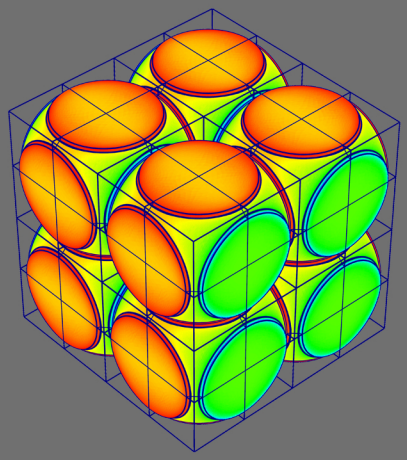
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Карпушкин С.В. Моделирование и оптимизация процесса механического перемешивания жидкости в вертикальной емкости. Математическое моделирование и численные методы, 2025, № 4, с. 148–172.

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/394/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.216.58
14.03.2026 22:20:27

УДК 519.873 DOI: 10.18698/2309-3684-2025-4-148172

Моделирование и оптимизация процесса механического перемешивания жидкости в вертикальной емкости

© С.В. Карпушкин

ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный технический университет»,
г. Тамбов, 392000, Россия

Предложена математическая модель процесса механического перемешивания (ПМП) гомогенной жидкости в вертикальном емкостном аппарате, включающая осредненные по Рейнольдсу уравнения Навье-Стокса и уравнения полуэмпирической RNG k-ε модели турбулентности в цилиндрической системе координат. Вывод об адекватности предложенной модели обоснован сравнением значений затрат мощности на перемешивание, определенных по результатам расчетов поля скоростей перемешиваемой жидкости, лабораторного и промышленного экспериментов: измерений напряжения питания электродвигателя привода механического перемешивающего устройства (МПУ) и силы потребляемого тока при перемешивании гомогенной жидкости и вращении мешалки в пустом аппарате. Постановка задачи оптимизации параметров МПУ предусматривает выбор значений диаметра и высоты лопасти мешалки, высоты ее установки над днищем аппарата и частоты вращения ее вала, минимизирующих дисперсию длины вектора скорости перемешиваемой жидкости. Значения дополнительных параметров конструкции МПУ предложено определять методом перебора при оптимальных значениях вышеперечисленных основных. Основой для разработки численного алгоритма решения задачи послужила методика планирования многофакторного вычислительного эксперимента. Приведены примеры решения задач оптимизации параметров конструкции и режима функционирования МПУ лабораторного и промышленного аппаратов. Оптимальные значения ширины лопастей наиболее распространенных механических мешалок превышают рекомендуемые Руководящим документом НИИХИММАШ в 1.7-2.5 раза. По результатам решения задачи оптимизации параметров МПУ промышленного аппарата АО "Пигмент", г. Тамбов предложены модификации его конструкции, позволившие устранить образование отложений на стенках аппарата, сократить на 10% продолжительность стадии репульпации пасты фталоцианина меди, уменьшить на 16 % затраты мощности на перемешивание.

Ключевые слова: *вертикальный емкостной аппарат, механическое перемешивание жидкости, уравнения Навье-Стокса, модель турбулентности, лабораторный и промышленный эксперимент, критерий эффективности перемешивания, многофакторный вычислительный эксперимент.*

Введение. Вертикальные емкости с механическими мешалками предназначены для реализации широкого круга химико-технологических процессов: получение растворов, суспензий и эмульсий, реализация химических реакций, в том числе в газожидкостных средах. Они широко применяются в технологических схемах химических, фармацевтических, пищевых производств.

В проектно-конструкторских подразделениях этих производств нередко ставятся и решаются задачи расчета и подбора механического перемешивающего устройства (МПУ) вертикального емкостного аппарата. Особенно часто эта задача решается для аппаратов технологических схем многоассортиментных малотоннажных производств (химических красителей и полупродуктов, добавок к полимерным материалам), в которых при выпуске разных продуктов реализуются различные процессы.

Универсальным способом математического описания вынужденного движения вязкой капельной жидкости, в том числе в замкнутом объеме, являются уравнения Навье-Стокса, дополненные уравнением неразрывности потока [1], результатом решения которых является трехмерное поле скоростей жидкости. Основным затруднением, долгое время сдерживавшим практическое применение этих уравнений, являлось отсутствие вычислительных систем достаточной мощности и необходимого быстродействия.

Это затруднение привело к разработке теоретических основ расчета процесса механического перемешивания (ПМП) по результатам экспериментов в лабораториях ЛенНИИХИММАШ в 80-х годах XX века, см. [2], и нормативного руководящего документа НИИХИММАШ [3], который до настоящего времени активно используется для расчетов МПУ промышленных вертикальных емкостных аппаратов. Однако практика применения приведенных в [2, 3] расчетных соотношений, рекомендуемых для расчетов групп мешалок аналогичных конструкций (с горизонтальными, вертикальными лопастями), вызывает сомнения в их универсальности. Поэтому подбор МПУ вертикальных емкостных аппаратов промышленных производств нередко осуществляется на основе результатов экспериментов по перемешиванию конкретных сред мешалками разных конструкций.

Большинство научных публикаций последних 15-20 лет, посвященных результатам исследований ПМП, ориентировано на определение параметров МПУ по результатам анализа поля скоростей перемешиваемой жидкости с применением систем конечно-элементного анализа (COMSOL, ANSYS и др.). В большинстве публикаций, см., например, [4 – 8], в качестве математического описания ПМП используются уравнения Навье-Стокса, осредненные по Рейнольдсу и замкнутые полуэмпирическими моделями турбулентности, т.е. исследуется установившееся движение перемешиваемой жидкости. Отмечается необходимость учета особенностей конкретного процесса при подборе модели турбулентности и проверки ее соответствия результатам натурных экспериментов. Анализ результатов этих исследований приводит к выводу, что для аппаратов с мешалками, относящимися к семейству лопастных, наиболее приемлема RNG $k-\varepsilon$ модель турбулентности, см. [9].

Некоторые работы посвящены определению одного конкретного параметра МПУ, см., например, [10], анализу результатов расчета поля скоростей для заданной конструкции аппарата и МПУ [11], зависимости затрат энергии на перемешивание от изменений параметров конструкции мешалки (частоты вращения, диаметра и расстояния от днища аппарата) [8], предлагаются различные подходы к оценке эффективности ПМП [13], в конечном счете сводящиеся к максимизации производительности или минимизации энергозатрат. Математические формулировки и подходы к решению задачи определения параметров конструкции и режима функционирования МПУ вертикального емкостного аппарата, обеспечивающих максимальную эффективность ПМП, не приводятся.

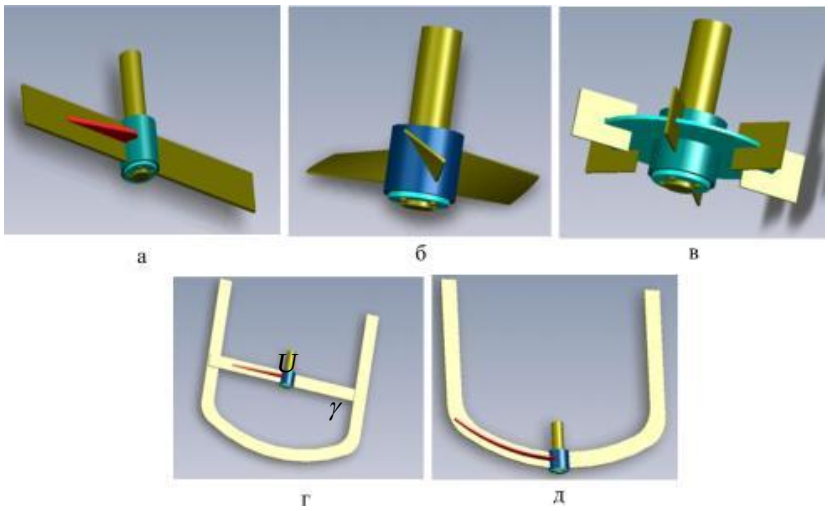


Рис. 1. Основные размеры вертикального емкостного аппарата и МПУ

МПУ большинства промышленных вертикальных емкостных аппаратов оснащаются мешалками, конструкции которых представлены на рис. 1. К числу основных параметров конструкций МПУ относятся характеристики мешалки (диаметр D_m и ширина лопасти H_m), а также высота ее установки над днищем аппарата h_{hm}, см. рис. 2. На этом рисунке также показаны основные размеры вертикального емкостного аппарата (внутренний диаметр D_r, и высота H_r корпуса, высота заполнения при отсутствии перемешивания L).

