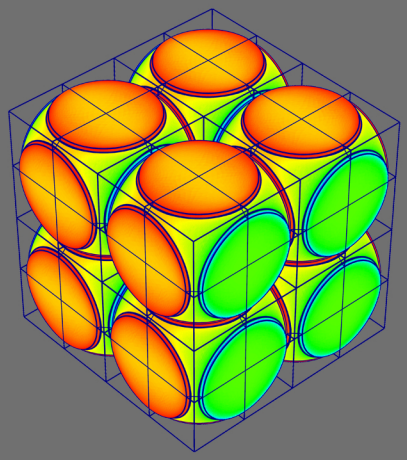
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Сердюк Д.О., Хомченко А.В. Моделирование нестационарной динамики фрагмента нижней панели закрылка пассажирского самолёта. Математическое моделирование и численные методы, 2025, № 4, с. 124–147.

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/393/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.216.68
28.11.2026 06:04:50

УДК 539.31 DOI: 10.18698/2309-3684-2025-4-124147

Моделирование нестационарной динамики фрагмента нижней панели закрылка пассажирского самолёта

© Д.О. Сердюк[1], А.В. Хомченко[2]

[1]ФГБОУ ВО МАИ (НИУ), г. Москва, 125993, Россия
[2]ООО «АУРУС-АЭРО», г. Москва, 125315, Россия

В работе численно-аналитическими методами построена новая функция нестационарных нормальных перемещений для тонкой упругой анизотропной пластины, связанной с упруго-инерционным основанием и с локальными граничными условиями на произвольном контуре. В качестве теории пластин приняты гипотезы Тимошенко. В основу работы положен метод фундаментальных решений и метод компенсирующих нагрузок. Фундаментальные решения для неограниченной пластины построены с помощью интегральных преобразований Фурье по пространственным координатам и интегрального преобразования Лапласа по времени. Соответствующие оригиналы найдены с использованием аналитического обращения интегрального преобразования Лапласа. Оригинал двумерного интегрального преобразования Фурье найден с применением методов интегрирования быстро осциллирующих функций. Затем с использованием фундаментальных решений и метода компенсирующих нагрузок получены интегральные представления для нестационарных перемещений пластины с локальными граничными условиями на произвольном контуре. Зависящие от времени компенсирующие нагрузки получены из решения системы интегральных уравнений Вольтерра I рода. С применением метода квадратур на каждом шаге по времени задача о компенсирующих нагрузках сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений. В качестве примера расчета рассмотрено нестационарное деформирование фрагмента нижней панели закрылка пассажирского самолёта при ударе куска авиационного пневматика. Для этого объекта исследования в расчетной схеме в качестве локальных опор выступают заклепки. С целью оценки достоверности результаты решения сопоставлены с результатами решения в программном комплексе Simcenter Nastran. Конечно-элементная модель пластины выполнена в Simcenter Femap с использованием четырёхузловых слоистых оболочечных элементов «PCOMP» и линейно-упругой модели материала монослоёв «2D ORTHOTROPIC». Решение задачи нестационарного деформирования пластины получено с помощью Nastran Multi-Step Nonlinear Kinematic Transient (SOL402) с использованием схемы интегрирования «Modified Generalized Alpha».

Ключевые слова: *нестационарная динамика, пластина Тимошенко, фундаментальные решения, панель закрылка, полимерный композиционный материал, численное решение, метод конечных элементов*

Введение. При создании авиационной техники большую роль играет весовая эффективность создаваемого летательного аппарата (ЛА). Эту цель достигают, в том числе, путём совершенствования применяемых конструкционных материалов. Причем механические характеристики новых материалов должны быть не ниже, чем у тра-

дициионных. Все большее значение приобретают элементы конструкций ЛА из полимерных композиционных материалов (ПКМ) [1], [2], которые обладают рядом преимуществ: высокой удельной жёсткостью и прочностью, высокой износостойкостью и сопротивлением усталости, а также возможностью создания уникальных механических свойств в зависимости от требований, предъявляемых к изделию и т. д. Для доказательства соответствия характеристик силовых конструкций ЛА из ПКМ сертификационным требованиям, необходимо проведение расчетно-теоретических и экспериментальных работ по методикам, позволяющим показать, что проектируемые конструктивные элементы из ПКМ полностью удовлетворяют предъявляемым требованиям. Одной из возможных угроз (воздействие дискретных источников) для элементов конструкций ЛА являются последствия взрыва шины колёс шасси – пневматика, изготавливаемого из армированной резины, – при котором происходят соударения его отделившихся фрагментов с элементами силовой конструкции ЛА из ПКМ, приводящие к её повреждениям. В зону разлёта фрагментов пневматика может попадать корневой закрылок пассажирского самолёта. Одной из задач, решаемых в рамках демонстрации безопасности конструкции ЛА в случае воздействия дискретного источника, является задача нестационарного деформирования нижней панели закрылка.

Исследованию вопросов, связанных прочностью композитных пластин, посвящены публикации [3], [4], [5]. Вопросам нестационарной динамики изотропных пластин посвящены работы [6], [7], [8], [9], [10]. Здесь получены решения для: осесимметричных колебаний пластин как постоянной, так и переменной толщины; прямоугольных и круглых пластин со свободно опертыми и жестко защемленными краями, пластин, связанных с основаниями. В качестве моделей пластин авторы использовали теории пластин Кирхгофа и Тимошенко.

В работах [11], [12], [13], [14], [15] приведены результаты исследования нестационарной динамики ортотропных пластин. Здесь объектами исследования выступают как неограниченные пластины, так и пластины прямоугольной формы. В качестве нестационарных воздействий рассмотрены случаи действия сосредоточенных нагрузок.

Вопросам нестационарной динамики анизотропных пластин посвящены публикации [16], [17]. В этих работах численно-аналитическими методами исследованы вопросы распространения волн в неограниченных и прямоугольных пластинах. Статическое решение получено для пластины сложной формы в плане.

В статьях [18], [19], [20], [21], [22], [23], [24] при исследовании нестационарных процессов в анизотропных пластинах применен метод конечных элементов. В этих работах с применением оригинальных конечных элементов или используя коммерческие программные комплексы рассмотрены прямоугольные пластины в плане.

Результаты экспериментальных исследований по нестационарной динамике анизотропных пластин опубликованы в работах [25] и [26]. В этих работах авторы исследовали изгибные волны в изотропных, ортотропных и анизотропных пластинах. Для генерации волн применяли такие подходы, как удар баллистическим маятником и воздействие сфокусированным высокоэнергетическим коротким лазерным импульсом.

Что касается результатов других авторов в вопросе учета локальных опор, то в публикациях [27], [28], [29] приведены результаты решений статического изгиба изотропной пластины. Стационарные колебания ортотропных пластин исследованы в работах [30], [31], [32]. Результаты исследований нестационарных колебаний изотропных и ортотропных пластин приведены в статьях [33], [34], [35].

Таким образом, вопросы нестационарной динамики хорошо проработаны для изотропных и ортотропных пластин. Есть результаты для объектов сложной формы в плане. Для этих целей применяют метод конечных элементов, метод граничных элементов или метод компенсирующих нагрузок (метод сингулярных границ, метод граничных точек). Проблема нестационарной динамики неограниченных анизотропных пластин практически не затронута, а вопросы, связанные с нестационарной динамикой анизотропных пластин произвольной формы, открыты в аналитическом и числено-аналитическом плане.

В данной работе численно-аналитическими методами решена новая нестационарная задача теории упругости, а именно, найдена новая функция нестационарных нормальных перемещений для тонкой упругой анизотропной пластины на упруго-инерционном основании и локальными граничными условиями на произвольном контуре. Заложенный в исследовании потенциал, открывающий возможности для проектирования новых перспективных элементов конструкций в виде пластин (панелей), в частности, применяемых в силовых элементах конструкции крыла и оперения, а также в элементах конструкций механизации и органов управления ЛА. Он заключается в возможности учета конструктивной анизотропии таких панелей, а также особенностях её связи с несущими конструкциями как по периметру (индивидуальный учет элементов крепления по произвольному контуру), так и по поверхности (её связь с разного рода заполнителями). В качестве математической модели для описания движения пластины приняты гипотезы тонких упругих пластин Тимошенко.

Математическая постановка задачи. Объектом исследования является тонкая упругая анизотропная пластина постоянной толщины, связанная с упруго-инерционным основанием и с локальными опорами на произвольном контуре. В случае, когда расположение

локальных опор образует «замкнутую» последовательность, объектом исследования может быть внешняя или внутренняя область этой последовательности опор. Частный случай области исследования приведен на рис. 1.

