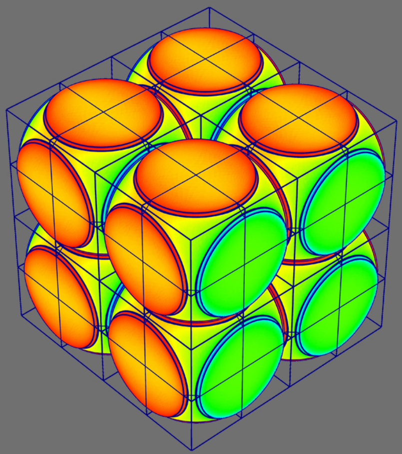
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

УДК 004.052 DOI: 10.18698/2309-3684-2025-4-108123

Моделирование риска сложной энергетической системы

© А.В. Карманов, К.П. Орлова, В.Е. Серкин

РГУ нефти и газа (НИУ) имени И.М. Губкина, город Москва,
Ленинский проспект, д.65, 119991, Россия

В статье приводятся некоторые особенности функционирования сложной энергетической системы (далее системы), которая работает на основе долгосрочных договорных обязательств и имеет конечное множество состояний, являющееся одним эргодическим классом. Одной из таких особенностей является возникновение в процессе эксплуатации системы различных «негативных» событий – инцидентов, которые образуют во времени случайный точечный поток. Поток инцидентов оценивается техногенным риском, где под этим риском понимается средний ущерб в денежном выражении в единицу времени, связанный с ликвидацией инцидентов и их последствий. Источниками инцидентов являются 1) случайный процесс отказов и восстановлений элементов системы и её подсистем, а также 2) грубые нарушения правил эксплуатации системы. При возникновении инцидента, как правило, меняется рабочий режим эксплуатации системы, который в свою очередь приводит к изменению вероятностей возникновения последующих инцидентов. При этом указанное изменение вероятностей возникновения инцидентов часто не поддаётся аналитическому описанию. Однако во многих случаях можно указать область, которой принадлежат эти изменения. Для описания техногенного риска используются две следующие математические модели: 1. Первая модель представляет собой регулярный однородный полумарковский процесс, который позволяет рассчитать риск в случае, когда изменение рабочего режима системы не влечёт за собой изменения вероятности возникновения последующих инцидентов. В этой модели риск является частным видом функционала, являющегося средним значением накопленного дохода в единицу времени. При длительной эксплуатации системы этот риск становится стационарным риском. Указывается формула и процедура расчёта стационарного риска. Приводится пример, иллюстрирующий расчёт этого риска. 2. Вторая модель представляет собой полумарковский процесс с неполной информацией, который является обобщением первой модели и применяется в расчётах риска в следующих условиях: 1) при возникновении инцидента происходит изменение рабочего режима системы, которое меняет вероятности возникновения последующих инцидентов; 2) неизвестно аналитическое описание изменений этих вероятностей, а известны лишь некоторые области, которым они принадлежат. В этой модели неполная информация представляет собой указанные области, что влечёт за собой интервальную оценку стационарного риска. При этом структура неполной информации позволяет сформировать две оптимизационные задачи для расчёта нижней и верхней границ интервальной оценки этого риска. Указывается метод и итерационные процедуры решения этих оптимизационных задач. Приводится пример, иллюстрирующий применение итерационных процедур для расчёта интервальной оценки стационарного риска.

Ключевые слова: *сложная энергетическая система, полумарковский процесс с доходом, стационарный риск, оценка стационарного риска, конечный полумарковский процесс с неполной информацией и доходом, накопленный доход, интервальная оценка стационарного риска*

Введение. Сложная энергетическая система (СЭС) представляет собой техническую систему, *основной функцией* которой является бесперебойная и надёжная поставка энергоносителей потребителям в соответствии с долговременными договорными обязательствами. Эти системы составляют основу динамично изменяющегося и развивающегося энергетического сектора страны.

СЭС является опасным производственным объектом, обладающей одним следующим «неприятным» свойством: при её функционировании могут случайным образом возникать различные «негативные» события – инциденты. Эти инциденты в своём развитии могут привести к различным нежелательным последствиям - авариям и нарушениям экологических норм. Инциденты, а также их возможные последствия оцениваются риском, как правило, на отчётном годовом интервале времени. При этом инциденты образуют во времени случайный точечный поток событий. Под риском понимается средний ущерб в стоимостном выражении, возникающий при ликвидации этих «негативных» событий. По сути, риск представляет собой объективно существующие, но весьма нежелательные затраты организации, эксплуатирующей СЭС. Примерами таких СЭС могут служить магистральные нефте- и газопроводы, обслуживаемые автоматизированными системами управления технологическими процессами (АСУТП) перекачки соответствующего огнеопасного продукта.

В настоящее время представляет практический интерес разработка численного метода расчёта риска, учитывающего основные особенности его формирования, а также разработка соответствующего программного обеспечения, которое может являться составляющей частью подсистемы безопасности, входящей в состав АСУТП СЭС.