Дополнительным параметром конструкции трехлопастной мешалки, см. рис. 1б, является угол наклона ее лопастей к горизонтали, турбинной открытой мешалки, см. рис. 1в, – число лопастей и диаметр диска, якорной и рамной мешалок, см. рис. 1г и 1д, – высота лопасти. Режим функционирования МПУ характеризуется единственным параметром – частотой вращения вала мешалки n.

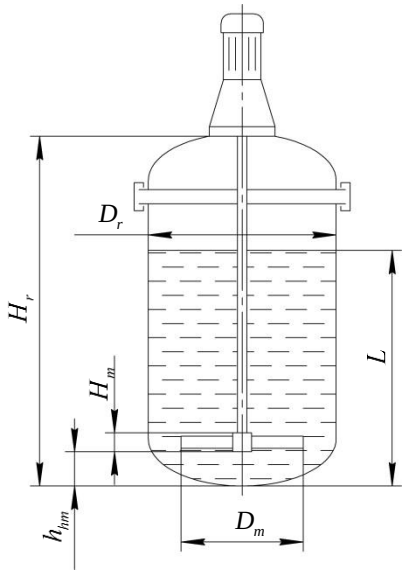


Рис. 2. Основные размеры вертикального емкостного аппарата и МПУ

Таким образом, оптимизация конструкции и режима функционирования МПУ вертикального емкостного аппарата заключается в выборе таких значений D_m, H_m, h_{hm} и n, которые обеспечивают максимальную эффективность ПМП. В процессе выбора основных параметров конструкции конкретной мешалки значения дополнительных предлагается фиксировать согласно рекомендациям [3], а затем решать задачи их оптимизации при фиксированных оптимальных значениях основных параметров.

Математическая модель ПМП в вертикальном емкостном аппарате с МПУ. Исследуется установившееся движение гомогенной жидкости в вертикальной цилиндрической емкости, поэтому предлагаемая модель включает осредненные по Рейнольдсу уравнения Навье-Стокса, дополненные RNG $k-\varepsilon$ моделью турбулентности, в цилиндрической системе координат.

Приняты допущения об изотермичности ПМП, т.к. изменения температуры жидкости в процессе перемешивания незначительны, и о симметричности поля скоростей перемешиваемой жидкости относительно оси вращения мешалки, т.к. она, как правило, совпадает с вертикальной осью симметрии емкостного аппарата. Кроме того, авторы [2] отмечают усиление радиальных и аксиальных потоков гомогенной жидкости при установившемся режиме ее перемешивания в вертикальной емкости за счет ослабления тангенциальных потоков. Как следствие, моделируется двумерное поле скоростей перемешиваемой жидкости (по высоте l и радиусу r аппарата). С учетом этих допущений система уравнений Навье-Стокса, осредненных по Рейнольдсу, примет вид:

$$\bar{u}_l \frac{\partial \bar{u}_l}{\partial l} + \bar{u}_r \frac{\partial \bar{u}_l}{\partial r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P_l}{\partial l} + \nu\left(\frac{\partial^2 \bar{u}_l}{\partial l^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_l}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \bar{u}_l}{\partial r}\right) + \\ + \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial l}\left(-\rho \bar{u}_l'^2\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(-\rho r \bar{u}_l' \bar{u}_r'\right)\right], \quad (1)$$

$$\bar{u}_l \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial l} + \bar{u}_r \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial r} = F_r - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P_r}{\partial r} + \nu\left(\frac{\partial^2 \bar{u}_r}{\partial l^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \bar{u}_r}{\partial r} - \frac{\bar{u}_r}{r^2}\right) + \\ + \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial l}\left(-\rho \bar{u}_l' \bar{u}_r'\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(-\rho r \bar{u}_r'^2\right)\right], \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial l}\left(r\bar{u}_l\right) + \frac{\partial}{\partial r}\left(r\bar{u}_r\right) = 0, \quad (3)$$

где $\bar{u}_l$, $\bar{u}_r$ — компоненты вектора скорости перемешиваемой жидкости по высоте и радиусу аппарата, м/с;

$\bar{u}_l'$, $\bar{u}_r'$ — компоненты вектора скорости турбулентных пульсаций, м/с;

$$P_l = \rho g l + \frac{\rho \bar{u}_l^2}{2}, \; P_r = \rho g l + \frac{\rho \bar{u}_r^2}{2}$$

— составляющие вектора гидродинамического давления, Па, определяемые с применением интеграла Бернулли, т.к. рассматривается установившееся движение однородной несжимаемой жидкости;

$$F_r = \frac{1}{r}\left(2\pi r n\right)^2$$

— удельная центробежная сила, Н/кг;

ρ — плотность перемешиваемой жидкости, кг/м^3;

ν — ее кинематическая вязкость, м^2/с;

g — ускорение свободного падения, м/с^2.

В уравнения (1) – (3) входят пять неизвестных: составляющие вектора скорости ($\bar{u}_l$, $\bar{u}_r$) и напряжения Рейнольдса ($-\bar{u}_l'^2$, $-\bar{u}_l'\bar{u}_r'$, $-\bar{u}_r'^2$). Для определения всех неизвестных к ним добавлены два уравнения полуэмпирической RNG $k-\varepsilon$ модели турбулентности:

$$\frac{\partial}{\partial l}\left(\rho k r \bar{u}_l\right) + \frac{\partial}{\partial r}\left(\rho k r \bar{u}_r\right) = \frac{\partial}{\partial l}\left(a_k \mu_{eff}\frac{\partial k}{\partial l}\right) + \frac{\partial}{\partial r}\left(a_k \mu_{eff}\frac{\partial k}{\partial r}\right) + G_k - \rho\varepsilon, \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial l}\left(\rho \varepsilon r \bar{u}_l\right) + \frac{\partial}{\partial r}\left(\rho \varepsilon r \bar{u}_r\right) = \frac{\partial}{\partial l}\left(a_\varepsilon \mu_{eff}\frac{\partial \varepsilon}{\partial l}\right) + \frac{\partial}{\partial r}\left(a_\varepsilon \mu_{eff}\frac{\partial \varepsilon}{\partial r}\right) + \\ + C_{1\varepsilon}\frac{\varepsilon}{k}G_k - C_{2\varepsilon}\rho\frac{\varepsilon^2}{k} - R_\varepsilon, \quad (5)$$

где

$$k = 0.5\left(-\overline{u}_l'^2 - \overline{u}_l'\overline{u}_r' - \overline{u}_r'^2\right)$$

— кинетическая энергия турбулентности, Дж/кг;

$$\varepsilon = \nu \frac{\partial}{\partial k}\left(-\overline{u}_l'^2 - \overline{u}_l'\overline{u}_r' - \overline{u}_r'^2\right)$$

— скорость диссипации кинетической энергии, Дж/(кг·с);

$$\mu_{eff} = C_\mu \rho \frac{k^2}{\varepsilon}$$

— эффективная вязкость перемешиваемой жидкости, Па·с;

$$a_k = a_\varepsilon = 1.393$$

— обратные эффективные числа Прандтля для k и ε соответственно;

$$C_{1\varepsilon} = 1.42,\ C_{2\varepsilon} = 1.68,\ C_\mu = 0.0845$$

— эмпирические константы [4, 5, 10];

$$G_k = -\rho\left[\overline{u}_l'^2 \frac{\partial}{\partial l}\left(r\overline{u}_l\right) + \overline{u}_l'\overline{u}_r' \frac{\partial}{\partial l}\left(r\overline{u}_r\right) + \overline{u}_r'^2 \frac{\partial}{\partial r}\left(r\overline{u}_r\right) + \overline{u}_l'\overline{u}_r' \frac{\partial}{\partial r}\left(r\overline{u}_l\right)\right]$$

— турбулентная кинетическая энергия, вырабатываемая градиентами осредненного потока жидкости, Дж/(м^3·с);

$$R_\varepsilon = \frac{C_\mu \rho \eta^3 \left(1 - \eta/\eta_0\right)}{1 + \beta\eta^3} \frac{\varepsilon^2}{k}$$

– ренормализационный член для скорости диссипации энергии ε;

$$\eta_0 = 4.38,\ \beta = 0.012$$

— эмпирические константы [4, 5, 10];

$$\eta = \frac{\varepsilon}{k}\sqrt{\frac{\partial \overline{u}_l}{\partial r} + \frac{\partial \overline{u}_r}{\partial l}}$$

— расчетный коэффициент.