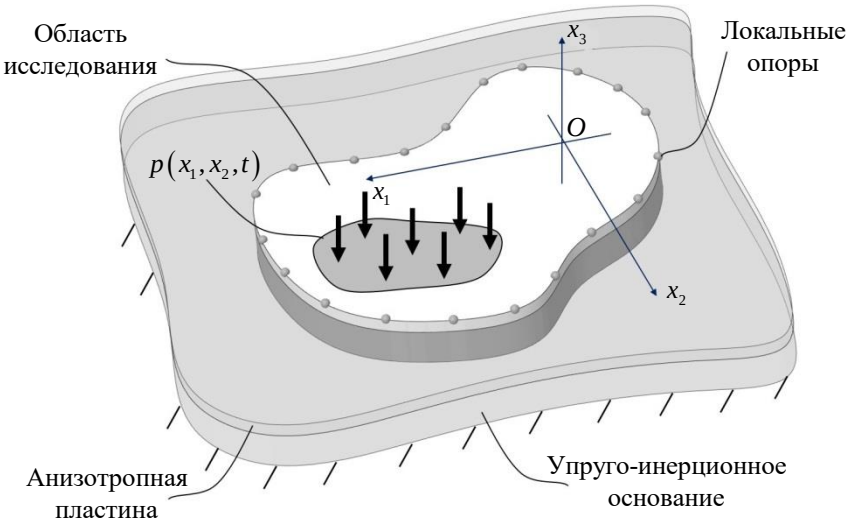


Рис.1. Объект исследования

В начальный момент времени пластина находится в невозмущенном состоянии, затем на нее воздействует нестационарное во времени и координатам нормальное давление $p(x_1, x_2, t)$. Движение пластины рассмотрено в декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$. Плоскость Ox_1x_2 совпадает со срединной плоскостью пластины. Модель анизотропии материала такая, что имеет место только одна плоскость симметрии, геометрически совпадающей со срединной плоскостью пластины. В качестве математической теории пластин приняты гипотезы Тимошенко. Анизотропная модель, которая учитывает девять независимых упругих постоянных материала: c_{11}, c_{12}, c_{16}, c_{22}, c_{26}, c_{44}, c_{45}, c_{55}, c_{66}.

Постановка задачи включает в себя уравнения движения тонкой упругой анизотропной пластины Тимошенко, связанной с упруго-инерционным основанием:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} = L(\mathbf{w}) + \mathbf{p},\ \mathbf{w} = (\chi_1, \chi_2, w)^T,\ \mathbf{p} = \left(0, 0, \frac{p}{\rho h + m_f}\right)^T,\ L = \left(L_{ij}\right)_{3x3}, \quad (1)$$

$$L_{11}(\chi_1) = \frac{1}{\rho}\left(c_{11}\frac{\partial^2 \chi_1}{\partial x_1^2} + 2c_{16}\frac{\partial^2 \chi_1}{\partial x_1 \partial x_2} + c_{66}\frac{\partial^2 \chi_1}{\partial x_2^2}\right) - \frac{hk^2}{\rho I}c_{55}\chi_1,$$

$$L_{12}\left(\chi_2\right)=\frac{1}{\rho}\left(c_{16}\frac{\partial^2\chi_2}{\partial x_1^2}+\left(c_{12}+c_{66}\right)\frac{\partial^2\chi_2}{\partial x_1\partial x_2}+c_{26}\frac{\partial^2\chi_2}{\partial x_2^2}\right)-\frac{hk^2}{\rho I}c_{45}\chi_2,$$

$$L_{13}\left(w\right)=-\frac{hk^2}{\rho I}\left(c_{55}\frac{\partial w}{\partial x_1}+c_{45}\frac{\partial w}{\partial x_2}\right),$$

$$L_{21}\left(\chi_1\right)=L_{12}\left(\chi_1\right),$$

$$L_{22}\left(\chi_2\right)=\frac{1}{\rho}\left(c_{66}\frac{\partial^2\chi_2}{\partial x_1^2}+2c_{26}\frac{\partial^2\chi_2}{\partial x_1\partial x_2}+c_{22}\frac{\partial^2\chi_2}{\partial x_2^2}\right)-\frac{hk^2}{\rho I}c_{44}\chi_2,$$

$$L_{23}\left(w\right)=-\frac{hk^2}{\rho I}\left(c_{45}\frac{\partial w}{\partial x_1}+c_{44}\frac{\partial w}{\partial x_2}\right),$$

$$L_{31}\left(\chi_1\right)=-\frac{\rho I}{\rho h+m_f}L_{13}\left(\chi_1\right),\ L_{32}\left(\chi_2\right)=-\frac{\rho I}{\rho h+m_f}L_{23}\left(\chi_2\right),$$

$$L_{33}\left(w\right)=\frac{k^2h}{\rho h+m_f}\left(c_{55}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+2c_{45}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2}+c_{44}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)-\frac{c}{\rho h+m_f}w;$$

нулевые начальные условия:

$$w\big|_{t=0}=\left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=0}=\chi_1\big|_{t=0}=\left.\frac{\partial\chi_1}{\partial t}\right|_{t=0}=\chi_2\big|_{t=0}=\left.\frac{\partial\chi_2}{\partial t}\right|_{t=0}=0; \tag{2}$$

и граничные условия для локальных опор двух типов:
- вариант свободного опирания:

$$w\big|_{T_i}=0,\ \left.\frac{\partial\chi_1}{\partial x_1}\right|_{T_i}=\left.\frac{\partial\chi_2}{\partial x_2}\right|_{T_i}=0, \tag{3}$$

- вариант жесткого защемления:

$$w\big|_{T_i}=0,\ \chi_1\big|_{T_i}=\chi_2\big|_{T_i}=0. \tag{4}$$

В соотношениях (1) – (4): w — нормальное перемещение (м); χ_1, χ_2 — векторы углов отклонения ортогонального к срединной поверхности волокна за счёт сдвига; ρ — плотность материала пластины (кг/м^3); h — толщина пластины (м); t — время (с); p — нестационарное давление (Па); c_{ij} — компоненты тензора упругих постоянных (Па); $k=\sqrt{5/6}$ — коэффициент сдвига; $I=h^3/12$ — погонный момент инерции (м^3); c — коэффициент жёсткости основания (Па/м); m_f — массовый коэффициент (кг/м^2); T_i — точки с координатами $(a_i,\ b_i)$ локальных опор по осям x_1, x_2 соответственно; $i=1..N$ — порядковый номер опоры; N — количество опор.

Численно-аналитический метод решения задачи. Решение начально-краевой задачи (1) – (4) построено с применением метода фундаментальных решений [37] (функций Грина, функций влияния) и метода компенсирующих нагрузок [38]:

$$w(x_1,x_2,t)=G_T(x_1,x_2,t)***p(x_1,x_2,t)+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\Big[G_T(x_1,x_2,t)***D_i(x_1,x_2,t)+G_T(x_1,x_2,t)***M_i(x_1,x_2,t)+ \quad (5)$$
$$+G_T(x_1,x_2,t)***N_i(x_1,x_2,t)\Big],$$
$$\chi_j(x_1,x_2,t)=X_j(x_1,x_2,t)***p(x_1,x_2,t)+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\Big[X_j(x_1,x_2,t)***D_i(x_1,x_2,t)+X_j(x_1,x_2,t)***M_i(x_1,x_2,t)+ \quad (6)$$
$$+X_j(x_1,x_2,t)***N_i(x_1,x_2,t)\Big],\ j=1,2.$$

Вводятся компенсирующие нагрузки для того, чтобы искомое решение удовлетворяло граничным условиям (3) или (4). Для каждой локальной опоры, согласно граничным условиям, требуется три сосредоточенные компенсирующие нагрузки:

$$\begin{aligned} D_i(x_1,x_2,t)&=d_i(t)H(t)\delta(x_1-a_i)\delta(x_2-b_i),\\ M_i(x_1,x_2,t)&=m_i(t)H(t)\delta\big(x_1-(a_i-\gamma)\big)\delta(x_2-b_i),\\ N_i(x_1,x_2,t)&=n_i(t)H(t)\delta(x_1-a_i)\delta\big(x_2-(b_i-\gamma)\big). \end{aligned} \quad (7)$$

В (5) – (7) символ «*» — интегральный оператор свертки по пространственным переменным и времени; $G_T(x_1,x_2,t)$ — фундаментальное решение для нормального перемещения неограниченной пластины; $X_j(x_1,x_2,t)$, $j=1,2$ — фундаментальные решения для углов отклонения неограниченной пластины; $H(t)$ — функция Хэвисайда; $D_i(x_1,x_2,t)$ — нагрузка, компенсирующая нормальное перемещение; $M_i(x_1,x_2,t), N_i(x_1,x_2,t)$ — нагрузки, компенсирующие изгибающий момент и/или угол поворота; $d_i(t)$, $m_i(t)$, $n_i(t)$ — законы изменения амплитуды компенсирующих нагрузок во времени; a_i, $a_i-\gamma$, b_i, $b_i-\gamma$, $\gamma=const$ — координаты действия компенсирующих нагрузок.