Источниками инцидентов (и связанных с ними риском) являются как случайный процесс отказов и восстановлений элементов и подсистем СЭС, так и грубые нарушения правил эксплуатации этой системы. Если произошел инцидент, то, как правило, для поддержания основной функции СЭС производится смена режима её эксплуатации средствами АСУТП. Смена режима может повлечь за собой изменение вероятности возникновения последующих инцидентов, которое часто не имеет аналитического описания. В настоящей работе при расчёте риска СЭС предлагаются две математические модели:

Первая модель представляет собой конечный однородный полумарковский процесс с доходом (КОПП) $\zeta(t)$. Применение первой модели корректно в случае, когда смена рабочего режима СЭС не изменяет вероятностей возникновения последующих инцидентов.

2. Вторая модель представляет собой однородный полумарковский процесс с неполной информацией (КОППН) $\xi(t)$, являющийся обобщением (КОПП) $\zeta(t)$. Это обобщение состоит в следующем: матрица P переходных вероятностей «вложенной» цепи Маркова

процесса $\zeta(t)$ определяется с точностью до некоторого множества D, т.е. $P \in D$. Множество D, являющееся характеристикой неполной информации процесса $\xi(t)$. Вид множества D будет сформирован после соответствующего математического описания риска. Наличие множества D порождает интервальную оценку I для стационарного риска r в единицу времени, т.е.

$$I = [r^{*}, r^{**}], \tag{1}$$

где

$$r^{\bullet} = min\{r(P) \mid P \in D\}, \;\; r^{\bullet\bullet} = max\{r(P) \mid P \in D\}. \tag{2}$$

Как будет показано, применение этой модели корректно в случае, когда изменение рабочего режима СЭС влечёт за собой изменения вероятностей последующих инцидентов и эти изменения содержатся в множестве D.

В множестве J состояний СЭС, являющимся одним эргодическим классом, можно выделить подмножество J_1, именуемое множеством инцидентов. При этом риск, возникающий при эксплуатации СЭС, должен учитывать в каждом состоянии $j \in J_1$ следующие *факторы*:

1) величину и вид денежных затрат $d_j(\tau)$, который соответствует интервалу времени $[0, \tau]$, проведённому в состоянии $j \in J_1$,

2) состояние $j \in J$, в котором окажется СЭС в результате купирования инцидента или его последствий.

В настоящее время при расчёте риска в сложных технических системах используются следующие математические модели: 1) различные виды конечных однородных полумарковских процессов; 2) управляемые конечные однородные полумарковские процессы с различными видами множеств управлений; 3) марковские процессы и цепи. Эти модели приводятся в работах [1-14].

В первом разделе работы в качестве математической модели СЭС приводится определение КОПП $\zeta(t)$ с необходимыми характеристиками. Приводится формула для стационарного риска в единицу времени и указывается процедура его расчёта. Также приводится пример расчёта этого риска.

Во втором разделе даётся определение КОППН $\xi(t)$, который является обобщением первой модели. При этом в процессе $\xi(t)$ множество D является характеристикой неполную информацию.

Формируются оптимизационные задачи, представленные выражением (2), и указывается численный метод расчёта как нижней r^{*}, так и верхней r^{**} границ интервала I, определённого выражением (1). Приводится пример расчёта интервала I.

Определение первой модели расчёта риска СЭС. Первой моделью СЭС является КОПП $\zeta(t)$, для определения которого введём следующие множества:

1. $J=\{1,...,n\}$ — конечное множество состояний, являющееся одним эргодическим классом, где $n \in \{2,3,...\}$.

2. Множество состояний J разбивается на два следующих непустых подмножества:

2.1. Подмножество $J_1=\{2,...,n\}$, где J_1 — множество состояний, идентифицируемых как инциденты. При этом каждое состояние $i \in J_1$ представляет собой конкретный вид инцидента.

2.2. Первое состояния является одноточечным множеством $J \setminus J_1$, в котором все элементы СЭС находятся в работоспособном состоянии.

Определение 1. КОПП является случайным процессом [12,13,14,15] $\zeta(t,P)$, имеющим ступенчатые траектории со «скачками» в моменты времени $0<\tau_1<\tau_2<\tau_3<...$. Значения КОПП $\zeta(\tau_k,P)$ в моменты «скачков» образуют «вложенную» однородную Марковскую цепь с матрицей $P=\{p_{i.j}\}$ переходных вероятностей, образующей *один эргодический класс состояний*, где

$$p_{i,j}=\mathrm{P}\{\zeta(\tau_k,P)=j|\zeta(\tau_{k-1},P)=i\},\ i\in J,\ j\in J,\ j\neq i, \tag{3}$$

где $\mathrm{P}\{.\}$ — вероятность события $\{.\}$, $k=1,2,...$; при этом начальным распределением для «вложенной» цепи $\zeta(\tau_k,P)$ является вектор-строка $p(0)=[p_1(0),...,p_n(0)]$.