Граничные условия:

— для осредненных значений составляющих вектора скорости

$$\begin{gathered} \overline{u}_l\left(0, r\right) = 0, \\ \overline{u}_l\left(h_{hm}, r\right) = ps\left(r\right), \\ \overline{u}_r\left(l, 0\right) = \overline{u}_r\left(l, R\right) = 0, \end{gathered} \tag{6}$$

где $ps(r)$ — полуэмпирическая зависимость окружной скорости перемешиваемой среды от радиуса аппарата, см. [2];

$R = D_r / 2$ — внутренний радиус корпуса аппарата, м, см. рис. 2;

— для пульсационных составляющих вектора скорости:

$$\begin{aligned} \bar{u}_l'(0,r) &= \bar{u}_l'(L,r) = 0, \\ \bar{u}_r'(l,0) &= \bar{u}_r'(l,R) = 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Решением предлагаемой модели (1) – (7) является поле скоростей перемешиваемой жидкости $U(l,r)$, $l \in [0,L]$, $r \in [0,R]$, соответствующее комбинации фиксированных значений n, D_m, H_m и h_{hm} для установившегося (квазистационарного) течения гомогенной жидкости в аппарате с МПУ при постоянной температуре.

Для решения математической модели (1) – (7) использовалась кросс-компилированная версия BlueCFD (Computational Fluid Dynamics) свободно распространяемого комплекса программ OpenFOAM [13], предназначеннаядля работы под управлением операционных систем Windows. Основное преимущество OpenFOAM перед другими системами инженерного анализа – разделение этапов формирования расчетной сетки конечных элементов (КЭ), дискретизации уравнений и их решения.

Проверка адекватности математической модели ПМП. Адекватность математической модели (1) – (7) подтверждена сравнением значений затрат мощности на перемешивание, рассчитанных по результатам решения модели и косвенных измерений в лабораторных и промышленных условиях, с использованием лопастной, турбинной открытой и трехлопастной мешалок, см. рис. 1.

Выбор в качестве параметра оценки адекватности затрат мощности на перемешивание обусловлен тем, что их определение предусматривается всеми известными инженерными методиками расчета МПУ, а измерение не встречает серьезных затруднений. В экспериментах измерялись напряжение питания и сила тока, потребляемого электродвигателем привода мешалки, при перемешивании гомогенной жидкости ($U_{ж}$ и $I_{ж}$) и вращении мешалки в пустом аппарате ($U_п$ и $I_п$). Значение мощности, потребляемой при перемешивании, определялось как разность $U_{ж} \cdot I_{ж} - U_п \cdot I_п$.

Лабораторная установка представляет собой вертикальную металлическую емкость с эллиптическим днищем и крышкой, см. рис. 3. Высота аппарата $H_r = 0.45$ м, внутренний диаметр $D_r = 0.5$ м. Крутящий момент передается валу мешалки от электродвигателя постоянного тока мощностью 150 Вт через редуктор, выходной вал которого оснащен регулятором частоты вращения. Номинальное напря-

жение питания электродвигателя 24 В, номинальная частота вращения вала его ротора 2730 об/мин, номинальный ток 6.3 А. Напряжение питания и сила тока, потребляемого при вращении мешалки, измерялись цифровыми приборами с классом точности 0.1: вольтметром Д5103 и амперметром СА3010/3-000.

Рис. 3. Лабораторная установка

В качестве перемешиваемой жидкости использовалась артезианская вода (0.04 м^3), подогретая до температуры 20 °C, плотностью 1027 кг/м^3, кинематической вязкостью $1.006 \cdot 10^{-6}$ м^2/с.

а) б) в)

Рис. 4. Модели мешалок
а) — двухлопастная, б) — открытая турбинная,
в) — трехлопастная, угол наклона лопастей к горизонтали — 30°

По результатам лабораторного эксперимента определены затраты мощности на перемешивание артезианской воды тремя моделями мешалок, изготовленными из пластика на 3D-принтере, см. рис. 4.

Это самые распространенные конструкции механических мешалок с горизонтальными лопастями, формирующие разнонаправленные потоки перемешиваемой жидкости: двухлопастная создает преимущественно тангенциальные потоки, турбинная открытая – преимущественно радиальные, трехлопастная с наклонными лопастями – преимущественно осевые (т.н. «насосный эффект»).

Характеристики моделей мешалок представлены в таблице 1. Частоты их вращения выбраны согласно рекомендациям [3].

Таблица 1

Характеристики мешалок для лабораторной установки

Тип мешалки	Диаметр мешалки, мм	Ширина лопасти мешалки, мм	Частота вращения, 1/мин
Двухлопастная	135	14	20, 40, 60, 80, 100
Турбинная открытая	64	12	150, 200, 250, 300, 350
Трехлопастная	64	6	350, 450, 550, 650, 750

По результатам решения модели (1) – (7) для каждой из мешалок при всех значениях n из табл. 1: значениям $\bar{u}_{li}$, $\bar{u}_{ri}$, $i = 1,...,z$, где z – число КЭ, сформированных в объеме перемешиваемой жидкости, рассчитаны затраты мощности:

$$N = M_{\text{кр}} \cdot 2\pi n\,, \tag{8}$$

где

$$M_{\text{кр}} = \frac{1}{z}\sum_{i=1}^{z} F_{\text{вт}i} \cdot r_i$$

— осредненный крутящий момент, необходимый для преодоления сил внутреннего трения в перемешиваемой жидкости;

r_i — радиус расположения i-го КЭ, м;

$$F_{\text{вт}i} = \mu_{eff} \cdot grad\left(\bar{u}_i\right) \cdot s_i$$

— сила внутреннего трения в i-м КЭ, Н;

s_i — поверхность соприкосновения i-го КЭ с соседним по радиусу аппарата, м^2;

$$grad\left(\bar{u}_i\right) = \sqrt{\left(\frac{\partial \bar{u}_{li}}{\partial l}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{u}_{li}}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{u}_{ri}}{\partial l}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{u}_{ri}}{\partial r}\right)^2}$$

— длина вектора градиента скорости жидкости в i-м конечном элементе.

Измерение силы тока, потребляемого при перемешивании артезианской воды каждой из трех моделей мешалок для каждого из пяти значений n, см. табл. 1, производилось в момент, когда амплитуда колебаний значения потребляемого тока уменьшалась до 10 % максимальной, т.е. течение жидкости в аппарате стабилизировалось.

Расчет затрат мощности на перемешивание в лабораторном аппарате производился по формуле [14]:

$$N = \frac{I_{ж} \cdot U_{ж} - I_{п} \cdot U_{п}}{K_{п}}, \qquad (9)$$

где K_n — коэффициент пусковых перегрузок значения которого принимались согласно рекомендациям [3].

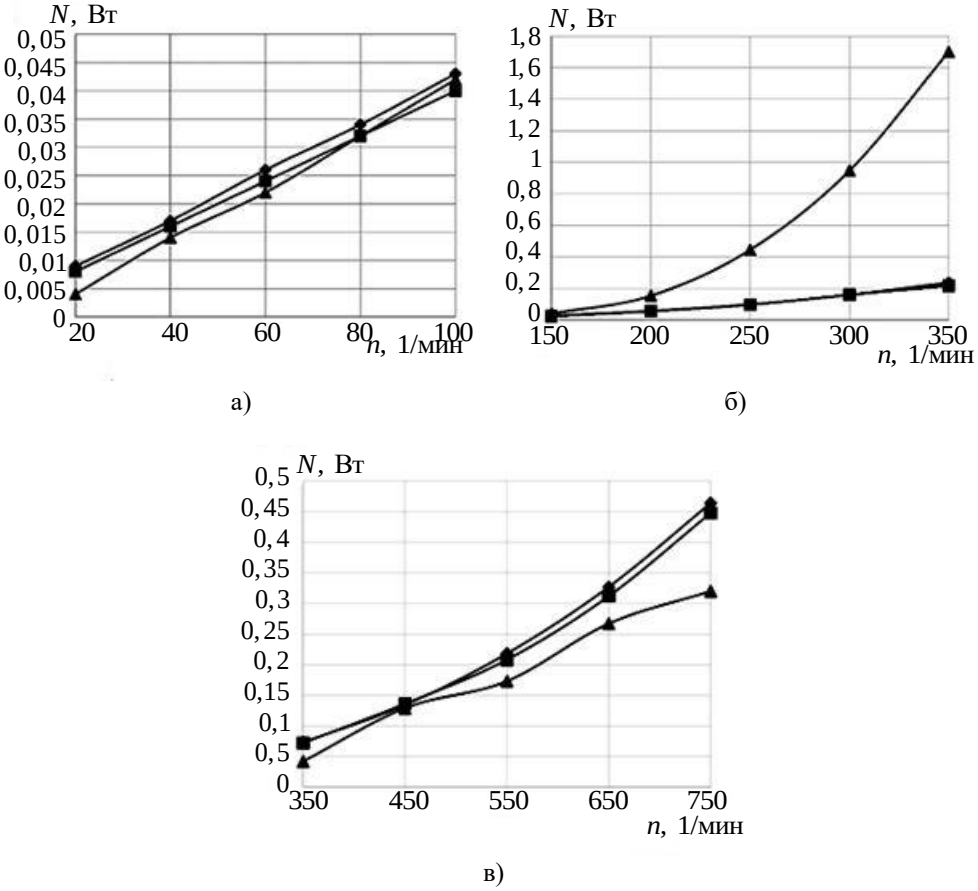


Рис. 5. Результаты расчетов мощности перемешивания по (8) (♦), по [3] (▲), по (9) (■)
а) — двухлопастная мешалка; б) — турбинная открытая мешалка;
в) — трехлопастная мешалка