Постановка задачи о фундаментальных решениях неограниченной тонкой упругой анизотропной пластины Тимошенко следует из (1) и (2), где необходимо добавить условия ограниченности решения на бесконечности, а в качестве нагрузки выступает дельта-функция Дирака $\delta(x_1,x_2)\delta(t)$:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{G}}{\partial t^2} = L\left(\mathbf{G}\right) + \mathbf{q},$$

$$\mathbf{G} = \left(X_1, X_2, G_T\right)^T,\ \mathbf{q} = \left(0,0,q\right)^T,\ \ q = \delta\left(x_1, x_2\right)\delta\left(t\right)\Big/\left(\rho h + m_f\right),$$

$$G_T\big|_{t=0} = \left.\frac{\partial G_T}{\partial t}\right|_{t=0} = X_1\big|_{t=0} = \left.\frac{\partial X_1}{\partial t}\right|_{t=0} = X_2\big|_{t=0} = \left.\frac{\partial X_2}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \tag{8}$$

$$\lim_{r\to\infty} G_T\left(x_1, x_2, t\right) = 0,$$

$$\lim_{r\to\infty} X_1\left(x_1, x_2, t\right) = 0,\ \lim_{r\to\infty} X_2\left(x_1, x_2, t\right) = 0,\ r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

Решение задачи (8) построено с применением интегральных преобразований Фурье по пространственным координатам x_1, x_2 и Лапласа по времени t [37]:

$$\mathbf{A}\mathbf{g}^{FL} = \mathbf{q}^{FL},$$

$$\mathbf{g}^{FL} = \left(X_1^{FL}, X_2^{FL}, G_T^{FL}\right)^T,\ \mathbf{q}^{FL} = \left(0,0,q^{FL}\right)^T,\ q^{FL} = 1\Big/\left(\rho h + m_f\right), \tag{9}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} s^2 + Q_1 & Q_2 & Q_3 \\ Q_2 & s^2 + Q_4 & Q_5 \\ -fQ_3 & -fQ_5 & s^2 + Q_6 \end{pmatrix},$$

$$Q_1 = Q_1\left(q_1, q_2\right) = \frac{1}{\rho}\left(q_1^2 c_{11} + 2q_1 q_2 c_{16} + q_2^2 c_{66} + \frac{hk^2}{I} c_{55}\right),$$

$$Q_2 = Q_2\left(q_1, q_2\right) = \frac{1}{\rho}\left(q_1^2 c_{16} + q_1 q_2\left(c_{12} + c_{66}\right) + q_2^2 c_{26} + \frac{hk^2}{I} c_{45}\right),$$

$$Q_3 = Q_3\left(q_1, q_2\right) = i\frac{hk^2}{\rho I}\left(q_1 c_{55} + q_2 c_{45}\right),$$

$$Q_4 = Q_4\left(q_1, q_2\right) = \frac{1}{\rho}\left(q_1^2 c_{66} + 2q_1 q_2 c_{26} + q_2^2 c_{22} + \frac{hk^2}{I} c_{44}\right),$$

$$Q_5 = Q_5\left(q_1, q_2\right) = i\frac{hk^2}{\rho I}\left(q_1 c_{45} + q_2 c_{44}\right),$$

$$Q_6 = Q_6\left(q_1, q_2\right) = \frac{hk^2\left(q_1^2 c_{55} + 2q_1 q_2 c_{45} + q_2^2 c_{44}\right) + c}{\rho h + m_f},\ f = \frac{\rho I}{\rho h + m_f},$$

где

$$\begin{Bmatrix} X_1^{FL}\left(q_1, q_2, s\right) \\ X_2^{FL}\left(q_1, q_2, s\right) \\ G_T^{FL}\left(q_1, q_2, s\right) \end{Bmatrix} = \int_0^\infty \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \begin{Bmatrix} X_1\left(x_1, x_2, t\right) \\ X_2\left(x_1, x_2, t\right) \\ G_T\left(x_1, x_2, t\right) \end{Bmatrix} e^{-i\left(q_1 x_1 + q_2 x_2\right) - s\tau} dx_1 dx_2 dt.$$

Здесь i — мнимая единица.

Решение системы (9) имеет вид:

$$G_T^{FL}\left(q_1,q_2,s\right)=C\frac{s^4+R_1s^2+R_2}{P\left(q_1,q_2,s\right)},$$
$$X_1^{FL}\left(q_1,q_2,s\right)=-C\frac{Q_3s^2+R_6}{P\left(q_1,q_2,s\right)},\ X_2^{FL}\left(q_1,q_2,s\right)=-C\frac{Q_5s^2+R_7}{P\left(q_1,q_2,s\right)}, \tag{10}$$

$$C=\frac{1}{\rho h+m_f},$$
$$P\left(q_1,q_2,s\right)=s^6+R_3\left(q_1,q_2\right)s^4+R_4\left(q_1,q_2\right)s^2+R_5\left(q_1,q_2\right),$$
$$R_1=R_1\left(q_1,q_2\right)=Q_1+Q_4,\ R_2=R_2\left(q_1,q_2\right)=Q_1Q_4-{Q_2}^2,$$
$$R_3=R_3\left(q_1,q_2\right)=Q_1+Q_4+Q_6, \tag{11}$$
$$R_4=R_4\left(q_1,q_2\right)=Q_1Q_4+Q_1Q_6+Q_4Q_6-{Q_2}^2+j{Q_3}^2+j{Q_5}^2,$$
$$R_5=R_5\left(q_1,q_2\right)=Q_1Q_4Q_6-2jQ_2Q_3Q_5-Q_6{Q_2}^2+jQ_1{Q_5}^2+jQ_4{Q_3}^2,$$
$$R_6=R_6\left(q_1,q_2\right)=Q_3Q_4-Q_2Q_5,\ R_7=R_7\left(q_1,q_2\right)=Q_1Q_5-Q_3Q_2.$$

Корни знаменателя в (10) находятся по формулам:

$$s_k=\pm\sqrt{f_k},\ f_k=y_k-R_3/3,\ k=1,2,3$$
$$y_1=2\cos\left(\frac{\varphi}{3}\right)\sqrt{-\frac{P}{3}},\ y_2=2\cos\left(\frac{\varphi}{3}-\frac{2\pi}{3}\right)\sqrt{-\frac{P}{3}},\ y_3=2\cos\left(\frac{\varphi}{3}-\frac{4\pi}{3}\right)\sqrt{-\frac{P}{3}},$$
$$\varphi=\arccos\left(\frac{3Q}{2P}\sqrt{-\frac{3}{P}}\right).$$

Оригиналы по Лапласу фундаментальных решений (10) строятся аналитически с помощью вычетов:

$$\begin{Bmatrix}X_1^F\left(q_1,q_2,t\right)\\X_2^F\left(q_1,q_2,t\right)\\G_T^F\left(q_1,q_2,t\right)\end{Bmatrix}=\sum_{k=1}^{6}\lim_{s\to s_k}\left[\left(s-s_k\right)\begin{Bmatrix}X_1^{FL}\left(q_1,q_2,s_k\right)\\X_2^{FL}\left(q_1,q_2,s_k\right)\\G_T^{FL}\left(q_1,q_2,s_k\right)\end{Bmatrix}\right]e^{s_kt}.$$

В результате получаем:

$$G_T^F\left(q_1,q_2,t\right)=2C\sum_{y=1}^{3}A_{2y-1\,1}\mathrm{sh}\left(s_{2y-1}t\right),$$
$$X_1^F\left(q_1,q_2,t\right)=-2C\sum_{y=1}^{3}A_{2y-1\,2}\mathrm{sh}\left(s_{2y-1}t\right), \tag{12}$$
$$X_2^F\left(q_1,q_2,t\right)=-2C\sum_{y=1}^{3}A_{2y-1\,3}\mathrm{sh}\left(s_{2y-1}t\right),$$

где

$$A_{\Psi 1}=\frac{{s_\Psi}^4+{s_\Psi}^2R_1+R_2}{P_\Psi},\ A_{\psi 2}=\frac{Q_3{s_\psi}^2+R_6}{P_\psi},\ A_{\psi 3}=\frac{Q_5{s_\psi}^2+R_7}{P_\psi},\ \psi=1,3,5.$$

$$P_1=2s_1\left({s_1}^2-{s_3}^2\right)\left({s_1}^2-{s_5}^2\right),\ P_3=2s_3\left({s_3}^2-{s_1}^2\right)\left({s_3}^2-{s_5}^2\right),$$
$$P_5=2s_5\left({s_5}^2-{s_3}^2\right)\left({s_5}^2-{s_1}^2\right).$$

Обращение преобразования Фурье осуществляется численно на основе метода интегрирования быстро осциллирующих функций [39]

$$G_T\left(x_1,x_2,t\right)=\frac{\Delta_1^2}{16\pi^2}\sum_{k=0}^{R-1}\sum_{f=0}^{R-1}e^{\frac{i}{2}\left(\left(q_{1_{k+1}}+q_{1_k}\right)x_1+\left(q_{2_{f+1}}+q_{2_f}\right)x_2\right)}L\left(x_1,x_2,t\right),$$
$$L_{kf}\left(x_1,x_2,t\right)=e^{-i\left(z_1+z_2\right)}G_T^F\left(q_{1_k},q_{2_f},t\right)+e^{i\left(-z_1+z_2\right)}G_T^F\left(q_{1_k},q_{2_{f+1}},t\right)+ \quad (13)$$
$$+e^{i\left(z_1-z_2\right)}G_T^F\left(q_{1_{k+1}},q_{2_f},t\right)+e^{i\left(z_1+z_2\right)}G_T^F\left(q_{1_{k+1}},q_{2_{f+1}},t\right),$$

$$X_j\left(x_1,x_2,t\right)=\frac{\Delta_2^2}{16\pi^2}\sum_{p=0}^{F-1}\sum_{c=0}^{F-1}e^{\frac{i}{2}\left(\left(q_{1_{p+1}}+q_{1_p}\right)x_1+\left(q_{2_{c+1}}+q_{2_c}\right)x_2\right)}H\left(x_1,x_2,t\right),$$
$$H\left(x_1,x_2,t\right)=e^{-i\left(v_1+v_2\right)}X_j^F\left(q_{1_p},q_{2_c},t\right)+e^{i\left(-v_1+v_2\right)}X_j^F\left(q_{1_p},q_{2_{c+1}},t\right)+ \quad (14)$$
$$+e^{i\left(v_1-v_2\right)}X_j^F\left(q_{1_{p+1}},q_{2_c},t\right)+e^{i\left(v_1+v_2\right)}X_j^F\left(q_{1_{p+1}},q_{2_{c+1}},t\right),$$

где

$$z_1=\frac{\Delta_1}{2}x_1,\ z_2=\frac{\Delta_1}{2}x_2,\ \Delta_1=\frac{2E}{R},$$
$$q_{1_k}=-E+k\Delta_1,\ q_{2_f}=-E+f\Delta_1,$$
$$q_{1_{k+1}}=-E+\left(k+1\right)\Delta_1,\ q_{2_{f+1}}=-E+\left(f+1\right)\Delta_1,$$
$$v_1=\frac{\Delta_2}{2}x_1,\ v_2=\frac{\Delta_2}{2}x_2,\ \Delta_2=\frac{2Q}{F},$$
$$q_{1_p}=-Q+p\Delta_2,\ q_{2_c}=-Q+c\Delta_2,$$
$$q_{1_{p+1}}=-Q+\left(p+1\right)\Delta_2,\ q_{2_{c+1}}=-Q+\left(c+1\right)\Delta_2.$$

В соотношениях (13), (14) параметры численного интегрирования E и Q (границы интегрирования), а также R и F (шаги интегрирования) вычисляются с использованием двойного итерационного цикла аналогично методу, описанному в [40]. Это позволяет обеспечить построение фундаментальных решений с заданной точностью.