Распределение времени $\theta_k=\tau_k-\tau_{k-1}$ между соседними «скачками» процесса $\zeta(t,P)$ задаётся множеством $\{Q_{i,j}(x)|i\in J, j\in J, j\neq i\}$ функций следующего вида:

$$Q_{i,j}(x)=\mathrm{P}\{(\theta_k<x),\zeta(\tau_k,P)=j \mid \zeta(\tau_{k-1},P)=i\}=p_{i,j}\cdot F_{i,j}(x), \tag{4}$$

где $k=1,2,...$, $F_{i,j}(x)=\mathrm{P}\{T_{i,j}<x\}$ — функция распределения случайной величины $T_{i,j}$, $T_{i,j}$ — случайное время, проведённое процессом $\zeta(t)$ в состоянии i при условии, что осуществился переход из состояния i в состояние j, $j\neq i$.

Требование ($j\neq i$) обосновывается тем обстоятельством, что при $j=i$ режим эксплуатации СЭС не меняется.

Такой КОПП $\zeta(t,P)$ называется в работе [14] *эргодическим процессом.* Далее будем полагать, что функция $F_{i,j}(t)$ имеет плотность распределения $f_{i,j}(t)$, где $i=1,...,n,\ j=1,...,n,\ j\neq i$.

Для целей моделирования КОПП $\zeta(t,P)$ укажем алгоритм построения каждой траектории этого процесса. Алгоритм 1 построения траектории представляет собой следующую последовательность действий:

1) в момент времени $\tau_0 = 0$ в соответствии с вектором начального распределения $p(0)$ разыгрывается начальное состояние КОПП и пусть $\zeta(0,P) = j(0)$;

2) в соответствии со стохастическим вектором

$$p(j_0) = (p_{j(0),1}, \ldots, p_{j(0),n})$$

переходных вероятностей «вложенной» цепи Маркова разыгрывается реализация следующего состояния КОПП $j(1)$, т.е.

$$\zeta(\tau_1, P) = j(1);$$

3) в соответствии с функцией распределения $F_{j(0),j(1)}(t)$ разыгрывается реализация $T_{j(0),j(1)}$ времени, проведённого в состоянии $j(0)$ при условии, что переход уже произошел в состоянии $j(1) \in J$, $j(1) \neq j(0)$;

4) далее действия пунктов 1)-3) последовательно по $k = 2,3,\ldots$ повторяются для «скачков»

$$\zeta(\tau_k, P) = j(k)$$

и реализаций $T_{j(k-1),j(k)}$. Траектория КОПП $\zeta(t,P)$ представлена на рис. 1.

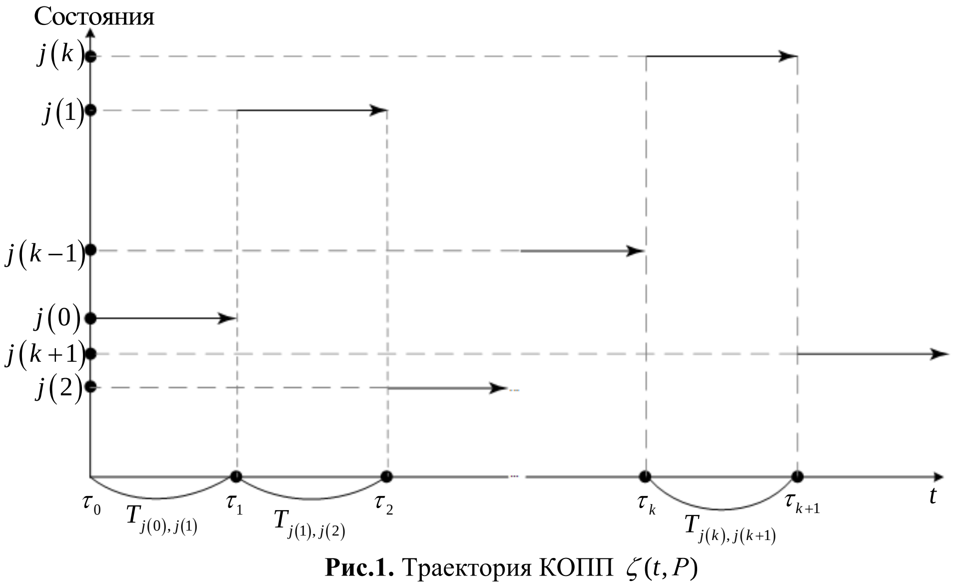


Рис.1. Траектория КОПП $\zeta(t,P)$

Замечание 1. *Строки матрицы P определяют каждый момент времени τ_k, где $k=1,2,...$, в котором происходит «скачок» процесса $\zeta(t,P)$. При этом в моменты времени τ_k происходят изменения рабочего режима СЭС в результате возникновения перехода из некоторого состояния $i \in J$ в состояние $j \in J$, $j \neq i$.*