На рис. 5 представлены результаты сравнения значений затрат мощности на перемешивание, соответствующих частотам вращения

мешалок из табл. 1: рассчитанных по (8), по методике, рекомендованной [3], и согласно (9) по измеренным значениям $U_{ж}$ и $I_{ж}$, $U_{п}$ и $I_{п}$. Для двухлопастной мешалки результаты расчетов по (8), (9) близки к результатам расчетов по [3]: среднее отклонение 6 %, а максимальное – 25 % (при $n = 20$ 1/мин). Применение методики [3] для расчетов затрат мощности на перемешивание открытой турбинной мешалкой приводит к завышению результатов, причем отклонение от результатов расчетов по (8), (9) увеличивается с ростом частоты вращения мешалки и при $n = 350$ 1/мин превышает 650 %. Для трехлопастной мешалки ситуация обратная: полученные по [3] значения мощности в среднем на 22 % меньше, чем результаты расчетов по (8), (9), максимальное отклонение – 43 % (при $n = 350$ 1/мин). Таким образом, результаты решения предложенной математической модели ПМП совпадают с результатами экспериментов на лабораторной установке: (отклонение не превышает 5 %). Применение методики расчетов затрат мощности на перемешивание, рекомендуемой [3], открытой турбинной мешалкой может привести к выбору привода завышенной мощности, а трехлопастной мешалкой – к перегрузке выбранного привода МПУ.

Рис. 6. Промышленный аппарат

Адекватность математической модели (1) – (7) проверена также результатами эксперимента на промышленном аппарате ВЭЭ2–3–

0,63–0,6 У, см. рис. 6, объемом 0.63 м^3, диаметром корпуса $D_r = 1$ м и высотой $H_r = 0.875$ м, открытая турбинная мешалка которого, установленная на высоте $h_{hm} = 0.22$ м от днища, имеет диаметр $D_m = 0.25$ м, ширину лопасти $H_m = 0.12$ м. Аппарат заполнялся 0.47 м^3 артезианской воды с параметрами, аналогичными лабораторному эксперименту.

Кроме размеров аппарата и мешалки и объема перемешиваемой жидкости, отличием промышленного эксперимента от лабораторного было использование привода МПУ, оснащенного электродвигателем переменного тока с короткозамкнутым ротором. Номинальное напряжение питания двигателя 380 В, номинальная частота вращения ротора 750 1/мин, номинальный ток 2.4 А, коэффициент мощности $cos\varphi = 0.6$, мощность 550 Вт. Затраты мощности на перемешивание определялись аналогично лабораторному эксперименту с применением того же измерительного оборудования.

Расчет затрат мощности на перемешивание производился по формуле [14]:

$$N = \frac{\sqrt{3} \cdot \left(I_{ж} \cdot U_{ж} - I_{п} \cdot U_{п} \right) \cdot \cos\varphi}{K_{п}}. \qquad (10)$$

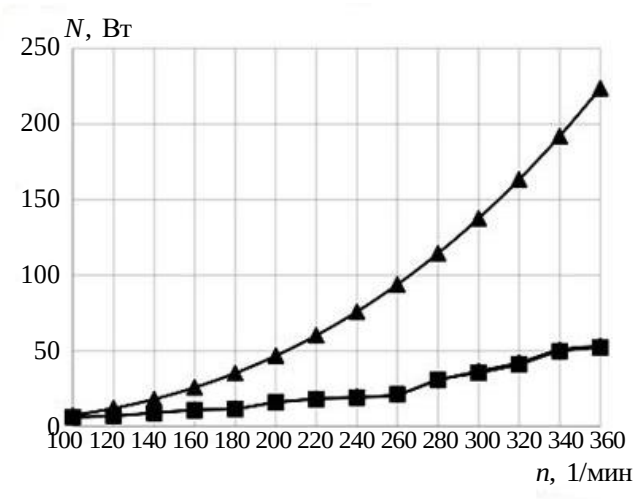


Рис. 7. Результаты расчетов мощности перемешивания в промышленном аппарате по (8) (♦), по [3] (▲), по (10) (■)

Аппарат, представленный на рис. 6, функционирует в одном из цехов АО "Пигмент", г. Тамбов, поэтому изменения типа и геометрии мешалки были невозможны. Частота ее вращения изменялась с применением частотного преобразователя от 100 до 360 1/мин с шагом 20 1/мин. На рис. 7 показаны результаты сравнения значений затрат

мощности на перемешивание, рассчитанных по (8) и согласно [3], рассчитанных согласно (10) по результатам измерений значений $U_{ж}$ и $I_{ж}$, U_n и I_n. Сравнение результатов расчетов по (8), измерений и расчетов по (10) подтверждает адекватность предложенной модели (1) – (7): максимальное отклонение 3 %.

Заметим, что результаты расчетов значений затрат мощности на перемешивание открытой турбинной мешалкой согласно [3] и в этом случае существенно превышают результаты расчетов согласно (8) и согласно (10): при $n = 360$ 1/мин более, чем на 400 %.

Критерий эффективности ПМП. При реализации ПМП в вертикальном емкостном аппарате стремятся избегать образования застойных зон и зон повышенных скоростей перемешиваемой среды, т.е. мерой эффективности ПМП может служить степень равномерности поля скоростей перемешиваемой жидкости в объеме аппарата. В качестве расчетной характеристики равномерности предлагается использовать дисперсию длины вектора скорости перемешиваемой жидкости, т.е. критерий эффективности ПМП имеет вид:

$$K_{svs} = \frac{1}{z}\sum_{i=1}^{z}\left(U_i - \bar{U}_i\right)^2, \tag{11}$$

где

$$U_i = \sqrt{\bar{u}_{li}^2 + \bar{u}_{ri}^2}$$

— длина вектора скорости перемешиваемой жидкости для i-го узла конечно-элементной расчетной модели, м/с;

$$\bar{U}_i = \frac{1}{z}\sum_{i=1}^{z} U_i$$

— среднее арифметическое значение U_i по объему перемешиваемой жидкости, м/с.

Минимальное значение критерия (11), равное нулю, соответствует абсолютной равномерности поля скоростей перемешиваемой жидкости, в том числе и отсутствию перемешивания, т.е. $n = 0$. С другой стороны, в промышленной практике обычно увеличивают частоту вращения механических мешалок до максимально возможных значений, т.к. при этом возрастают скорости реализуемых технологических процессов (тепло-массообмен, химические превращения). Следовательно, критерий (11) необходимо дополнить ограничением

$$n = \min\left\{n_{\max}, n_{\text{р}}\right\}, \tag{12}$$

где n_{max} — максимально допустимое значение n, с$^{-1}$, определяемое конструкцией мешалки и свойствами перемешиваемой среды, см. [3];

n_p — значение n, определяемое мощностью привода МПУ, с$^{-1}$.

Анализ опыта промышленной эксплуатации вертикальных емкостей с МПУ показывает, что мощность двигателя привода мешалки $P_{дв}$ обычно не превышает значения $P_{дв.доп}$, определяемого величиной рабочего объема аппарата (1 кВт на каждый м^3) т.е. значение n_p можно определить из ограничения:

$$N \le P_{\text{дв.доп}} / K_{\text{п}} .$$

С учетом возможности определения значения N согласно (8)

$$n_{\text{р}} \le \frac{P_{\text{дв.доп}}}{2\pi \cdot M_{\text{кр}} \cdot K_{\text{п}}} . \qquad (13)$$

Таким образом, определение основных параметров конструкции и режима функционирования МПУ сводится к поиску значений D_m, H_m, h_{hm} и n, при которых дисперсия длины вектора скорости перемешиваемой жидкости (11) достигает минимума при условиях (1)–(7), (12), (13).