Алгоритм вычисления нестационарной функции нормальных перемещений. С учетом найденных фундаментальных решений

(13), (14) и характера компенсирующих нагрузок (7) функция нормального перемещения (5) и углов отклонения (6) примут вид

$$\begin{aligned} w(x_1,x_2,t) = &\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{t} G_T(x_1-\xi,x_2-\zeta,t-\tau)p(\xi,\zeta,\tau)\,d\tau d\zeta d\xi + \\ &+\sum_{i=1}^{N}\left[\int_{0}^{t} G_T(x_1-a_i,x_2-b_i,t-\tau)d_i(\tau)\,d\tau + \right. \\ &+\int_{0}^{t} G_T(x_1-a_i+\gamma,x_2-b_i,t-\tau)m_i(\tau)\,d\tau + \\ &\left.+\int_{0}^{t} G_T(x_1-a_i,x_2-b_i+\gamma,t-\tau)n_i(\tau)\,d\tau\right]. \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} \chi_j(x_1,x_2,t) = &\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{t} X_j(x_1-\xi,x_2-\zeta,t-\tau)p(\xi,\zeta,\tau)\,d\tau d\zeta d\xi + \\ &+\sum_{i=1}^{N}\left[\int_{0}^{t} X_j(x_1-a_i,x_2-b_i,t-\tau)d_i(\tau)\,d\tau + \right. \\ &+\int_{0}^{t} X_j(x_1-a_i+\gamma,x_2-b_i,t-\tau)m_i(\tau)\,d\tau + \\ &\left.+\int_{0}^{t} X_j(x_1-a_i,x_2-b_i+\gamma,t-\tau)n_i(\tau)\,d\tau\right],\ j=1,2. \end{aligned} \tag{16}$$

В (15) и (16) функции амплитуд компенсирующих нагрузок $d_i(\tau)$, $m_i(\tau)$, $n_i(\tau)$ должны удовлетворять граничным условиям и заранее неизвестны. Расчет амплитуд компенсирующих нагрузок выполняется из системы интегральных уравнений Вольтерра 1-го рода с разностным ядром, получаемой в результате подстановки (15) и (16) в граничные условия (3) или (4):

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{t} G_T(a_r-\xi,b_r-\zeta,t-\tau)p(\xi,\zeta,\tau)\,d\tau d\zeta d\xi + \\ &+\sum_{i=1}^{N}\left[\int_{0}^{t} G_T(a_r-a_i,b_r-b_i,t-\tau)d_i(\tau)\,d\tau + \right. \\ &+\int_{0}^{t} G_T(a_r-a_i+\gamma,b_r-b_i,t-\tau)m_i(\tau)\,d\tau + \\ &\left.+\int_{0}^{t} G_T(a_r-a_i,b_r-b_i+\gamma,t-\tau)n_i(\tau)\,d\tau\right]=0,\ r=\overline{1,N}, \end{aligned} \tag{17}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{t}\frac{\partial^u X_j}{\partial x_j^u}\left(a_r-\xi,b_r-\zeta,t-\tau\right)p\left(\xi,\zeta,\tau\right)d\tau d\zeta d\xi+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\left[\int_{0}^{t}\frac{\partial^u X_j}{\partial x_j^u}\left(a_r-a_i,b_r-b_i,t-\tau\right)d_i\left(\tau\right)d\tau+\right.$$

$$+\int_{0}^{t}\frac{\partial^u X_j}{\partial x_j^u}\left(a_r-a_i+\gamma,b_r-b_i,t-\tau\right)m_i\left(\tau\right)d\tau+$$

$$\left.+\int_{0}^{t}\frac{\partial^u X_j}{\partial x_j^u}\left(a_r-a_i,b_r-b_i+\gamma,t-\tau\right)n_i\left(\tau\right)d\tau\right]=0,\ r=\overline{1,N}.$$

В системе (17) порядок u производных зависит от рассматриваемых граничных условий: $u=1$ в случае жесткого защемления; $u=2$ в случае свободного опирания; j принимает значения 1 и 2. Количество уравнений системы кратно $3N$, где N — число локальных опор.

Решение системы интегральных уравнений (17) относительно функций $d_i\left(\tau\right)$, $m_i\left(\tau\right)$, $n_i\left(\tau\right)$ построено с применением метода дискретизации этих функций по времени t на l равных отрезков ($l\geq 1$) длительностью $\Delta_t=\dfrac{T}{l}:\quad t\leftrightarrow\left\{t_c=c\Delta_t:\ \Delta_t=T/l,\ c=0,1,...,l-1\right\}$, где T — конечный момент времени. В предположении, что функции $d_i\left(\tau\right)$, $m_i\left(\tau\right)$, $n_i\left(\tau\right)$ остаются постоянными на каждом временном интервале $\left[t_c,t_{c+1}\right]$ система уравнений (17) на каждом шаге по времени принимает вид:

$$\sum_{i=1}^{N}\left[d_{ic}\int_{t_c}^{t_{c+1}}G_T\left(a_r-a_i,b_r-b_i,t_{c+1}-\tau\right)d\tau+\right.$$

$$+m_{ic}\int_{t_c}^{t_{c+1}}G_T\left(a_r-a_i+\gamma,b_r-b_i,t_{c+1}-\tau\right)d\tau+$$

$$\left.+n_{ic}\int_{t_c}^{t_{c+1}}G_T\left(a_r-a_i,b_r-b_i+\gamma,t_{c+1}-\tau\right)d\tau\right]=$$

$$=-\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{t}G_T\left(a_r-\xi,b_r-\zeta,t-\tau\right)p\left(\xi,\zeta,\tau\right)d\tau d\xi d\zeta-F_r,\ r=\overline{1,N},$$

$$\sum_{i=1}^{N}\Bigg[d_{ic}\int_{t_c}^{t_{c+1}}\frac{\partial^u X_1}{\partial x_1^u}\left(a_r-a_i,b_r-b_i,t_{c+1}-\tau\right)d\tau+$$

$$+m_{ic}\int_{t_c}^{t_{c+1}}\frac{\partial^u X_1}{\partial x_1^u}\left(a_r-a_i+\gamma,b_r-b_i,t_{c+1}-\tau\right)d\tau+$$

$$+n_{ic}\int_{t_c}^{t_{c+1}}\frac{\partial^u X_1}{\partial x_1^u}\left(a_r-a_i,b_r-b_i+\gamma,t_{c+1}-\tau\right)d\tau\Bigg]= \tag{18}$$

$$=-\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{t}\frac{\partial^u X_1}{\partial x_1^u}\left(a_r-\xi,b_r-\zeta,t-\tau\right)p\left(\xi,\zeta,\tau\right)d\tau d\xi d\zeta-H_r,\ r=\overline{1,N},$$

$$\sum_{i=1}^{N}\Bigg[d_{ic}\int_{t_c}^{t_{c+1}}\frac{\partial^u X_2}{\partial x_2^u}\left(a_r-a_i,b_r-b_i,t_{c+1}-\tau\right)d\tau+$$

$$+m_{ic}\int_{t_c}^{t_{c+1}}\frac{\partial^u X_2}{\partial x_2^u}\left(a_r-a_i+\gamma,b_r-b_i,t_{c+1}-\tau\right)d\tau+$$

$$+n_{ic}\int_{t_c}^{t_{c+1}}\frac{\partial^u X_2}{\partial x_2^u}\left(a_r-a_i,b_r-b_i+\gamma,t_{c+1}-\tau\right)d\tau\Bigg]=$$

$$=-\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{t}\frac{\partial^u X_2}{\partial x_2^u}\left(a_r-\xi,b_r-\zeta,t-\tau\right)p\left(\xi,\zeta,\tau\right)d\tau d\xi d\zeta-R_r,\ r=\overline{1,N}.$$