В результате действия этого алгоритма 1 получаем траекторию μ КОПП $\zeta(t,P)$ на интервале времени $[0,\infty)$ следующего вида:

$$\mu = [(j(0), j(1), T_{j(0),j(1)}),...,(j(k), j(k+1), T_{j(k),j(k+1)}),...]. \quad (5)$$

Траектория $\mu(\Theta)$ на интервале времени $[0,\Theta]$ процесса $\zeta(t,P)$ выглядит следующим образом:

$$\begin{gathered}\mu(\Theta) = [(j(0), j(1), T_{j(0)\,j(1)}),...,(j(k-1), j(k), T_{j(k-1),j(k)}),\\ (j(k), j(k+1)T_{j(k),j(k+1)})]\end{gathered} \quad (6)$$

где

$$\sum_{\nu=1}^{k} T_{j(\nu-1),j(\nu)} \leq \Theta < \sum_{\nu=1}^{k+1} T_{j(\nu-1),j(\nu)}.$$

Этой траектории поставим в соответствие случайную величину дохода $d[\mu(\Theta)]$, именуемую в работах [13,14] «накопленным доходом», следующим образом:

$$d[\mu(\Theta)] = \sum_{\nu=1}^{k} d_{j(\nu-1),j(\nu)}(T_{j(\nu-1),j(\nu)}) + d_{j(k),j(k+1)}(\Theta - \sum_{\nu=1}^{k} T_{j(k),j(k+1)}). \quad (7)$$

Для целей вычисления техногенного риска в СЭС, учётом указанных во введении факторов, влияющих на этот риск, слагаемое «накопленного дохода» $d_{j(\nu-1),j(\nu)}(T_{j(\nu-1),j(\nu)})$ можно, например, определит следующим образом:

$$d_{j(\nu-1),j(\nu)}(T_{j(\nu),j(\nu)}) = c_{j(\nu-1),j(\nu)} + \sigma_{j(\nu-1)}(T_{j(\nu-1),j(\nu)}), \quad (8)$$

где $c_{j(\nu-1),j(\nu)}$ — доход за переход из состояния $j(\nu-1)$ в состояние $j(\nu)$ и

$$c_{j(\nu-1),j(\nu)} > 0,$$

$\sigma_{j(\nu-1)}(T_{j(\nu-1),j(\nu)})$ — доход за время $T_{j(\nu-1),j(\nu)}$, проведённое в состоянии $j(\nu-1)$ до перехода в состояние $j(\nu)$.

Величину $\sigma_{j(k-1)}(T_{j(k-1),j(k)})$ определим так

$$\sigma_{j(\nu-1),j(\nu)}(T_{j(\nu-1),j(\nu)}) = b_{j(\nu-1)} \cdot (T_{j(\nu-1),j(\nu)})^{\gamma[j(\nu-1)]}, \tag{9}$$

где

$$b_{j(\nu-1)} > 0, \ \gamma[j(\nu-1)] \in [1,0).$$

Математическое ожидание «накопленного дохода» $R(\Theta, P)$ в единицу времени на интервале $[0,\Theta]$ имеет вид:

$$\Theta^{-1}R(\Theta,P) = \Theta^{-1} \cdot M[d(\mu(\Theta))]. \tag{10}$$

В работе [14] доказывается, что выражение для стационарного риска на процессе $\zeta(t,P)$ имеет вид:

$$r(P) = \lim_{\Theta\to\infty} \Theta^{-1}R(\Theta,P) = \frac{\pi(P)\circ q(P)}{\pi(P)\circ\sigma(P)}, \tag{11}$$

где $\pi(P) = (\pi_1(p_i),...,\pi_n(p_n))$ — вектор предельных вероятностей [17] эргодического процесса $\zeta(t,P)$, p_i — i-ая строка матрицы P, $i = 1,...,n$, $\circ$ — символ скалярного произведения, $q(P) = (q_1(p_1),...,q_n(p_n))$,

$$q_1(p_1) = \sum_{j=2}^{n} p_{1,j}c_{1,j}, \tag{12}$$

$$q_i(p_i) = \sum_{j=2,\, j\neq i}^{n} p_{i,j} \cdot [c_{i,j} + b_i \cdot \int_0^{\infty} t^{\gamma(i)} f_{i,j}(x)dx], \ \ i = 2,...,n, \tag{13}$$

$$\sigma(P) = (\sigma_1(p_1),...,\sigma_n(p_n)), \sigma_i(p_i) = \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} p_{i,j} \cdot \int_0^{\infty} tf_{i,j}(t)dt. \tag{14}$$

Предельные вероятности $\pi_i(P)$ определяются решением следующей системы линейных уравнений:

$$\pi_i(p_i) = \sum_{k=1}^{n} \pi_k p_{k,i}, \ \ i = 1,...,n, \tag{15}$$

в которой одно любое уравнение заменяется на равенство $\sum_{k=1}^{n} \pi_i = 1$.

Далее будем считать, что $r(P) < \infty$, т.е. $r(P)$ является конечной величиной. При этом КОПП $\zeta(t,P)$ с таким стационарным доходом в единицу времени будем называть *регулярным* процессом.