Численный алгоритм оптимизации параметров МПУ. Задача поиска минимума критерия (11) при условиях (1)–(7), (12), (13) является задачей нелинейного программирования. Общий алгоритм решения подобных задач включает [15]: обоснование выбора начальных значений параметров и расчет соответствующего значения критерия оптимизации; выбор новой комбинации допустимых значений параметров в рамках полного или направленного перебора и сравнение соответствующего значения критерия с зафиксированным ранее; сохранение лучшей из просмотренных комбинаций с точки зрения критерия.

Применение подобного алгоритма для решения рассматриваемой задачи приводит к необходимости расчета поля скоростей перемешиваемой жидкости для каждой из формируемых комбинаций фиксированных значений D_m, H_m, h_{hm} и n, продолжительность которого зависит от количества и формы КЭ в расчетной модели. Например, сетка КЭ при решении модели (1) – (7) в ходе проверки ее адекватности результатам лабораторного эксперимента включала 210 400 элементов прямоугольной формы, а для расчета значений $\bar{u}_{li}$, $\bar{u}_{ri}$, $i = 1,...,z$ при фиксированных значениях D_m, H_m, h_{hm} и n требовалось около трех часов на ПК с характеристиками:

– процессор: IntelPentium 2020M (2.4 ГГц);
– оперативная память: 8 ГБ DDR3 (800 МГц);
– видеокарта: NVIDIA GeForce GT 720M 2 ГБ (DDR3);
– жесткий диск: WD Blue 500 ГБ (5400 об/мин).

В объеме жидкости, перемешиваемой в промышленном аппарате, см. рис. 6, в ходе проверки адекватности модели (1) – (7) было

сформировано более 500000 КЭ, а расчет поля скоростей для комбинации фиксированных значений D_m, H_m, h_{hm} и n продолжался более шести часов.

Таким образом, затраты времени на решение задачи (11), (1)–(7), (12), (13) зависят, в основном, от необходимого количества расчетов поля скоростей в объеме жидкости, перемешиваемой в исследуемом аппарате. Минимальное число комбинаций фиксированных значений D_m, H_m, h_{hm} и n, при которых необходимо рассчитать значения $\bar{u}_{li}$, $\bar{u}_{ri}$, $i = 1,...,z$ формируется согласно методике планирования многофакторного вычислительного эксперимента [16]. Критерий (11) аппроксимируется степенным полиномом, результатом поиска минимума которого являются оптимальные значения параметров МПУ.

Поскольку значение n однозначно определяется соотношениями (12), (13), алгоритм решения задачи (11), (1)–(7), (12), (13) предусматривает реализацию трехфакторного эксперимента: фиксирование значений D_m, H_m и h_{hm} на уровнях, соответствующих матрице эксперимента. Результирующая зависимость отклика объекта от значений факторов должна иметь выраженный минимум, поэтому в качестве плана экперимента выбран план второго порядка – ортогональный центральный композиционный план (ОЦКП) [16].

При трех факторах ОЦКП предусматривает проведение 15 экспериментов на пяти уровнях варьирования каждого фактора, т.е. формируемый полином регрессии может включать до 14 слагаемых. Следовательно, применение ОЦКП позволяет сформировать не только полный полином регрессии второго порядка, содержащий 11 слагаемых, но и неполный полином регрессии третьего порядка, дополнительно включающий слагаемые с факторами в третьей степени.

Поскольку реализация параллельных опытов в вычислительном эксперименте не имеет смысла (результаты будут одинаковыми и дисперсия воспроизводимости окажется равной нулю), показателем степени соответствия значения полинома регрессии при фиксированных значениях факторов значению критерия (11), полученному в результате решения математической модели (1) – (7), может служить относительная ошибка полинома регрессии [16]:

$$\varepsilon = \frac{\frac{1}{N_{\text{п}}}\sqrt{\sum_{i=1}^{N_{\text{п}}}\left(y_i - yr_i\right)^2}}{y_{\max} - y_{\min}}, \tag{14}$$

где y_i, yr_i — значение критерия (11) в i-й точке плана, полученное в результате решения модели (1) – (7), и значение полинома регрессии в той же точке;

y_{max}, y_{min} — максимальное и минимальное значения yr_i в точках плана;

N_n — количество точек плана.

Если при выбранном порядке полинома регрессии значение $\varepsilon > 5\ \%$, осуществляется переход к формированию полинома более высокого порядка.

Таким образом, предлагаемый алгоритм решения задачи (11), (1)–(7), (12), (13) включает следующие основные этапы.

1. Определение частоты вращения *n* вала привода МПУ согласно (12), (13), выбор натуральных значений факторов эксперимента D_m, H_m и h_{hm} в соответствии с уровнями фиксирования их кодированных значений, предусмотренными матрицей ОЦКП.

2. Определение в результате решения модели (1) – (7) значений $\bar{u}_{li}$, $\bar{u}_{ri}$, $i = 1,...,z$ для каждой комбинации значений D_m, H_m и h_{hm}, предусмотренной матрицей ОЦКП, и соответствующего значения критерия (11), т.е. определение значений yr_i, $i = 1,\ldots,N_n$.

3. Формирование полного полинома регрессии второго порядка, расчет значений yr_i, $i = 1,\ldots,N_n$ для тех же комбинаций факторов эксперимента, что и в п. 2, расчет значения относительной ошибки (14).

4. Добавление к сформированному полиному слагаемых с факторами в третьей степени, расчет соответствующих значений yr_i, $i = 1,\ldots,N_n$ и значения ε. Выбор вида полинома, которому соответствует меньшее значение относительной ошибки.

5. Поиск минимума выбранного полинома регрессии на области плана экесперимента, определение оптимальных кодированных значений факторов эксперимента, переход к натуральным значениям D_m, H_m и h_{hm}.

6. Поиск оптимальных значений дополнительных параметров исследуемого МПУ по критерию (11) методом перебора их возможных значений.

Результаты решения задач оптимизации параметров МПУ. При решении задач (11), (1)–(7), (12), (13) для лабораторного аппарата, см. рис. 3, МПУ которого оснащается моделями двухлопастной, турбинной открытой и трехлопастной мешалок, см. рис. 4, а вид и параметры перемешиваемой среды аналогичны условиям эксперимента, см. выше, значения *n* зафиксированы на уровне середины диапазонов, рекомендуемых [3] для этих мешалок, с учетом ограничений (12), (13). Расчеты проводились на компьютере с характеристиками, представленными выше.

Таблица 2

Фиксированные уровни параметров МПУ для ОЦКП

Двухлопастная мешалка, $n = 50$ 1/мин	D_m, м	0,160	0,169	0,213	0,226	0,257
	H_m, м	0,010	0,012	0,021	0,033	0,036
	h_{hm}, м	0,025	0,043	0,125	0,207	0,225
Турбинная открытая мешалка, $n = 250$ 1/мин	D_m, м	0,067	0,073	0,100	0,127	0,133
	H_m, м	0,010	0,014	0,030	0,046	0,050
	h_{hm}, м	0,025	0,043	0,125	0,207	0,225
Трехлопастная мешалка, $n = 500$ 1/мин	D_m, м	0,067	0,073	0,100	0,127	0,133
	H_m, м	0,010	0,014	0,030	0,046	0,050
	h_{hm}, м	0,025	0,043	0,125	0,207	0,225
Кодированные значения		–1,215	–1	0	1	1,215

Натуральные значения факторов D_m, H_m и h_{hm}, соответствующие их кодированным значениям, предусмотренным матрицей ОЦКП, зафиксированы согласно рекомендациям [3], см. табл. 2. Фиксированные значения дополнительных параметров конструкций мешалок также выбраны согласно рекомендациям [3]: число лопастей турбинной открытой мешалки $N_л$ =-6, отношение диаметров диска и мешалки $D_d / D_m = 0.75$, угол наклона лопастей трехлопастной мешалки к горизонтали $\alpha = 30^o$.

В табл. 3 сведены результаты поиска минимумов полных полиномов регрессии второго порядка, которые сформированы по результатам вычислительных экспериментов при значениях параметров D_m, H_m и h_{hm}, представленных в табл. 2.