В (17) d_{ic}, m_{ic}, n_{ic} — значения компенсирующих нагрузок в текущий отрезок времени, F_r, H_r, R_r — добавочные части (числа), учитывающие историю изменения значений компенсирующих нагрузок во времени в каждой опоре. При $c=0$ добавочные части – нулевые (поскольку истории изменения компенсирующих нагрузок еще нет), а при $c>0$ — принимают следующий вид:

$$F_r=\sum_{k=0}^{c-1}\sum_{i=1}^{N}\Bigg[d_{ik}\int_{t_k}^{t_{k+1}}G_T\left(a_r-a_i,b_r-b_i,t_{c+1}-\tau\right)d\tau+$$

$$+m_{ik}\int_{t_k}^{t_{k+1}}G_T\left(a_r-a_i+\gamma,b_r-b_i,t_{c+1}-\tau\right)d\tau+$$

$$+n_{ik}\int_{t_k}^{t_{k+1}}G_T\left(a_r-a_i,b_r-b_i+\gamma,t_{c+1}-\tau\right)d\tau\Bigg],\ r=\overline{1,N},$$

$$H_r = \sum_{k=0}^{c-1}\sum_{i=1}^{N}\Bigg[d_{ik}\int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\partial^u X_1}{\partial x_1^u}\left(a_r - a_i, b_r - b_i, t_{c+1} - \tau\right)d\tau + \\ + m_{ik}\int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\partial^u X_1}{\partial x_1^u}\left(a_r - a_i + \gamma, b_r - b_i, t_{c+1} - \tau\right)d\tau + \\ + n_{ik}\int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\partial^u X_1}{\partial x_1^u}\left(a_r - a_i, b_r - b_i + \gamma, t_{c+1} - \tau\right)d\tau \Bigg],\ r = \overline{1,N},$$

$$R_r = \sum_{k=0}^{c-1}\sum_{i=1}^{N}\Bigg[d_{ik}\int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\partial^u X_2}{\partial x_2^u}\left(a_r - a_i, b_r - b_i, t_{c+1} - \tau\right)d\tau + \\ + m_{ik}\int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\partial^u X_2}{\partial x_2^u}\left(a_r - a_i + \gamma, b_r - b_i, t_{c+1} - \tau\right)d\tau + \\ + n_{ik}\int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\partial^u X_2}{\partial x_2^u}\left(a_r - a_i, b_r - b_i + \gamma, t_{c+1} - \tau\right)d\tau \Bigg],\ r = \overline{1,N}. \tag{19}$$

В (19) d_{ik}, m_{ik}, n_{ik} — значения компенсирующих нагрузок в предыдущий отрезок времени.

Среди интегралов, входящих в (18) у компенсирующих нагрузок d_{ic}, m_{ic}, n_{ic} и интегралов, входящих в добавочные части (19) у компенсирующих нагрузок d_{ik}, m_{ik}, n_{ik} имеем следующие структуры подынтегральных функций

$$\int_{t_c}^{t_{c+1}} G_T\left(x_1, x_2, t_{c+1} - \tau\right)d\tau,\ \int_{t_c}^{t_{c+1}} \frac{\partial^u X_j}{\partial x_j^u}\left(x_1, x_2, t_{c+1} - \tau\right)d\tau,$$
$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} G_T\left(x_1, x_2, t_{c+1} - \tau\right)d\tau,\ \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\partial^u X_j}{\partial x_j^u}\left(x_1, x_2, t_{c+1} - \tau\right)d\tau,$$

взять которые аналитически с учетом (13) и (14) не представляет труда (не приведены из-за своей громоздкости).

Решение системы (18) l раз (на каждом отрезке времени Δ_t) приводит к расчету значений компенсирующих нагрузок d_{ic}, m_{ic}, n_{ic}, $c = \overline{1, l-1}$ для каждого момента времени Δ_t с учетом истории их изменения на более ранних промежутках времени. В результате, нестационарная функция нормальных перемещений для тонкой упругой анизотропной пластины Тимошенко на упруго-инерционном основании с локальными опорами примет вид

$$w(x_1,x_2,T)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{T}G_T\left(x_1-\xi,x_2-\zeta,T-\tau\right)p\left(\xi,\zeta,\tau\right)d\tau d\zeta d\xi+$$
$$+\sum_{k=0}^{l-1}\sum_{i=1}^{n}\left[d_{ik}\int_{t_k}^{t_{k+1}}G_T\left(x_1-a_i,x_2-b_i,T-\tau\right)d\tau+\right.$$
$$+m_{ik}\int_{t_k}^{t_{k+1}}G_T\left(x_1-a_i+\gamma,x_2-b_i,T-\tau\right)d\tau+ \qquad (20)$$
$$\left.+n_{ik}\int_{t_k}^{t_{k+1}}G_T\left(x_1-a_i,x_2-b_i+\gamma,T-\tau\right)d\tau\right].$$

Интегралы у компенсирующих нагрузок в (20) с учетом фундаментального решения для пластины Тимошенко имеют аналитическую форму записи и не приведены из-за своей громоздкости. Интегралы от действующей нагрузки в (20) можно взять как численно с применением квадратурных формул, так и аналитически для заданной конкретной функции давления.

Пример численного расчета. В качестве примера расчёта рассмотрим случай нестационарного воздействия куска авиационного пневматика по фрагменту нижней панели корневого закрылка пассажирского самолёта (см. рис. 2), представляющий собой прямоугольную в плане пластинку, соединённую с силовыми элементами при помощи заклепок.

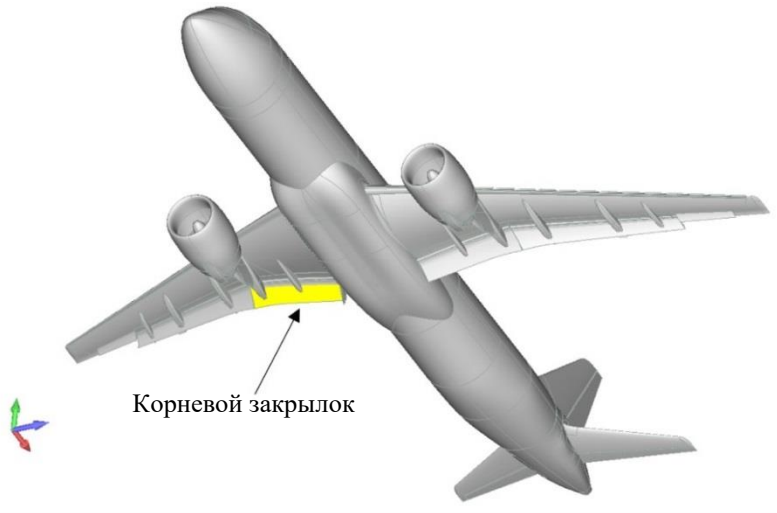


Рис.2. Расположение корневого закрылка правой консоли пассажирского самолёта

Размеры панели, схема армирования, характеристики материала, шаг заклепок по периметру и закон нестационарного воздействия не

имеют отношения к конкретному типу или марке летательного аппарата и приняты для демонстрации возможностей соотношения (20).

Предполагается, что панель представляет собой слоистую структуру, монослои которой изготовлены из упругого ортотропного материала. Препрег выполнен из углеродной ткани саржевого плетения на основе высокомодульного углеродного волокна, пропитанного эпоксидным модифицированным связующим. Физико-механические характеристики материала известны и получены экспериментальным путём фирмой-производителем. Режим испытаний *RTD* (*Root Temperature Dry*) – испытания композитов при комнатной температуре и влажности в состоянии поставки (состояние, в котором находятся образцы сразу после изготовления; содержание влаги в них не превышает 10 % от максимального влагонасыщения при относительной влажности 85 %). В таблице 1 указаны физико-механические характеристики материала монослоя панели.

Таблица 1

Физико-механические характеристики монослоя

Величина	Значение
E_1, модуль упругости в продольном направлении (ГПа)	70
E_2, модуль упругости в поперечном направлении (ГПа)	71
G_{12}, модуль упругости при сдвиге в плоскости листа (ГПа)	4.6
μ_{12}, коэффициент Пуассона	0.06
ρ, плотность (т/мм^3)	$1.5\cdot10^{-9}$

Схема укладки панели смешанная симметричная и сбалансированная:

$$[+45^\circ/-45^\circ/0^\circ/+45^\circ/-45^\circ/+45^\circ/-45^\circ/0^\circ$$
$$/+45^\circ/-45^\circ/-45^\circ/+45^\circ/0^\circ/-45^\circ/+45^\circ]_{sym}$$

Приведенные упругие постоянные материала следующие (в ГПа): $c_{11}=47.75$, $c_{12}=27.19$, $c_{16}=0$, $c_{22}=47.95$, $c_{26}=0$, $c_{44}=4.6$, $c_{45}=0$, $c_{55}=4.6$, $c_{66}=27.51$.

Панель габаритами 980×250 мм соединена с силовыми элементами при помощи сорока заклепок. Учет заклепок в соотношении (20) выполнен путем удовлетворения граничным условиям (3). Нестационарное воздействие фрагмента пневматика моделируется действием по нормали сосредоточенной в центре панели силы. Закон для нестационарной нагрузки имеет вид:

$$p(x_1,x_2,t)=A(t)H(t)\delta(x_1)\delta(x_2),$$
$$A(t)=5\cdot10^7\sin(t)e^{-1\cdot10^4 t}. \qquad (21)$$

На рис. 3 приведен график изменения амплитуды $A(t)$ во времени.