Определение второй модели расчёта риска СЭС. Теперь сформируем полумарковский процесс с неполной информацией

(КОППН). КОППН строится на основе процесса КОПП $\zeta(t,P)$ для случая, когда смена рабочего режима СЭС приводит к изменению вероятностей возникновения последующих инцидентов. Поскольку из *замечания 1* следует, что смена режимов СЭС определяется строками матрицы P, то указывается множество D_i, которым принадлежат строки матрицы P, где $i=1,...,n.$. При этом D_i является характеристикой неполной информации [6] в состоянии i КОППН.

Для определения КОППН введём следующие множества:

1. Каждому состоянию $i \in J$ поставим в соответствие множество D_i. Множество D_i имеет вид:

$$D_i = \{p_i = (p_{i,1},..., p_{i,n}) \mid 0 < a_{i.j}^{(1)} \le p_{i,j} \le a_{i,j}^{(2)} < 1, \sum_{j=1, j\neq i}^{n} p_{i,j} = 1\}, \quad (16)$$

где p_i — i-ая строка «вложенной» матрицы Маркова P эргодического КОПП $\zeta(t,P)$. Множество D_i является характеристикой неполной информации стохастического вектора $p_i = (p_{i,1},..., p_{i,n})$.

2. $D = D_1 \times ... \times D_n$ — прямое произведения множеств D_i, $i=1,...,n$. Любой элемент $P \in D$ определяет матрицу $P=(p_1,..., p_n)^{Tr}$, где Tr — символ операции транспозиции, введённый в работе [16].

Замечание 2*. Структура множества* D_i, *определённого выражением* (16)*, указывает на то, что это множество является многомерным ограниченным замкнутым линейным многогранником — симплексом, имеющим конечное число вершин. При этом, если множесво вершин этого симплекса представить в виде множества* $\Psi_i = \{\tilde{p}_i^{(1)},..., \tilde{p}_i^{(m)}\}$*, то множество* D_i *можно представить в виде* [18]*:*

$$D_i = Co\Psi_i, aD = Co\Psi_1 \times ... \times Co\Psi_n, \quad (17)$$

где $Co\Psi_i$ *— выпуклая оболочка множества* $\Psi_i, i \in J$.

Определение КОППН. КОППН Z является множеством $\{\zeta(t,P) \mid P \in D\}$, где $\zeta(t,P)$ при фиксированной матрице P является конечным однородным полумарковским процессом (КОПП).

КОПП $\zeta(t,P)$ задаётся выражениями (3) и (4), а стационарный доход $r(P)$ в единицу времени представлен выражением (11) для каждого регулярного процесса $\zeta(t,P) \in \mathrm{Z}$.

Теперь сформируем две оптимизационные задачи, определённые в выражении (2):

$$r^{\bullet} = min\{r(P) \mid P \in D\}, \quad (18)$$

$$r^{\bullet\bullet} = max\{r(P) \mid P \in D\}, \tag{19}$$

где

$$r(P) = \frac{\pi(P) \circ q(P)}{\pi(P) \circ \sigma(P)}. \tag{20}$$

Решение этих этих оптимизационных задач позволяет определить интервал $I = [r^*, r^{**}]$, для которого справедливо выражение:

$$r(P) \in I, \quad \forall P \in D. \tag{20}$$

Численный метод определния величин $r^\bullet$ и $r^{\bullet\bullet}$.

Изложим решение сформированных оптимизационных задач, представленных выражениями (18) и (19), индикаторным методом [19]. Этот метод применительно к решению задачи (18) представляет собой следующую пошаговую итерационную процедуру 1:

1. На k-ом шаге вычисляется величина и формируется функционал

$$\phi[P, r(P^{(k)})] = \pi(P) \cdot [q(P) - r(P^{(k)})\sigma(P)],$$

где $k = 1, 2, ...,$ $P^{(1)}$ — любой элемент из множества D, для которого вычисляется выражение $r(P^{(1)})$.

2. Решается следующая оптимизационная задача:

$$\begin{aligned} \phi_\bullet[r(P^{(k)})] = \phi[P_\bullet, r(P^{(k)})] = min\{\phi[P, r(P^{(k)})] \mid P \in D\} = \\ = \min_{p_1 \in D_1} ... \min_{p_n \in D_n} \phi[(p_1, ..., p_n), r(P^{(k)})], \end{aligned} \tag{21}$$

где p_i — i-ая строка матрицы P, $i = 1, ..., n$.