Таблица 3

Результаты оптимизации параметров мешалок с использованием полных полиномов регрессии второго порядка

Тип мешалки	Частота вращения мешалки, 1/мин	Ошибка полинома-регрессии, %	Основные параметры,					
			Диаметр мешалки, м		Ширина лопасти, м		Высота установки, м	
			Расчет	РД [3]	Расчет	РД [3]	Расчет	РД [3]
Двухлопастная	50	4	0,246	0,16...0,27	0,033	0,019	0,043	0,08...0,19
Турбинная открытая	250	2,7	0,105	0,07...0,13	0,046	0,017	0,043	0,03...0,09
Трехлопастная	500	2,7	0,105	0,07...0,13	0,046	0,017	0,043	0,03...0,09

Как видно, оптимальные значения диаметров всех исследуемых мешалок входят в диапазоны, рекомендуемые [3], как и оптимальные значения высоты установки турбинной открытой и трехлопастной мешалки. Оптимальная высота установки двухлопастной мешалки меньше минимальной рекомендации [3] почти в два раза, а ширина ее лопасти больше рекомендуемой [3] в 1.7 раза. Оптимальная ширина лопастей турбинной открытой и трехлопастной мешалок превышает рекомендуемую [3] более, чем в 2.7 раза.

Формально сформированные полиномы регрессии второго порядка для всх типов мешалок приемлемы, т.к. их относительная ошибка меньше 5 %, однако максимальные отклонения значений yr_i от y_i весьма существенны: 25.8 % для двухлопастной, 19.2 % для турбинной открытой, 18.3 % для трехлопастной мешалки. Также следует отметить совпадение оптимальных значений ширины лопасти и высоты установки всех трех мешалок с границами интервалов варьирования их кодированных значений: 1 (H_m) или –1 (h_{hm}), см. таблицу 2 и таблицу 3, т.е. значения этих факторов эксперимента, соответствующие минимумам сформированных полиномов регрессии второго порядка, находятся за пределами интервалов их кодированных значений [–1,1].

Результаты поиска минимумов неполных полиномов третьего порядка, сформированных по итогам вычислительных экспериментов для мешалок всех типов, сведены в табл. 4. Относительные ошибки этих полиномов существенно меньше, чем полных полиномов второго порядка. Максимальное отклонение для двухлопастной мешалки в этом случае составляет 8.8 %, для турбинной открытой – 4.9 %, для трехлопастной – 5.1 %. Следовательно, неполные полиномы регрессии третьей степени более приемлемы для определения оптимальных значений параметров D_m, H_m и h_{hm}, причем эти значения входят в интервалы их варьирования, выбранные для проведения вычислительных экспериментов, см. табл. 2 и табл. 4.

Таблица 4

Результаты оптимизации параметров мешалок с использованием неполных полиномов регрессии третьего порядка

Тип мешалки	Частота вращения мешалки, об/мин	Ошибка полинома-регрессии, %	Основные параметры,					
			Диаметр мешалки, м		Ширина лопасти, м		Высота установки, м	
			Расчет	РД [3]	Расчет	РД [3]	Расчет	РД [3]
Двухлопастная	50	1	0,192	0,16...0,27	0,032	0,019	0,072	0,08...0,19
Турбинная открытая	250	0,36	0,085	0,07...0,13	0,042	0,017	0,075	0,03...0,09
Трехлопастная	500	0,37	0,085	0,07...0,13	0,042	0,017	0,075	0,03...0,09

Оптимальное значение диаметра двухлопастной мешалки соответствует рекомендации [3], значение высоты ее установки близко к левой границе рекомендуемого диапазона, а рекомендуемая [3] ширина лопасти меньше оптимальной почти в 1.7 раза. Рекомендуемые [3] значения ширины лопастей турбинной открытой и и трехлопастной мешалки меньше оптимальных почти в 2.5 раза, в то время как значения диаметров и высот установки этих мешалок соответствуют рекомендациям [3].

Таким образом, минимумы неполных полиномов регрессии третьего порядка, аппроксимирующих зависимости критерия (11) от параметров конструкций наиболее распространенных механических мешалок, достигаются при ширине их лопастей, превышающей рекомендованную [3] в $1.7 \div 2.5$ раза.

При фиксированных оптимальных значениях параметров D_m, H_m и h_{hm} турбинной открытой и трехлопастной мешалок методом перебора найдены оптимальные значения дополнительных параметров их конструкций, см. рис. 8. Как видно, см. рис. 8*а*, наилучшими с точки зрения критерия (11) являются:

– число лопастей турбинной открытой мешалки $N_л$ =-6, см. рис. 8*а*, (соответствует рекомендации [3]);

– диаметр ее диска, равный 0.6D_m, см. рис. 8*б*,

– угол наклона лопастей трехлопастной мешалки к горизонтали $\alpha = 20°$, см. рис. 8*в*.

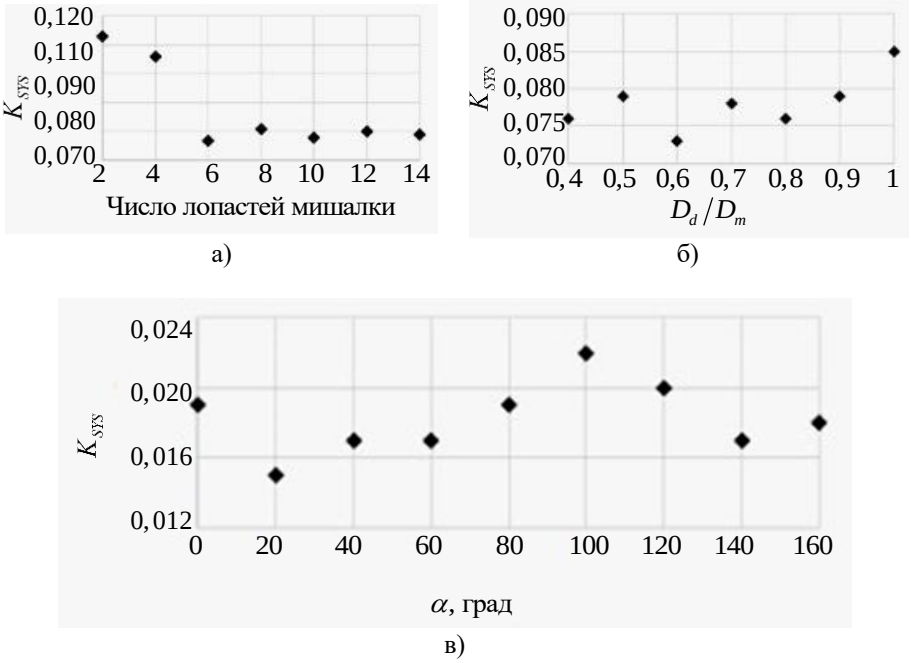


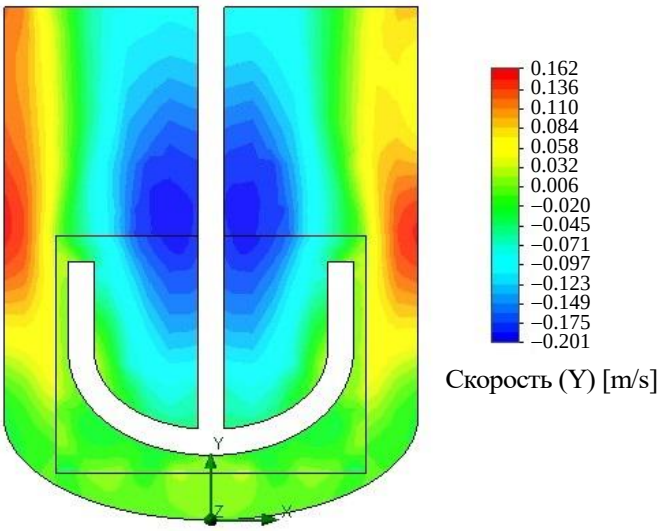
Рис. 8. Результаты оптимизации дополнительных параметров турбинной открытой (*а*, *б*) и трехлопастной (*в*) мешалок

Разработанная методика моделирования и оптимизации ПМП применена для модификации конструкции МПУ аппарата, оснащенного якорной мешалкой, который установлен в цехе № 15 АО "Пигмент", г. Тамбов и реализует процесс репульпации пасты фталоцианина меди в водном растворе серной кислоты при температуре 200 °С и атмосферном давлении. При существующей конструкции МПУ наблюдается неравномерное начальное распределение частиц пасты в объеме перемешиваемой жидкости, и, как следствие, их прилипание к стенкам корпуса и спекание.