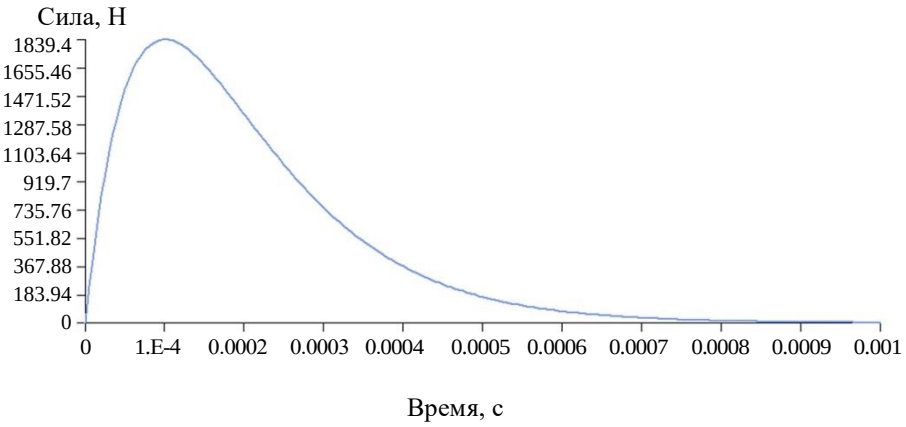


Рис.3. График изменения нагрузки во времени

Зависимость (21) является аппроксимацией функции контактной силы, полученной при решении задачи соударения фрагмента пневматика с энергией 68.8 мДж.

В качестве оценки достоверности результатов, получаемых по соотношению (20) с учетом фундаментальных решений (13) и (14), поставленная в примере задача дополнительно решена с применением метода конечных элементов.

Численное решение методом конечных элементов проводилось с использованием *Simcenter Nastran Multi-Step Nonlinear Kinematic Transient* (*SOL402*) с применением схемы интегрирования «*Modified Generalized Alpha*». Конечно-элементная модель состоит из 6400 конечных элементов (КЭ) типа «*CQUAD*4», характерный размер КЭ составляет 6.125 мм (см. рис. 4). По периметру панели в точках расположения заклёпок наложено ограничение на перемещение в направлении нормали к поверхности панели. Свойства конечных элементов соответствуют типу «*Laminate plate*». В модели использовалась линейно-упругая модель материала «2*D ORTHOTROPIC*». Направление укладки панели ориентированно вдоль длинной кромки.

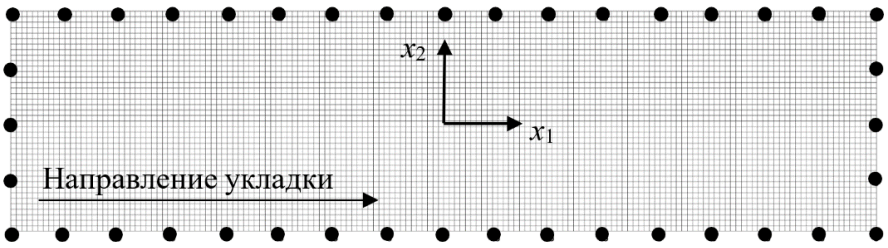
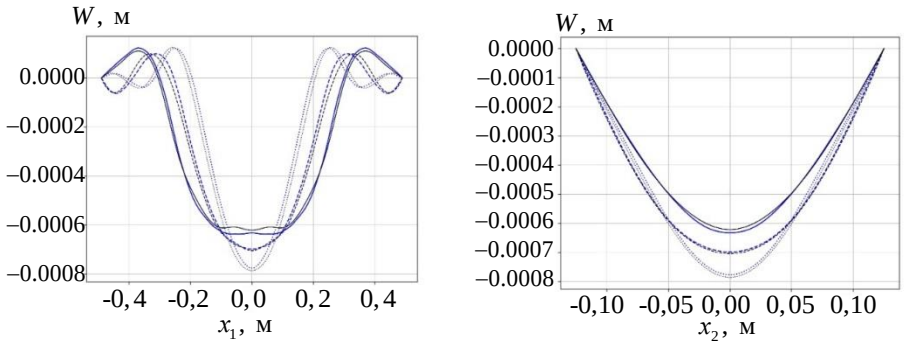


Рис. 4. Конечно-элементная модель

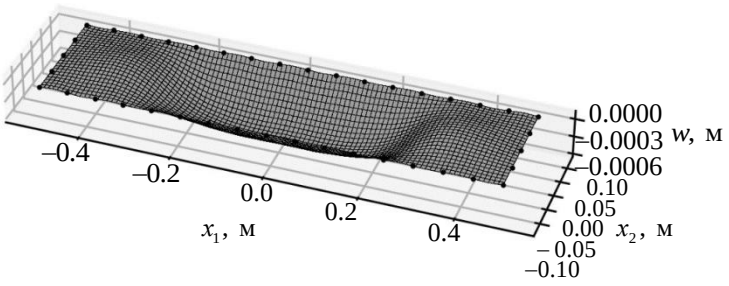
На рис. 5 а, б и рис. 6 а, б представлены результаты расчетов. На рис. 5 а, б приведены нестационарные нормальные перемещения панели в моменты времени 0.6 мс, 0.8 мс и 1 мс вдоль оси x_1 при $x_2 = 0$ и вдоль оси x_2 при $x_1 = 0$ соответственно. Здесь синие линии соответствуют результатам решения по соотношению (20) с учетом (13) и (14), а черные линии соответствуют результатам решения, полученным с помощью *Simcenter Nastran*.



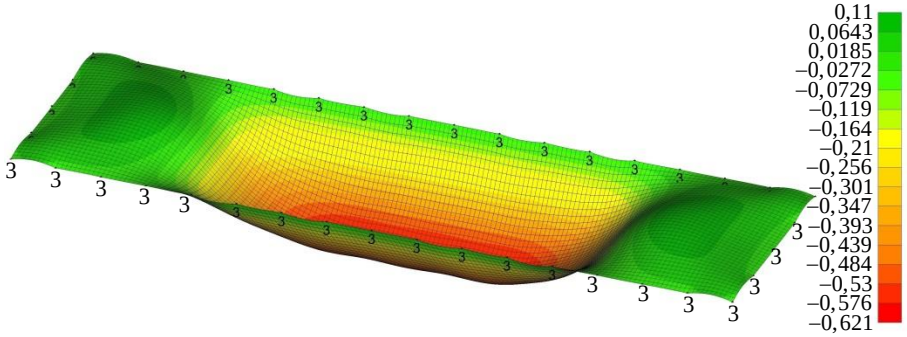
а) б)

Рис. 5. Нестационарные нормальные перемещения панели:
а) — вдоль оси x_1 при $x_2 = 0$; б) — вдоль оси x_2 при $x_1 = 0$

На рис. 6 а, б приведены результаты по пространственным зависимостям нестационарных нормальных перемещений панели в момент времени 1 мс по соотношению (20) и в программном комплексе *Simcenter Nastran* соответственно. Здесь точками отмечено расположение локальных граничных условий.



а)



б)

Рис. 6. Пространственные зависимости нестационарных нормальных перемещений панели в момент времени 1 мс: а) — применение функции (20); б) — применение алгоритмов Simcenter Nastran

Приведенные на рис. 5 и рис. 6 результаты демонстрируют процесс распространения изгибных волн в ортотропной панели и выполнение граничных условий для нормального перемещения в локальных опорах. Графики имеют одинаковые характеры и близки численно, а именно, относительная погрешность не превышает 5 %. Хорошая согласованность результатов позволяет говорить об успешной верификации новой функции (20) нестационарных нормальных перемещений тонкой упругой анизотропной пластины с локальными граничными условиями на произвольном контуре.

Заключение. Предложенные в работе новые методы численно-аналитического расчёта нестационарного деформирования тонкий упругих анизотропных пластин хорошо согласуются с численным решением, полученным с помощью МКЭ, и позволяют учитывать упруго-инерционное основание и локальные граничные условия на произвольном контуре. Данные подходы представляют особый интерес с точки зрения возможности расчёта тонкостенных композитных элементов авиационных конструкций (в том числе трёхслойных), соединённых с силовым набором с помощью крепёжных элементов в условиях нестационарного нагружения различного характера.

Найденные новые фундаментальные решения для неограниченной тонкой упругой анизотропной пластины Тимошенко на упруго-инерционном основании могут быть использованы другими авторами для решения нестационарных задач с начальными условиями, контактных задач, обратных нестационарных задач по идентификации нагрузки.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 20-19-00217).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Димитриенко Ю. И., Коряков М. Н., Захаров А. А., Строганов А. С. Численное моделирование сопряженных аэрогазодинамических и термомеханических процессов в композитных конструкциях высокоскоростных летательных аппаратов. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 3(3), с. 3-24

[2] Димитриенко Ю.И., Коряков М.Н., Юрин Ю.В., Захаров А.А., Сборщиков С.В., Богданов И.О. Сопряженное моделирование высокоскоростной аэротермодинамики и внутреннего тепломассопереноса в композитных аэрокосмических конструкциях. *Математическое моделирование и численные методы*, 2021, № 3(31), с. 42–61.

[3] Димитриенко Ю. И., Юрин Ю. В., Федонюк Н. Н. Численное моделирование деформирования и прочности трехслойных композитных конструкций с дефектами. *Математическое моделирование и численные методы*, 2016, № 3(11), с. 3-23.

[4] Димитриенко Ю. И., Юрин Ю. В. Многомасштабное моделирование многослойных тонких композитных пластин с уединенными дефектами. *Математическое моделирование и численные методы*, 2016, № 4(12), с. 47-66.

[5] Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А. Асимптотическая теория многослойных тонких упругих пластин с проскальзыванием слоев. *Математическое моделирование и численные методы*, 2022, № 2(34), с. 28–62.

[6] Жигалко Ю.П., Садыкова М.М. Динамика, тонкой круглой пластинки при нестационарном локальном нагружение. *Исследования по теории пластин и оболочек*, 1990, № 20, с. 184–191.

[7] Моргачев К.С. Нестационарная динамика кольцевой пластины Тимошенко переменой толщины. *Вестник Самарского государственного технического университета*, 2007, т. 15, № 2, с. 162–164.

