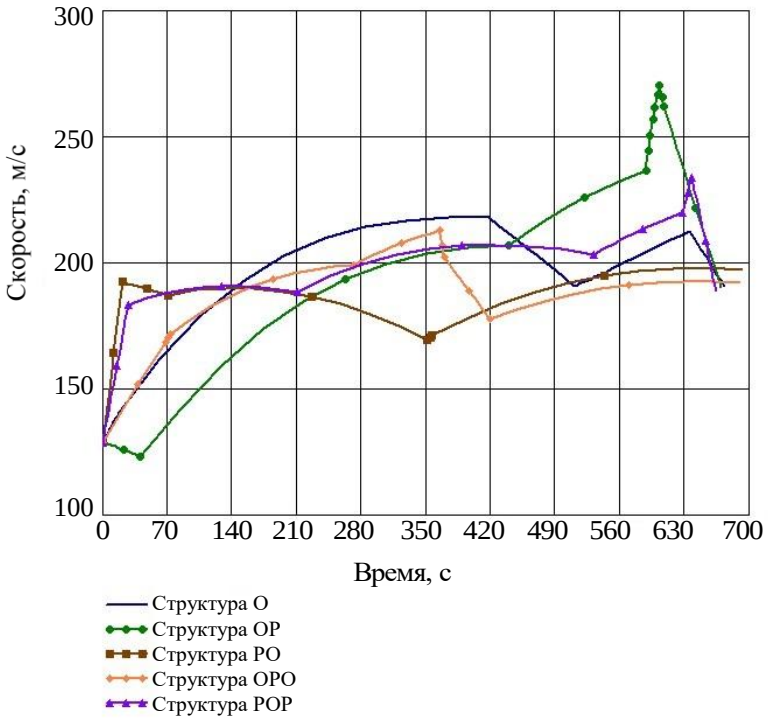


Рис. 3. Зависимость скорости полета ЛА от времени

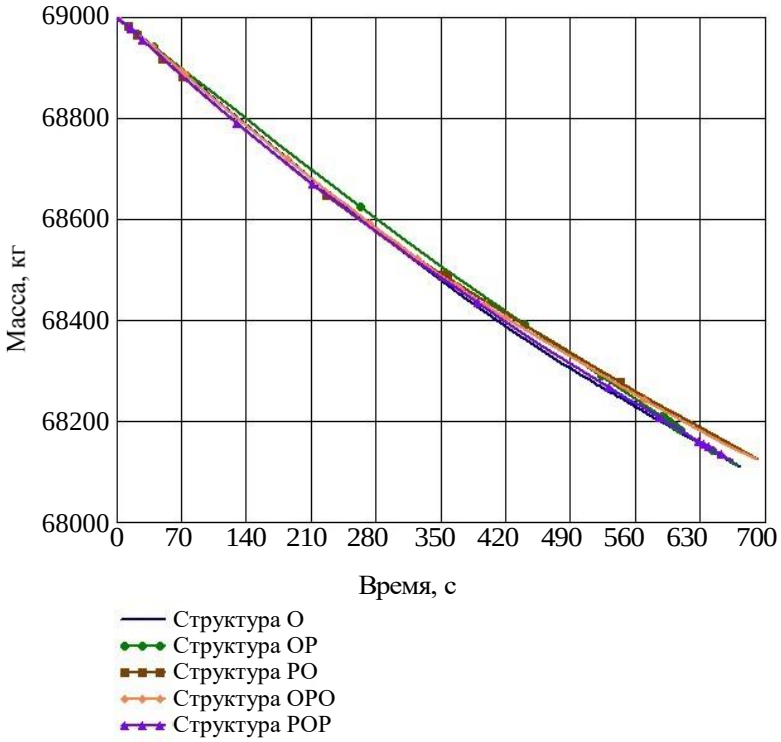


Рис. 4. Зависимость массы ЛА от времени

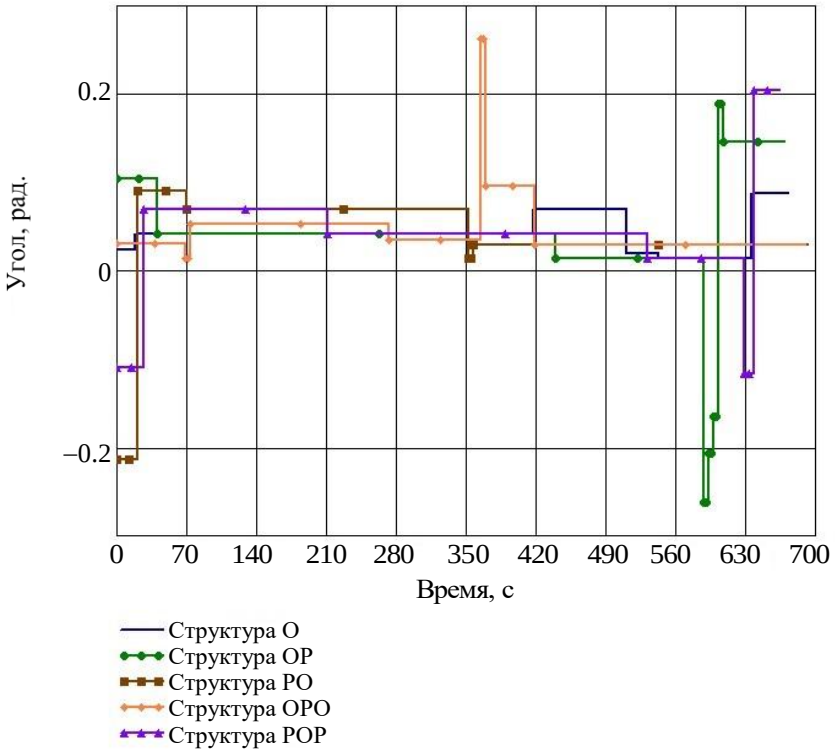


Рис. 5. Зависимость угла атаки ЛА от времени

Для решения краевой задачи принципа максимума в качестве начального приближения к длительностям регулярных и особых участков использовалось решение, полученное по алгоритму. Получить все типы траекторий в рамках принципа максимума не удалось.

Зависимости фазовых параметров от времени представлены на рис. 6-9.