2.1. Если выполняется соотношение

$$\phi_\bullet[r(P^{(k)})] < 0,$$

то нужно положить $k = k + 1$ и сделать переход к пункту 1 итерационной процедуры, где $P^{(k+1)} = P_\bullet$

2.2. Если выполняется равенство

$$\phi_\bullet[r(P^{(k)})] = 0,$$

то процедура останавливается и

$$r^\bullet = r(P_\bullet).$$

Оптимизационная задача (19) решается итерационной процедурой 2, аналогичной процедуре 1, если в пункте 2 символ «min» заменить на символ «max», а неравенство «<» в пункте 2.1 заменить на – - «>». При этом выполняется следующее равенство:

$$r^{\bullet\bullet} = r(P_{\bullet\bullet}).$$

Замечание 3. *В выражении* (21) *каждый минимум вычисляется по* $p_i \in D_i$*, где* $i = 1,...,n$*, а каждое множество* D_i *представляет собой симплекс с конечным числом вершин. Согласно работе* [6] *этот минимум является задачей линейного программирования, в которой минимизируется некоторая линейная форма* $\varphi_i(p_i) = a_i \circ p_i$ *на симплексе* D_i*, где* $a_i = (a_{i,1},...,a_{i,n})$*. Как показано в работах* [16, 20]*, решение этой задачи достигается в одной из вершин симплекса* D_i*. Аналогичное утверждение справедливо и для итерационной процедуры 2.*

Примеры расчёта стационарного риска. Приведённые примеры расчёта стационарного риска в единицу времени для первой и второй моделей иллюстрируют применение вышеизложенных процедур для случая, когда эргодический класс матрицы P имеет всего шесть состояний.

Исходные данные для первой и второй моделей представлены следующими матрицами шестого порядка и вектором $b = (b_1,...,b_6)$:

$$\int_0^\infty t \cdot f_{i,j}(t)dt = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 5 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 8 & 2 \end{pmatrix}, \; c = \{c_{i,j}\} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \end{pmatrix},$$

$$b = [1, 2, 3, 4, 5, 6].$$

1. Для первой модели рассчитаем стационарный риск в единицу времени. Пусть матрица P имеет вид:

$$P = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.2 & 0.1 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.1 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0 & 0.4 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.1 & 0.4 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.5 \\ 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0.7 & 0.2 \end{pmatrix}.$$

Тогда схема расчёта риска, следующая:

1.1. Вектор предельных вероятностей КОПП $\zeta(t,P)$, рассчитанный по системе линейных уравнений (15), есть

$$\pi = \left[0.104,\ 0.045,\ 0.150,\ 0.149,\ 0.317,\ 0.235\right].$$

1.2. Векторы q и σ имеют вид:

$$q = \left[\ 3.8,\ 6.6,\ 14.8,\ 20.4,\ 26.5,\ 43.6\right]^T,$$

$$\sigma = \left[1.8,\ 1.8,\ 4.6,\ 4.1,\ 4.7,\ 6.1\right]^T.$$

1.3. Стационарный риск в единицу времени:

$$r = \frac{\pi \circ q}{\pi \circ \sigma} = 5.477\,.$$

2. Для второй первой модели рассчитаем интервал $I = [r^*, r^{**}]$ стационарного риска в единицу времени.

2.1. Множество управлений D имеет вид:

$$D = \begin{array}{llllll}
([0.1;0.4], & [0.1;0.2], & [0.2;0.4], & [0.0;0.1], & [0.2;0.3], & [0.2;0.3])\times \\
\times([0.1;0.5], & [0.1;0.4], & [0.2;0.3], & [0.1;0.2], & [0.1;0.4], & [0.2;0.5])\times \\
\times([0.1;0.5], & 0, & [0.4;0.8], & [0.2;0.5], & 0\ , & 0\ )\times \\
\times([0.1;0.2], & [0;0.1], & [0.2;0.8], & [0.2;0.8], & 0\ , & 0\ )\times \\
\times([0.1;0.2], & 0, & 0, & 0, & [0.2;0.8], & [0.4;0.8])\times \\
\times([0.1;0.4], & 0, & 0, & 0, & [0.4;1], & [0.2;1])
\end{array}.$$

2.2. Рассчитаем нижнюю границу интервала I по итерационной процедуре 1.

$$P_\bullet = \begin{pmatrix}
0.1 & 0.1 & 0.4 & 0 & 0.2 & 0.2 \\
0.3 & 0.1 & 0.2 & 0.1 & 0.1 & 0.2 \\
0.1 & 0 & 0.7 & 0.2 & 0 & 0 \\
0.2 & 0 & 0.6 & 0.2 & 0 & 0 \\
0.2 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.4 \\
0.4 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.2
\end{pmatrix},\ r^\bullet = r(P_\bullet) = 4.1975\,.$$

2.3. Рассчитаем верхнюю границу интервала I по итерационной процедуре 2.

$$P_{\bullet\bullet} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0 & 0.3 & 0.3 \\ 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.1 & 0.1 & 0.4 \\ 0.4 & 0 & 0.4 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0.6 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.4 \\ 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.5 \end{pmatrix}, \; r^{\bullet\bullet}(P_{\bullet\bullet}) = 6.0315 .$$

Таким образом $I = [r^*, r^{**}]$, т.е. справедливо выражение:

$$\left[4.1975 \le r(P) \le 6.0315, \quad \forall P \in D\right].$$

Выводы и рекомендации. В статье представлены две математические модели расчёта стационарного техногенного риска в единицу времени при функционировании сложных энергетических систем (СЭС). Обе модели основаны на полумарковских процессах, но различаются по степени детализации учитываемых факторов.