[8] Дьяченко Ю.П. *Нестационарная задача динамики пластин переменного сечения в уточненной постановке*: диссертация кандидата физико-математических наук. Саратов, СГУ, 2008.

[9] Дьяченко Ю. П., Еленицкий Э. Я., Петров Д. В. Нестационарные задачи динамики пластин и цилиндрических оболочек вращения ступенчатого сечения. *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки*, 2011, № 2, с. 278–288.

[10] Beskou N.D., Muho E.V. Qian J. Dynamic analysis of an elastic plate on a cross-anisotropic elastic half-space under a rectangular moving load. *Acta Mechanica*, 2020, vol. 231, iss. 4, pp. 4735–4759.

[11] Сибиряков А.В. Прикладная теория расчета композиционных пластин на действие импульса внешнего давления. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение,* 2002, № 7, с. 11–18.

[12] Сибиряков А.В. Импульсное нагружение тонкостенных композиционных элементов конструкций. *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*, 2003, № 1, с. 172–180.

[13] Шевченко В.П. Ветров О.С. Динамика ортотропной пластины под действием локальных внезапно приложенных нагрузок. *Труды ИПММ НАН Украины*, 2011, т. 22, с. 207–215.

[14] Шевченко В.П. Ветров О.С. Динамика тонких пластин на упругом основании под действием локальных нагрузок. *Труды ИПММ НАН Украины*, 2013, т. 27, с. 81– 88.

[15] Wahab M.A., Jabbour T., Davies P. Prediction of impact damage in composite sandwich plates. *Materiaux & Techniques*, 2019, vol. 107, no. 2, art. 201.

[16] Nayfeh A.H., Chimenti D.E. Free wave propagation in plates of general anisotropic media. *Journal of applied mechanics-transactions of the ASME*, 1989, vol. 56, no. 4, pp. 881–886.

[17] Daros C.H. The dynamic fundamental solution and BEM formulation for laminated anisotropic Kirchhoff plates. *Engineering analysis with boundary elements*, 2015, vol. 54, no. 2, pp. 19–27.

[18] Reddy J.N. Dynamic (transient) analysis of layered anisotropic composite-material plates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1983, Vol. 19, p. 237–255.

[19] Raghu P., Rajagopal A., Reddy, J.N. Nonlocal transient dynamic analysis of laminated composite plates. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 2020, vol. 27, no. 1, pp. 1–9.

[20] Pervez T. Zabaras N. Transient dynamic and damping analysis of laminated anisotropic plates using a refined plate theory. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1992, vol. 33, pp. 1059-1080.

[21] Chen J., Dawe D.J., Wang S. Nonlinear transient analysis of rectangular composite laminated plates. *Composite Structures*, 2000, vol. 49, iss. 2, pp. 129–139.

[22] Kant T., Ravichandran R.V., Pandya B.N., Mallikarjuna B.N. Finite element transient dynamic analysis of isotropic and fibre reinforced composite plates using a higher-order theory. *Composite Structures*, 1988, vol. 17, iss. 2, pp. 229–255.

[23] Patel B.P., Gupta S.S., Joshi M., Ganapathi M. Transient response analysis of bimodulus anisotropic laminated composite plates. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 2005, vol. 24, no. 8, pp. 795–821.

[24] Burlayenko V.N., Sadowski T. Transient dynamic response of debonded sandwich plates predicted with finite element analysis. *Meccanica*, 2014, vol. 49, pp. 2617–2633.

[25] Fallstrom K. E., Lindblom O. Transient bending wave propagation in anisotropic plates. *Journal of Applied Mechanics*, 1998, vol. 65, no. 4, pp. 930–938.

[26] Fällström K.-E., Lindblom O., Näslund R., Persson L.-E. A study of bending waves in infinite and anisotropic plates. *Applications of Mathematics*, 1997, vol. 42, no. 3, pp. 213–232.

[27] Musa A.E.S., Al-Gahtani H.J. Bending analysis of thin elastic plates with internal flexible column supports using boundary point method. *Arabian Journal for Science and Engineering*, 2023, vol. 48, pp. 13395–13413.

[28] Ai Z.Y., Hu Y.D. A coupled BEM-ALEM approach for analysis of elastic thin plates on multilayered soil with anisotropic permeability. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2015, vol. 53, pp. 40–45.

[29] Dong C.Y., Lo S.H., Cheung Y.K., Lee K.Y. Anisotropic thin plate bending problems by Trefftz boundary collocation method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2004, vol. 28, iss. 9, pp. 1017–1024.

[30] Lee W.M., Chen J.T., Lee Y.T. Free vibration analysis of circular plates with multiple circular holes using indirect BIEMs. *Journal of Applied Mechanics*, 2011, vol. 78, iss. 1, art. 0110015-1.

[31] Paiva W.P., Sollero P., Albuquerque E.L. Modal analysis of anisotropic plates using the boundary element method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2011, vol. 35, iss. 12, pp. 1248–1255.

[32] Sahli A, Boufeldja S, Kebdani S, Rahmani O. Failure Analysis of Anisotropic Plates by the Boundary Element Method. *Journal of Mechanics*, 2014, vol. 30, no. 6, pp. 561–570.

[33] Sun L., Wei X. A frequency domain formulation of the singular boundary method for dynamic analysis of thin elastic plate. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2019, vol. 98, iss. 1, pp. 77–87.

[34] Wen P.H., Aliabadi M.H., Young A. A boundary element method for dynamic plate bending problems. *International Journal of Solids and Structures*, 2000, vol. 37, iss. 37, pp. 5177–5188.

[35] Igumnov L.A., Markov I.P. A boundary element approach for 3d transient dynamic problems of moderately thick multilayered anisotropic elastic composite plates. *Materials Physics and Mechanics*, 2018, vol. 37, pp. 79–83.

[36] Горшков А.Г., Медведский А.Л., Рабинский Л. *Волны в сплошных средах*. Физматлит, 2004, 472 с.

[37] Венцель Э.С. Джан-Темиров К.Е. Трофимов А.М., Негольша Е.В. *Метод компенсирующих нагрузок в задачах теории тонких пластинок и оболочек*. Харьков, 1992, 92 с.

[38] Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. *Численные методы*. Москва, Наука, 1975, 636 с.

[39] Serdyuk D.O., Fedotenkov G.V. Transient dynamics of an anisotropic plate on an elastic-inertial foundation with local supports. *Acta Mechanica*, 2024, vol. 235, iss. 7, pp. 4743–4761.

Статья поступила в редакцию 16.02.2025

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Сердюк Д.О., Хомченко А.В. Моделирование нестационарной динамики фрагмента нижней панели закрылка пассажирского самолёта. *Математическое моделирование и численные методы*, 2025, № 4, с. 124–147.

Сердюк Дмитрий Олегович – канд. техн. наук, доцент, доцент кафедры «Сопротивление материалов, динамика и прочность машин» Московского авиационного института. e-mail: d.serduk55@gmail.com

Хомченко Антон Васильевич – канд. техн. наук, ведущий инженер отдела динамической прочности ООО «АУРУС-АЭРО».e-mail: khomchenkoanton@yandex.ru

Modeling of transient dynamics of a fragment of a passenger airplane lower flap panel

© D.O. Serdyuk[1], A.V. Khomchenko[2]

[1]MAI, Moscow, 125993, Russian Federation
[2]AURUS-AERO LLC, Moscow, 125315, Russian Federation

In this paper, a new transient normal displacement function for a thin elastic anisotropic plate associated with an elastic-inertial base and with local boundary conditions on an arbitrary contour is constructed by numerical and analytical methods. The Timoshenko hypotheses are adopted as the plate theory. The work is based on the method of fundamental solutions and the method of compensating loads. The fundamental solutions for an unbounded plate are constructed by means of Fourier integral transforms on spatial coordinates and Laplace integral transform on time. The corresponding originals are found using the analytic inversion of the Laplace integral transform. The original of the two-dimensional Fourier integral transform is found using integration methods for rapidly oscillating functions. Then, integral representations for transient plate displacements with local boundary conditions on an arbitrary contour are obtained using the fundamen-

tal solutions and the compensating load method. The time-dependent compensating loads are obtained from the solution of the system of first kind Volterra integral equations. By applying the quadrature method at each time step, the problem of compensating loads is reduced to the solution of a system of linear algebraic equations. As an example of calculation, we consider transient deformation of a fragment of the lower flap panel of a passenger airplane at impact of a piece of aviation pneumatic. For this object of research in the calculation scheme rivets act as local supports. In order to assess the validity of the solution results are compared with the results of the solution in the Simcenter Nastran software package. The finite element model of the plate was performed in Simcenter Femap using four-node layered shell elements "PCOMP" and linear-elastic material model of monolayers "2D ORTHOTROPIC". The solution of the problem of transient plate deformation was obtained with Nastran Multi-Step Nonlinear Kinematic Transient (SOL402) using the integration scheme "Modified Generalized Alpha".

***Keywords**: transient dynamics, Timoshenko plate, fundamental solutions, flap panel, polymer composite material, numerical solution, finite element method*

REFERENCES

[1] Dimitrienko Yu.I., Koryakov M.N., Zakharov A.A., Stroganov A.S. Computational modeling of conjugated gasdynamic and thermomechanical processes in composite structures of high speed aircraft. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2014, no. 3(3), pp. 3-24

[2] Dimitrienko Yu.I., Koryakov M.N., Yurin Yu.V., Zakharov A.A., Sborschikov S.V., Bogdanov I.O. Coupled modeling of high-speed aerothermodynamics and internal heat and mass transfer in composite aerospace structures. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2021, no. 3(31), pp. 42–61.