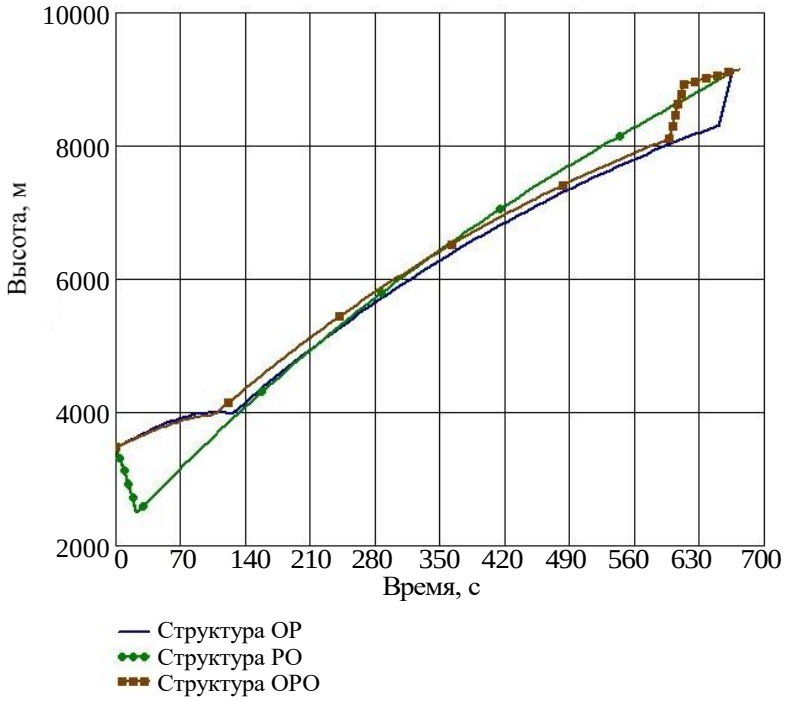


Рис. 6. Зависимость высоты полета ЛА от времени

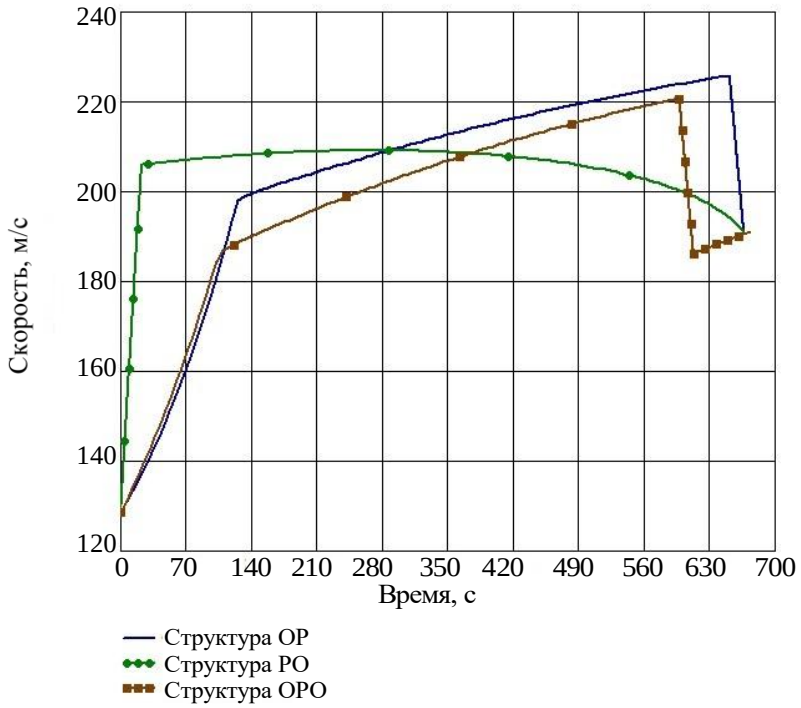


Рис. 7. Зависимость скорости полета ЛА от времени

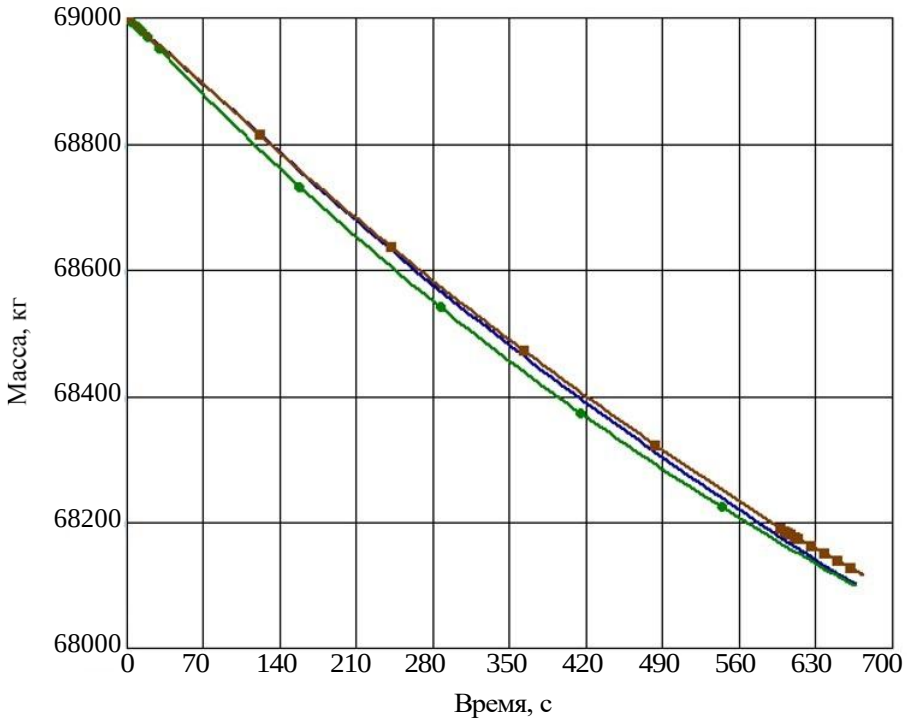


Рис. 8. Зависимость массы ЛА от времени

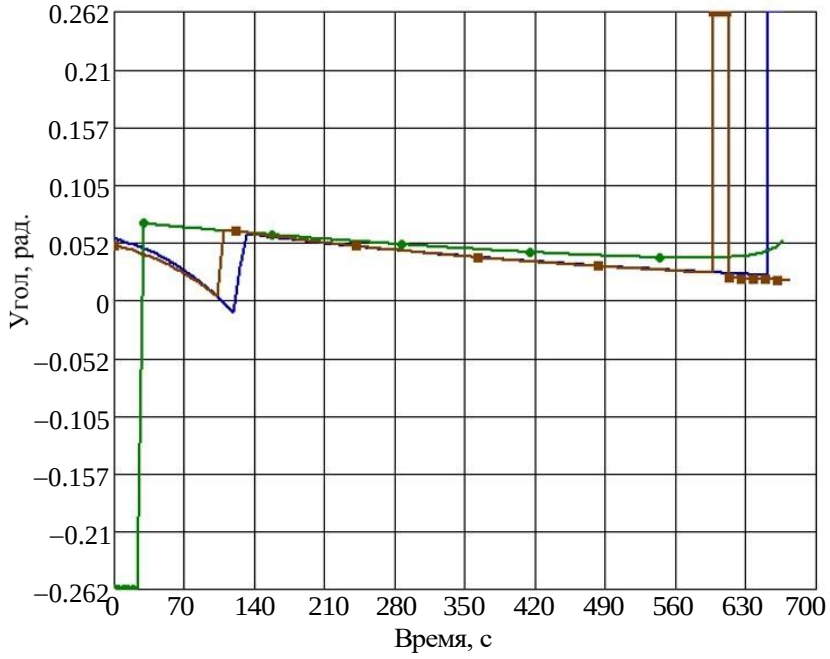


Рис. 9. Зависимость угла атаки ЛА от времени

Заметим, что в исследовании [7] показывается, что на особой экстремали особое управление зависит только от фазы. Следовательно на рис. 9 для структур ОР и ОРО графики должны совпадать хотя бы для первого участка. Однако этого не наблюдается в силу невыполнения условий оптимальности.

Заключение. Почти все структуры управлений, найденные по алгоритму, существуют также и в рамках принципа максимума Понтрягина. По большому счету для найденных структур удалось решить только транспортную задачу, т.е. для этих траекторий не все условия оптимальности выполняются. Исключением является траектория со структурой РОР, полученная в [7]. По-видимому, она и является оптимальной для данной задачи.

Дальнейшие исследования задач с помощью предложенного алгоритма должны установить его пригодность в целом для проблем механики управляемого движения.

Работа выполнена в рамках гранта Российского научного фонда (https://rscf.ru/project/25-79-30009/)

ЛИТЕРАТУРА

[1] Хорошавин В.С., А.В. Зотов. *Особое оптимальное управление нелинейными объектами*. Киров, Вятский государственный университет, 2019, 208 с.

[2] Гурман В.И., Ни Минь Кань. Вырожденные задачи оптимального управления. III. *Автоматика и телемеханика*, 2011, № 5, с. 32-46.

[3] Damien Goubinat. *Contrôle géométrique et méthodes numériques : application au problème de montée*: Doctoral dissertation: defended on 14.06.2017. Toulouse, Institut National Polytechnique de Toulouse, 2017. DOI: 10.70675/20f8d00az91c1z41c4zbe48s8a98a9d8f8c9

[4] L'Afflitto A., Haddad W.M. *Optimal singular control for nonlinear semistabilization*. American Control Conference. Chicago, IL, USA, 2015. DOI: 10.1109/ACC.2015.7172282

[5] Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. *Математическая теория оптимальных процессов*. Москва, Наука, 1983, 384 с.

[6] Габасов Р., Кириллова Ф.М. *Особые оптимальные управления*. Москва, Наука, 1973, 256 с.