1. Первая модель –— это конечный однородный полумарковский процесс (КОПП), который предполагает, что изменение рабочих режимов СЭС не влияет на вероятность появления последующих инцидентов. Применение этой модель корректно в случае, когда указанным влиянием можно пренебречь.

2. Вторая модель — полумарковский процесс с неполной информацией (КОППН). Она особым образом учитывает изменение вероятности появления последующих инцидентов при смене рабочих режимов СЭС. При этом возникает интервальная оценка риска. Эта модель более адекватно описывает функционирование реальных СЭС в рассматриваемом случае.

Рекомендации:

1. Для предварительной оценки риска рекомендуется использовать первую модель из-за её простоты и наглядности.

2. Для более адекватной оценки риска целесообразно применять вторую модель. При этом можно ориентироваться на левую границу r^{**} риска для его пессимистической оценки.

3. Предложенные модели целесообразно использовать в подсистеме АСУТП, связанной с управлением промышленной безопасностью СЭС. Это позволит более обоснованно планировать финансовые ресурсы на ликвидацию инцидентов и их последствий для организаций, эксплуатирующих СЭС.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Сильвестров Д.С. *Полумарковский процесс с дискретным множеством состояний.* Москва, Советское радио, 1980, 272 с.

[2] Королюк В.С., Турбин А.Р. *Процессы Марковского восстановления в задачах надёжности.* Киев, Наукова Думка, 1982, 236 с.

[3] Зайцева О.Б. *Задача управления безопасностью функционирования систем. Диссертация на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук*. Москва, ВЦ РАН, 2011, 122 с.

[4] Катулов А.Н., Северцев Н.А., Соломаха Г.М. *Исследование операций и обеспечение безопасности: прикладные задачи*. Москва, Физматлит, 2005, 238 с.

[5] Карманов А.В. *Исследование управляемых конечных Марковских цепей с неполной информацией*. Москва, Физматлит, 2002, 173 с.

[6] Brihaye T., Chatterjee K., Mohr S., Weininger M. Risk-aware Markov Decision Processes Using Cumulative Prospect Theory. [Электронный ресурс]. URL: https://arxiv.org/abs/2505.09514 (дата обращения май 2025)

[7] Долгополова А.Ф. Моделирование стратегий управления в социально-экономических системах с использованием марковских процессов. *Вестник АПК Ставрополья*, 2011, т. 1, № 1, с. 67-69.

[8] Su H., Zio E., Zhang J., Li Zh., et. al. A systematic method for the analysis of energy supply reliability in complex Integrated Energy Systems considering uncertainties of renewable energies, demands and operations. *Journal of Cleaner Production*, 2020, vol. 267, art. 122117. DOI: 10.1016/j.jclepro.2020.122117.

[9] Haimes Y. Y. Risk Modeling of Interdependent Complex Systems of Systems: Theory and Practice. *Risk analysis*, 2018, vol. 38, iss. 1, pp. 84-98. DOI: https://doi.org/10.1111/risa.12804.

[10] Северцев Н.А., Бецков А.В., Дарьина А.Н. Разработка вероятностных критериев безопасного управления объектами специальной техники. *Надежность и качество сложных систем. Пензенский государственный университет*, 2019, № 2(26), с. 3-8.

[11] Виноградов И.М. *Математическая энциклопедия. Т.5. Слу – Я.* Москва, Советская энциклопедия, 1984, 1248 стб.

[12] Кокс Д., Смит В. *Теория восстановления*. Москва, Советское радио, 1967, 299 с.

[13] Майн Х., Осаки С. *Марковские процессы принятия решений*. Москва, Наука, 1977, 175 с.

[14] Каштанов В.А., Кондрашова Е.В. *Исследование функционала для заданной системы массового обслуживания*. Москва, МИЭМ, 2010, 20 с.

[15] Карманов В.Г. *Математическое программирование*. Москва, Физматлит, 2004, 264 с.

[16] Ширяев А.Н. *Вероятность*. В 2-х книгах. Москва, Изд-во Московского центра непрерывного математического образования, 2007, 967 с.

[17] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. *Элементы теории функций и функционального анализа*. Москва, Наука, 1976, 543 с.

[18] Волков И.К., Загоруйко Е.А. Исследование операций: учебник для студентов высших технических учебных заведений. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000, 435 с.

Статья поступила в редакцию 20.07.2025

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Карманов А.В., Орлова К.П., Серкин В.Е. Моделирование риска сложной энергетической системы. *Математическое моделирование и численные методы*, 2025, № 4, с. 108–123.