[3] Dimitrienko Yu.I., Yurin Yu.V., Fedonyuk N.N. Numerical modeling of deformation and strength of sandwich composite structures with defects. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2016, no. 3(11), pp. 3-23.

[4] Dimitrienko Yu.I., Yurin Yu.V. Multiscale modeling of thin multilayer composite plates with solitary defects. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2016, no. 4(12), pp. 47-66.

[5] Dimitrienko Yu.I., Gubareva E.A. Asymptotic theory of multilayer thin elastic plates with layer slip. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2022, no. 2(34), pp. 28–62.

[6] ZHigalko YU.P., Sadykova M.M. Dinamika, tonkoj krugloj plastinki pri nestacionarnom lokal'nom nagruzhenie [Dynamics of a thin round plate under unsteady local loading]. *Issledovaniya po teorii plastin i obolochek* [Dynamics of a thin round plate under unsteady local loading], 1990, no. 20, pp. 184–191.

[7] Morgachev K.S. Nestacionarnaya dinamika kol'cevoj plastiny Timoshenko peremenoj tolshchiny [Unsteady dynamics of a Timoshenko ring plate with varying thickness]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta* [Bulletin of Samara State Technical University], 2007, vol. 15, no. 2, pp. 162–164.

[8] D'yachenko YU.P. *Nestacionarnaya zadacha dinamiki plastin peremennogo secheniya v utochnennoj postanovke: dissertaciya kandidata fiziko-matematicheskih nauk* [Non-stationary problem of the dynamics of plates of variable cross-section in a refined formulation: dissertation of a candidate of physical and mathematical sciences]. Saratov, SSU, 2008.

[9] D'yachenko YU. P., Elenickij E. YA., Petrov D. V. Nestacionarnye zadachi dinamiki plastin i cilindricheskih obolochek vrashcheniya stupenchatogo sech-

eniya [Non-stationary problems of the dynamics of stepped section plates and rotation cylindrical shells]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya: Fiziko-matematicheskie nauki* [Bulletin of Samara State Technical University. Series: Physics and Mathematics], 2011, no. 2, pp. 278–288.

[10] Beskou N.D., Muho E.V. Qian J. Dynamic analysis of an elastic plate on a cross-anisotropic elastic half-space under a rectangular moving load. *Acta Mechanica*, 2020, vol. 231, iss. 4, pp. 4735–4759.

[11] Sibiryakov A.B. Prikladnaya teoriya rascheta kompozicionnyh plastin na dejstvie impul'sa vneshnego davleniya [Applied theory of calculation of composite plates under the action of an external pressure pulse]. *Izvestiya vysshih uchebnyh zavedenij. Mashinostroenie* [News of higher educational institutions. Mechanical Engineering], 2002, no. 7, pp. 11–18.

[12] Sibiryakov A.B. Impul'snoe nagruzhenie tonkostennyh kompozicionnyh elementov konstrukcij [Impulse loading of thin-walled composite elements of structures]. *Mechanics of Solids*, 2003, no. 1, pp. 172-180.

[13] SHevchenko V.P. Vetrov O.S. Dinamika ortotropnoj plastiny pod dej-stviem lokal'nyh vnezapno prilozhennyh nagruzok [Dynamics of an orthotropic plate under the action of local suddenly applied loads]. *Trudy IPMM NAN Ukrainy* [Proceedings of IPMM NAS of Ukraine], 2011, vol. 22, pp. 207–215.

[14] SHevchenko V.P. Vetrov O.S. Dinamika tonkih plastin na uprugom osno-vanii pod dejstviem lokal'nyh nagruzok [Dynamics of thin plates on an elastic base under the action of local loads]. *Trudy IPMM NAN Ukrainy* [Proceedings of IPMM NAS of Ukraine], 2013, vol. 27, pp. 81- 88.

[15] Wahab M.A., Jabbour T., Davies P. Prediction of impact damage in composite sandwich plates. *Materiaux & Techniques*, 2019, vol. 107, no. 2, art. 201.

[16] Nayfeh A.H., Chimenti D.E. Free wave propagation in plates of general anisotropic media. *Journal of applied mechanics-transactions of the ASME*, 1989, vol. 56, no. 4, pp. 881–886.

[17] Daros C.H. The dynamic fundamental solution and BEM formulation for laminated anisotropic Kirchhoff plates. *Engineering analysis with boundary elements*, 2015, vol. 54, no. 2, pp. 19–27.

[18] Reddy J.N. Dynamic (transient) analysis of layered anisotropic composite-material plates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1983, Vol. 19, p. 237–255.

[19] Raghu P., Rajagopal A., Reddy, J.N. Nonlocal transient dynamic analysis of laminated composite plates. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 2020, vol. 27, no. 1, pp. 1–9.

[20] Pervez T. Zabaras N. Transient dynamic and damping analysis of laminated anisotropic plates using a refined plate theory. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1992, vol. 33, pp. 1059-1080.

[21] Chen J., Dawe D.J., Wang S. Nonlinear transient analysis of rectangular composite laminated plates. *Composite Structures*, 2000, vol. 49, iss. 2, pp. 129–139.

[22] Kant T., Ravichandran R.V., Pandya B.N., Mallikarjuna B.N. Finite element transient dynamic analysis of isotropic and fibre reinforced composite plates using a higher-order theory. *Composite Structures*, 1988, vol. 17, iss. 2, pp. 229–255.

[23] Patel B.P., Gupta S.S., Joshi M., Ganapathi M. Transient response analysis of bimodulus anisotropic laminated composite plates. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 2005, vol. 24, no. 8, pp. 795–821.

[24] Burlayenko V.N., Sadowski T. Transient dynamic response of debonded sandwich plates predicted with finite element analysis. *Meccanica*, 2014, vol. 49, pp. 2617–2633.

[25] Fallstrom K. E., Lindblom O. Transient bending wave propagation in anisotropic plates. *Journal of Applied Mechanics*, 1998, vol. 65, no. 4, pp. 930–938.
[26] Fällström K.-E., Lindblom O., Näslund R., Persson L.-E. A study of bending waves in infinite and anisotropic plates. *Applications of Mathematics*, 1997, vol. 42, no. 3, pp. 213–232.
[27] Musa A.E.S., Al-Gahtani H.J. Bending analysis of thin elastic plates with internal flexible column supports using boundary point method. *Arabian Journal for Science and Engineering*, 2023, vol. 48, pp. 13395–13413.
[28] Ai Z.Y., Hu Y.D. A coupled BEM-ALEM approach for analysis of elastic thin plates on multilayered soil with anisotropic permeability. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2015, vol. 53, pp. 40–45.
[29] Dong C.Y., Lo S.H., Cheung Y.K., Lee K.Y. Anisotropic thin plate bending problems by Trefftz boundary collocation method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2004, vol. 28, iss. 9, pp. 1017–1024.
[30] Lee W.M., Chen J.T., Lee Y.T. Free vibration analysis of circular plates with multiple circular holes using indirect BIEMs. *Journal of Applied Mechanics*, 2011, vol. 78, iss. 1, art. 0110015-1.
[31] Paiva W.P., Sollero P., Albuquerque E.L. Modal analysis of anisotropic plates using the boundary element method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2011, vol. 35, iss. 12, pp. 1248–1255.
[32] Sahli A, Boufeldja S, Kebdani S, Rahmani O. Failure Analysis of Anisotropic Plates by the Boundary Element Method. *Journal of Mechanics*, 2014, vol. 30, no. 6, pp. 561–570.
[33] Sun L., Wei X. A frequency domain formulation of the singular boundary method for dynamic analysis of thin elastic plate. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2019, vol. 98, iss. 1, pp. 77–87.
[34] Wen P.H., Aliabadi M.H., Young A. A boundary element method for dynamic plate bending problems. *International Journal of Solids and Structures*, 2000, vol. 37, iss. 37, pp. 5177–5188.
[35] Igumnov L.A., Markov I.P. A boundary element approach for 3d transient dynamic problems of moderately thick multilayered anisotropic elastic composite plates. *Materials Physics and Mechanics*, 2018, vol. 37, pp. 79–83.
[36] Gorshkov A.G., Medvedskij A.L., Rabinskij L. *Volny v sploshnyh sredah* [Waves in continuous media]. Moscow, Fizmatlit, 2004, 472 p.
[37] Vencel' E.S. Dzhan-Temirov K.E. Trofimov A.M., Negol'sha E.V. Metod kompensiruyushchih nagruzok v zadachah teorii tonkih plastinok i obolochek [Method of compensating loads in problems of the theory of thin plates and shells]. Kharkov, 1992, 92 p.
[38] Bahvalov N.S., ZHidkov N.P., Kobel'kov G.M. *CHislennye metody* [Numerical methods]. Moscow, Nauka Publ., 1975, 636 p.
[39] Serdyuk D.O., Fedotenkov G.V. Transient dynamics of an anisotropic plate on an elastic-inertial foundation with local supports. *Acta Mechanica*, 2024, vol. 235, iss. 7, pp. 4743–4761.

Serdyuk D. O., Cand. Sc. (Eng.), Associate Professor, Department of Strength of Materials, Dynamics and Strength of Machines, Moscow Aviation Institute. e-mail: d.serduk55@gmail.com

Khomchenko A.V., Cand. Sc. (Eng.), Leading Engineer of the dynamic strength department of AURUS-AERO LLC. e-mail: khomchenkoanton@yandex.ru