[7] Cots O., Delpy P., Gergaud J., Goubinat D. On the minimum time optimal control problem of an aircraft in its climbing phase. *7th Euporean Conferencer for Aeronautics and Aerospace Sciences (EUCASS 2017)*. Milan, Italy, 2017, pp. 1-14.

[8] Брайсон А., Хо Ю-Ши. *Прикладная теория оптимального управления*. Москва, Мир, 1972, 544 с.

[9] Иванов В.П. Построение оптимальных траекторий летательного аппарата на множестве сингулярных кривых. *Вестник ПНИПУ. Аэрокосмическая техника*, 2023, № 72, 42-58 с.

[10] Glizer V.Y. Robust solution of the multi-model singular linear-quadratic optimal control problem: regularization approach. *Axioms*, 2023, vol. 12, no. 955, 42 p. DOI: https://doi.org/10.3390/axioms12100955.

[11] Mall K., Taheri E., Prabhu P. Solving singular control problems using uniform trigonometrization method. AIChE, 2021, vol. 67, iss. 6. DOI: https://doi.org/10.1002/aic.17209.

[12] Foroozandeh Z., Shasmi M., Azmyakov V., Shafiee M. A modified pseudospectral method for solving trajectory optimization problems with singular arc. *Mathematical Methods in the Applied Science*, 2016, vol. 40, no. 5. DOI: 10.1002/mma.4097

[13] Кротов В.Ф., Гурман В.И. *Методы и задачи оптимального управления*. Москва, Наука, 1973, 448 с.

[14] Тятюшкин А.И. Параллельные вычисления в задачах оптимального управления. *Сибирский журнал вычислительной математики*, 2000, Т. 3, № 2, 182-190 pp.

[15] Васильев Ф.П. *Методы оптимизации*. Москва, МЦНМО, 2002, 624 с.

[16] Стронгин Р.Г. *Численные методы в многоэкстремальных задачах (информационно-статистические алгоритмы)*. Москва, Наука, 1978, 240 с.

[17] Jacob Williams, repositories [Электронный ресурс]. URL: https://github.com/jacobwilliams?tab=repositories (дата обращения: 06.01.2025).

Статья поступила в редакцию 22.05.2025

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Сесюкалов В.А. Моделирование структуры управления на основе дискретного принципа Беллмана в задачах с особым управлением. *Математическое моделирование и численные методы*, 2026, № 1, с. 3–21.

Сесюкалов Владимир Алексеевич — ассистент каф. 601 «Космические системы и ракетостроение» Московского авиационного института, МАИ. e-mail: ralfhp@yandex.ru

Modeling of the control structure based on a discrete Bellman principal applied to problems with special controls

© V.A. Valishin[1], A.V. Zaprivoda[2], S.S. Tsukhlo[1]

Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, 125993, Russia

The purpose of this article is to obtain control structures in problems of dynamic object control. The control structure in this work is called regular and special (in the sense of the maximum principle) control sections leading to the solution of the transport problem. The paper presents an algorithm for determining the control structure based on the Bellman optimality principle for an additive quality criterion. The algorithm is proposed for use at the initial stages of the study to determine the first approximation. The algorithm involves searching for control, including transfer time, in the considered phase region on a grid of phase parameters. The Bellman function is approximated using a piecewise linear television involute. Methods for projecting the phase coordinate to the nearest "least" node number in the involute and back, from a known involute node number to the corresponding phase coordinate are also given. The algorithm is then applied to the problem of the fastest ascent of an aircraft (a time-optimal problem) containing special control extremals. The solutions obtained under the appliance of the proposed algorithm are given, and some efforts has been made to obtained similar trajectories within appliance of the maximum principle. The presented algorithm, in general, showed satisfying convergence to solutions according to the maximum principle, satisfying the conditions of

the transport problem. However, it was not possible to satisfy all the necessary optimality conditions for the structures obtained by the algorithm. Merits of algorithm are acquiring of high variety of trajectories, parallel processing, easy consideration of phase constraints.

***Keywords**: Bellman principal, optimization, maximum principal, special controls, involute, control structure*

REFERENCES

[1] Khoroshavin V.S., A.V. Zotov. *Osoboe optimal'noe upravlenie nelinejnymi ob"ektami* [Special optimal control of nonlinear objects]. Kirov, FGEI HPE VyatSU, 2019, 208 p.