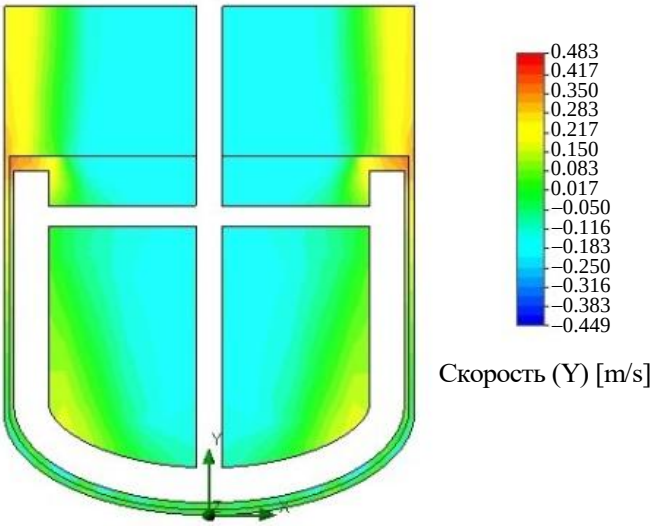
Цель работ по модификации существующего МПУ – повышение степени равномерности начального распределения пасты фталоцианина меди по объему аппарата и устранение прилипания ее частиц к стенкам аппарата, сокращение продолжительности стадии репульпации и снижение энергопотребления аппарата.

Поле скоростей жидкости, перемешиваемой мешалкой существующей конструкции, представлено на рис. 9*а*. Как видно, скорости жидкости в центральной и периферийной зонах объема аппарата существенно различаются (значение критерия (11) $K_{SVS} = 5.46$), что, видимо, и приводит к неравномерному начальному распределению частиц пасты фталоцианина меди по объему аппарата.

В результате решения задачи (11), (1)–(7), (12), (13) установлено, что минимальному значению дисперсии длины вектора скорости жидкости в аппарате $K_{SVS} = 1.34$ соответствует диаметр мешалки $D_m = 0.95 D_r$ (рекомендация [3]: $D_m / D_r = 0.7 \div 0.9$), высота установки мешалки $h_{hm} = 0.05 D_m$ (рекомендация [3]: $h_{hm} \geq 0.5(D_r - D_m)$), ширина лопасти мешалки $H_m = 0.15 D_m$ (рекомендация [3]: $H_m / D_m = 0.1$).



а)



б)

Рис. 9. Поле скоростей перемешиваемой жидкости в аппарате для репульпации а) — при начальной конструкции МПУ, б) — при итоговой конструкции МПУ

Оптимальное значение высоты лопасти мешалки (дополнительный параметр ее конструкции) $B_m = 0.85D_m$, рекомендация [3] для якорных мешалок: $B_m / D_m = 0.7$.

Как видно, за счет модификации конструкции МПУ удалось существенно повысить степень равномерности поля скоростей жидкости в аппарате, см. рис. 9*б*: значение критерия (11) уменьшилось более, чем в 4 раза. Дополнительная поперечная перемычка установлена для обеспечения необходимой прочности лопастей модифицированной мешалки.

Для подтверждения эффективности модифицированной конструкции и измененной высоты расположения мешалки над днищем аппарата была реализована обработка нескольких пробных партий пасты фталоцианина меди. По ее результатам сделаны следующие выводы:

– образование отложений на стенках корпуса аппарата практически отсутствует;

– необходимую продолжительность стадии репульпации можно сократить с 20 до 18 ч., а поскольку она является лимитирующей по времени в процессе производства фталоцианина меди, то мощность производства можно увеличить с 1188 до 1320 т/год;

– необходимая мощность привода мешалки уменьшилась на 16 %.

Выводы и рекомендации. Предложена математическая модель ПМП гомогенной жидкости в вертикальном емкостном аппарате,

включающая осредненные по Рейнольдсу уравнения Навье-Стокса и уравнения полуэмпирической RNG k-ε модели турбулентности в цилиндрической системе координат. Приняты допущения об изотермичности процесса и симметричности поля скоростей перемешиваемой жидкости относительно оси вращения мешалки. Для решения модели использована версия BlueCFD системы конечно-элементного анализа OpenFOAM.

Вывод об адекватности предложенной математической модели ПМП обоснован сравнением значений затрат мощности на перемешивание, определенных по результатам расчетов поля скоростей перемешиваемой жидкости, лабораторного и промышленного экспериментов: измерений напряжения питания электродвигателя привода МПУ и силы потребляемого тока при перемешивании гомогенной жидкости и вращении мешалки в пустом аппарате. Отмечены существенные отличия результатов расчетов значений затрат мощности на перемешивание согласно [3] от результатов экспериментов и расчетов по (8) – (10) для некоторых типов мешалок.

Постановка задачи оптимизации значений диаметра и высоты лопасти мешалки, высоты ее установки над днищем аппарата и частоты вращения мешалки предусматривает выбор значений этих параметров, минимизирующих дисперсию длины вектора скорости перемешиваемой среды (11) при условиях (1)–(7), (12), (13).Значения дополнительных параметров конструкции МПУ предложено определять методом перебора при оптимальных значениях вышеперечисленных основных. Основой для разработки численного алгоритма решения задачи (11),(1)–(7), (12), (13) послужила методика планирования многофакторного вычислительного эксперимента.

Приведены примеры решения задач (11),(1)–(7), (12), (13) для лабораторного и промышленного аппаратов. Оптимальные с точки зрения критерия (11) значения ширины лопастей наиболее распространенных механических мешалок превышают рекомендуемые [3] в 1.7-2.5 раза. По результатам решения задачи оптимизации параметров МПУ промышленного аппарата АО "Пигмент", г. Тамбов предложены модификации ее конструкции, позволившие устранить образование отложений на стенках аппарата, сократить на 10 % продолжительность стадии репульпации пасты фталоцианина меди, уменьшить на 16 % затраты мощности на перемешивание.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Гарбарук А.В. *Лекции по течению вязкой жидкости и моделям турбулентности: методы расчета турбулентных течений*. Санкт-Петербург, СПбГТУ, 2010, 127 с.

[2] Брагинский Л.Н., Бегачев В.И., Барабаш В.М. *Перемешивание в жидких средах. Физические основы и инженерные методы расчета*. Ленинград,

Химия, 1984, 336 с.

[3] РД 26-01-90-85. *Механические перемешивающие устройства. Метод расчета. Руководящий нормативный документ.Введ. 1986-01-01*. Ленинград, ЛенНИИхиммаш, 1985, 257 с.

[4] Коркодинов Я.А. Обзор семейства k-ε моделей для моделирования турбулентности. *Вестник Пермского научно-исследовательского политехнического университета*, 2013, № 2, с. 5-16.

[5] Минибаева Л.Р., Мухаметзянова А.Г., Клинов А.В. Численное моделирование гидродинамической структуры потока в аппаратах с перемешивающими устройствами. *Вестник Казанского технологического университета*, 2008, № 6, с. 191-198.

[6] Минибаева Л.Р., Мухаметзянова А.Г., Клинов А.В. Модели турбулентности для адекватного описания поля скорости в аппаратах с перемешивающими. *Вестник Казанского технологического университета*, 2010, № 9, с. 469-477.

[7] Yang F., Zhou S. Free surface turbulent flow in an unbaffled stirred tank: Detached eddy simulation and VOF Study. *Chemical and Biochemical Engineering Quarterly*, 2015, vol. 29, iss. 3, pp. 395-403.

[8] Liangchao L., Bin X. Numerical simulation of hydrodynamics in an uncovered unbaffled stirred tank. *Chemical Papers*, 2017, vol. 71, iss. 10, pp. 1863-1875.

[9] Hirsch C. Numerical computation of internal and external flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 1991, 225, pp. 691-695.

[10] Войтович Р., Липин А.А., Липин А.Г. Математическое моделирование гидродинамики смесителя с эксцентрически расположенной мешалкой. *Известия высших учебных заведений. Серия: Химия и химическая технология*, 2015, т. 58, № 11, с. 83-86.

[11] Минибаева Л.Р., Мухаметзянова А.Г., Клинов А.В.О влиянии конструкции перемешивающего устройства на характеристики потока в аппаратах с многоярусными мешалками. *Вестник Казанского технологического университета*, 2010, № 11, с. 201-210.