[2] Gurman V.I., Kang N.M. Degenerate problems of optimal control. III. *Automation and Remote Control*, 2011, vol. 72, no. 5, pp. 929-943.

[3] Damien Goubinat. *Contrôle géométrique et méthodes numériques: application au problème de montée*. Doctoral dissertation: defended on 14.06.2017. Toulouse, Institut National Polytechnique de Toulouse, 2017. DOI: 10.70675/20f8d00az91c1z41c4zbe48s8a98a9d8f8c9

[4] L'Afflitto A., Haddad W.M. *Optimal singular control for nonlinear semistabilization*. American Control Conference. Chicago, IL, USA, 2015. DOI: 10.1109/ACC.2015.7172282

[5] Pontryagin L.S., Boltyanskij V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. Matematicheskaya teoriya optimal'nyh processov [Mathematical theory of optimal processes]. Moscow, Publishers Nauka, 1983, 384 p.

[6] Gabasov R., Kirillova F.M. *Osobye optmal'nye upravleniya* [Special optimal controls]. Moscow, Publishers Nauka, 1973, 256 p.

[7] Cots O., Delpy P., Gergaud J., Goubinat D. On the minimum time optimal control problem of an aircraft in its climbing phase. *7th Euporean Conferencer for Aeronautics and Aerospace Sciences (EUCASS 2017)*. Milan, Italy, 2017, pp. 1-14.

[8] Brajson A., Ho YU-SHi. *Prikladnaya teoriya optimal'nogo upravleniya* [Applied Theory of Optimal Control]. Moscow, Мир, 1972, 544 p.

[9] Ivanov V.P. Postroenie optimal'nyh traektorij letatel'nogo apparata na mnozhestve singulyarnyh krivyh [Construction of optimal trajectories of an aircraft on a set of singular curves]. *Vestnik Permskogo nacional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Aerokosmicheskaya tekhnika* [Bulletin of Perm national research polytechnic university. Aerospace engineering], 2023, no. 72, 42-58 pp.

[10] Glizer V.Y. Robust solution of the multi-model singular linear-quadratic optimal control problem: regularization approach. *Axioms*, 2023, vol. 12, no. 955, 42 p. DOI: https://doi.org/10.3390/axioms12100955.

[11] Mall K., Taheri E., Prabhu P. Solving singular control problems using uniform trigonometrization method. *AIChE*, 2021, vol. 67, iss. 6. DOI: https://doi.org/10.1002/aic.17209.

[12] Foroozandeh Z., Shasmi M., Azmyakov V., Shafiee M. A modified pseudospectral method for solving trajectory optimization problems with singular arc. *Mathematical Methods in the Applied Science*, 2016, vol. 40, no. 5. DOI: 10.1002/mma.4097

[13] Krotov V.F., Gurman V.I. *Methods and problems of optimal control* [Metody i zadachi optimal'nogo upravleniya]. Moscow, Publishers Nauka, 1973, 448 p.

[14] Tyatyushkin A.I. Parallel'nye vychisleniya v zadachah optimal'nogo upravleniya [Parallel computations in Optimal control problems]. *Numerical Analysis and Applications*, 2000, vol. 3, no. 2, 182-190 pp.

[15] Vasil'ev F.P. *Metody optimizacii* [Optimization Methods]. Moscow, Izdatelstvo MCNMO, 2002, 624 p.

[16] Strongin R.G. *CHislennye metody v mnogoekstremal'nyh zadachah (informacionno-statisticheskie algoritmy)* [Numerical methods in multiextremal problems (information-statistical algorithms)]. Moscow, Publishers Nauka, 1978, 240 p.

[17] Jacob Williams, repositories [Electronic resource]. URL: https://github.com/jacobwilliams?tab=repositories (accessed: 06.01.2025).

Sesyukalov V.A., Assistant Professor, Department of Space System and Rocket Building, Moscow Aviation Institute (National Research University). e-mail: curackin.vlad@yandex.ru