[12] Островская Э.Н., Полякова Т.В. *Расчет и конструирование химических аппаратов с мешалками: учебное пособие*. Казань, КГТУ, 2006, 119 с.

[13] *OpenFOAM –открытая интегрируемая платформа для численного моделирования задач механики сплошных сред* [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://fsweb.info/caecad/openfoam.html. (Дата обращения: 15.11.2024).

[14] Курахтина Г.С. *Общая электротехника: учебное пособие для студентов технических специальностей вузов региона*. Петропавловск-Камчатский, КамчатГТУ, 2007, 144 с.

[15] Пантелеев, А.В., Летова Т.А. *Методы оптимизации в примерах и задачах*. Санкт-Петербург, Лань, 2015, 511 с.

[16] Сидняев Н.И. *Теория планирования эксперимента и анализ статистических данных: учебное пособие*. Москва, Юрайт, 2012, 399 с.

Статья поступила в редакцию 23.05.2025

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Карпушкин С.В. Моделирование и оптимизация процесса механического перемешивания жидкости в вертикальной емкости. *Математическое моделирование и численные методы*, 2025, № 4, с. 148–172.

Карпушкин Сергей Викторович — д-р. техн. наук, профессор кафедры «Компьютерно-интегрированные системы в машиностроении» ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный технический университет». e-mail: karp_tambov@mail.ru

Modeling and optimization the process of liquid mechanical mixing in a vertical vessel

© S.V. Karpushkin

Tambov state technical university, Tambov, 392000, Russia

A mathematical model of the mechanical mixing process (MMP) of a homogeneous liquid in a vertical capacitive apparatus is proposed, including the Reynolds-averaged Navier-Stokes equations and equations of semiempirical RNG k-ε model of turbulence in a cylindrical coordinate system. The conclusion about the adequacy of the proposed model is justified by comparing the mixing power consumption values, determined by calculations' results of the velocity field in stirred liquid and the results of laboratory and industrial experiments: measurements supply voltage for electric motor of a mechanical mixing device (MMD) and the current consumption when stirring a homogeneous liquid and rotating the stirrer in an empty apparatus. The problem's formulation of optimizing the MMD's parameters provides for the choice of values the diameter and height of the agitator blade, the height of its installation above the bottom of the apparatus and the rotation frequency of its shaft, minimizing the dispersion of the velocity vector's medium length of the mixed liquid. It is proposed to determine the values of MMD design's additional parameters by iteration at the optimal values of the above-mentioned basic parameters. The basis for the development of a numerical algorithm for solving the problem was the method of planning a multifactorial computational experiment. Examples of solving problems of optimizing design parameters and operating mode of MMDs of laboratory and industrial devices are given. The optimal blade widths of the most common mechanical agitators exceed those recommended by the NIIHIMMASH Guidance Document by 1.7-2.5 times. Based on the results of solving the problem of optimizing the MMD's parameters of the industrial apparatus of JSC Pigment, Tambov, modifications of its design were proposed, which made it possible to eliminate the formation of deposits on the walls of the apparatus, reduce by 10% the duration of the repulpation stage of the copper phthalocyanine paste, and reduce by 16% the cost of mixing power.

***Keywords**: vertical vessel, mechanical mixing of liquid, Navier-Stokes equations, turbulence model, laboratory and industrial experiment, mixing efficiency criterion, multifactor computational experiment*

REFERENCES

[1] Garbaruk A.V. *Lektsii po techeniyu vyazkoy zhidkosti i modelyam turbulentnosti: metody rascheta turbulentnykh techeniy* [Lectures on viscous fluid flow and turbulence models: methods for calculating turbulent flows]. St. Petersburg, SPbPU, 2010, 127 p.

[2] Braginskiy L.N., Begachev V.I., Barabash V.M. *Peremeshivaniye v zhidkikh sredakh. Fizicheskiye osnovy i inzhenernyye metody rascheta* [Mixing in liquid media. Physical foundations and engineering methods of calculation]. Leningrad, Khimiya, 1984, 336 p.

[3] RD 26-01-90-85. *Mekhanicheskiye peremeshivayushchiye ustroystva. Metod rascheta. Rukovodyashchiy normativnyy dokument. Vved* [Mechanical mixing devices. Calculation method. Guiding normative document.Introduction.]. *1986-01-01*. Leningrad, LenNIIkhimmash, 1985, 257 p.

[4] Korkodinov YA.A. The review of set of k–ε models for modeling turbulence. *Vestnik Permskogo nauchno-issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta* [Bulletin of the Perm Scientific Research Polytechnic University], 2013, no. 2, pp. 5-16.

[5] Minibayeva L.R., Mukhametzyanova A.G., Klinov A.V. Chislennoye modelirovaniye gidrodinamicheskoy struktury potoka v apparatakh s peremeshivayushchimi ustroystvami [Numerical modeling of the hydrodynamic structure of flow in devices with mixing devices]. *Vestnik Kazanskogo tekhnologicheskogo universiteta* [Bulletin of Kazan Technological University], 2008, no. 6, pp. 191-198.

[6] Minibayeva L.R., Mukhametzyanova A.G., Klinov A.V. Modeli turbulentnosti dlya adekvatnogo opisaniya polya skorosti v apparatakh s peremeshivayushchimi [Turbulence models for an adequate description of the velocity field in apparatus with stirring]. *Vestnik Kazanskogo tekhnologicheskogo universiteta* [Bulletin of Kazan Technological University], 2010, no. 9, pp. 469-477.

[7] Yang F., Zhou S. Free surface turbulent flow in an unbaffled stirred tank: Detached eddy simulation and VOF Study. *Chemical and Biochemical Engineering Quarterly*, 2015, vol. 29, iss. 3, pp. 395-403.

[8] Liangchao L., Bin X. Numerical simulation of hydrodynamics in an uncovered unbaffled stirred tank. *Chemical Papers*, 2017, vol. 71, iss. 10, pp. 1863-1875.

[9] Hirsch C. Numerical computation of internal and external flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 1991, 225, pp. 691-695.

[10] Voytovich R., Lipin A.A., Lipin A.G. Matematicheskoye modelirovaniye gidrodinamiki smesitelya s ekstsentricheski raspolozhennoy meshalkoy [Mathematical modeling of the hydrodynamics of a mixer with an eccentrically located stirrer]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Seriya: Khimiya i khimicheskaya tekhnologiya* [News of higher educational institutions. Series: Chemistry and chemical technology], 2015, vol. 58, no. 11, pp. 83-86.

[11] Minibayeva L.R., Mukhametzyanova A.G., Klinov A.V. O vliyanii konstruk-tsii peremeshivayushchego ustroystva na kharakteristiki potoka v apparatakh s mnogoyarusnymi meshalkami [On the influence of the design of the mixing device on the flow characteristics in devices with multi-tier mixers]. *Vestnik Kazanskogo tekhnologicheskogo universiteta* [Bulletin of Kazan Technological University], 2010, no. 11, pp. 201-210.

[12] Ostrovskaya E.N., PolyakovaT.V. *Raschetikonstruirovaniyekhimicheskikhapparatovsmeshalkami: uchebnoyeposobiye* [Calculation and design of chemical apparatuses with stirrers: a textbook]. Kazan', KSTU, 2006, 119 p.

[13] *OpenFOAM – otkrytaya integriruyemaya platforma dlya chislennogo modelirovaniya zadach mekhaniki sploshnykh sred* [Electronic resource]. Access mode: http://fsweb.info/caecad/openfoam.html. (Date of access: 11/15/2024).

[14] Kurakhtina G.S. *Obshchaya elektrotekhnika: uchebnoye posobiye dlya studentov tekhnicheskikh spetsial'nostey vuzov regiona* [General electrical engineering: a textbook for students of technical specialties at universities in the region]. Petropavlovsk-Kamchatskiy, KamchatGTU, 2007, 144 p.

[15] Panteleyev, A.V., Letova T.A. *Metody optimizatsii v primerakh i zadachakh* [Optimization methods in examples and problems]. St. Petersburg, Lan Publishing House, 2015, 511 p.

[16] Sidnyayev N.I. *Teoriya planirovaniya eksperimenta i analiz statisticheskikh dannykh: uchebnoye posobiye* [The theory of experimental planning and statistical data analysis: a textbook]. Moscow, Publishing URAIT, 2012, 399 p.

Karpushkin S.V., Dr. Sc. (Eng.), Professor, Department «Computer-Integrated Systems in Mechanical Engineering» Tambov State Technical University. e-mail: karp_tambov@mail.ru