Карманов Анатолий Вячеславович – д-р физ.-мат. наук, профессор, кафедра автоматизации технологических процессов РГУ нефти и газа (НИУ) имени И.М. Губкина. e-mail: ABKar2007@yandex.ru

Орлова Ксения Петровна – канд. техн. наук, доцент, кафедра автоматизации технологических процессов РГУ нефти и газа (НИУ) имени И.М. Губкина. e-mail: sherksu@mail.ru

Серкин Владислав Евгеньевич – аспирант, кафедра автоматизации технологических процессов РГУ нефти и газа (НИУ) имени И.М. Губкина. e-mail: serkin.ve@gmail.com

Modeling the risk of a complex energy system

© A.V. Karmanov, K.P. Orlova, V.E. Serkin

National University of Oil and Gas « Gubkin University»,
65 Leninsky Prospekt, Moscow, 119991, Russia

The article discusses some features of the functioning of a complex energy system (hereinafter referred to as the system), which operates based on long-term contractual obligations and has a finite set of states forming a single ergodic class. One such feature is the occurrence of various "negative" events—incidents—during system operation, which form a random point process over time. The flow of incidents is assessed in terms of technological risk, where this risk is understood as the average monetary damage per unit of time associated with incident mitigation and their consequences. The sources of incidents include: 1) the random process of failures and recoveries of the system's elements and its subsystems, and 2) gross violations of system operation rules. When an incident occurs, the system's operational mode typically changes, which in turn alters the probabilities of subsequent incidents. However, these changes in incident probabilities often cannot be described analytically. In many cases, though, it is possible to specify a range to which these changes belong.Two mathematical models are used to describe technological risk:The first model is a regular homogeneous semi-Markov process, which allows for risk calculation when changes in the system's operational mode do not affect the probabilities of subsequent incidents. In this model, risk is a specific type of functional representing the average accumulated income per unit of time. Over prolonged system operation, this risk becomes stationary. A formula and calculation procedure for stationary risk are provided, along with an illustrative example.The second model is a semi-Markov process with incomplete information, generalizing the first model and used for risk assessment under the following conditions: 1) incident occurrence alters the system's operational mode, changing the probabilities of subsequent incidents; 2) an analytical description of these probability changes is unknown, but certain ranges to which they belong are known. In this model, incomplete information consists of these ranges, leading to an interval estimate of stationary risk. The structure of incomplete information allows for the formulation of two optimization problems to calculate the lower and upper bounds of this interval estimate. A method and iterative procedures for solving these optimization problems are described, along with an example demonstrating their application for calculating the interval estimate of stationary risk.

***Keywords**: complex energy system, semi-Markov process with income, stationary risk, stationary risk estimation, finite semi-Markov process with incomplete information and income, accumulated income, interval estimation of stationary risk*

REFERENCES

[1] Sil'vestrov D.S. *Polumarkovskij process s diskretnym mnozhestvom sostoyanij* [Semi-Markov process with a discrete set of states]. Moscow, Soviet Radio Publishing House, 1980, 272 p.

[2] Korolyuk V.S., Turbin A.R. *Processy Markovskogo vosstanovleniya v zadachah nadyozhnosti* [Markov recovery processes in reliability problems].Kyiv, Naukova Dumka, 1982, 236 p.

[3] Zajceva O.B. *Zadacha upravleniya bezopasnost'yu funkcionirovaniya si-stem. Dissertaciya na soiskanie uchyonoj stepeni kandidata fiziko-matematicheskih nauk* [The task of managing the safety of systems operation. Dissertation for the degree of candidate of physical and mathematical sciences]. Moscow, Computer Center RAS, 2011, 122 p.

[4] Katulov A.N., Severcev N.A., Solomaha G.M. *Issledovanie operacij i obespechenie bezopasnosti: prikladnye zadachi* [Operations research and security: applied problems]. Moscow, Fizmatlit, 2005, 238 p.

[5] Karmanov A.V. *Issledovanie upravlyaemyh konechnyh Markovskih cepej s nepolnoj informaciej* [Study of controlled finite Markov chains with incomplete information]. Moscow, Fizmatlit, 2002, 173 p.

[6] Brihaye T., Chatterjee K., Mohr S., Weininger M. Risk-aware Markov Decision Processes Using Cumulative Prospect Theory. [Электронный ресурс]. URL: https://arxiv.org/abs/2505.09514 (access date May 2025)

[7] Dolgopolova A.F. Modelirovanie strategij upravleniya v social'no-ekonomicheskih sistemah s ispol'zovaniem markovskih processov [Modeling control strategies in socio-economic systems using Markov processes]. *Agricultural bulletin of Stavropol Region*, 2011, vol. 1, iss. 1, pp. 67-69.

[8] Su H., Zio E., Zhang J., Li Zh., et. al. A systematic method for the analysis of energy supply reliability in complex Integrated Energy Systems considering uncertainties of renewable energies, demands and operations. *Journal of Cleaner Production*, 2020, vol. 267, art. 122117. DOI: 10.1016/j.jclepro.2020.122117.

[9] Haimes Y. Y. Risk Modeling of Interdependent Complex Systems of Systems: Theory and Practice. *Risk analysis*, 2018, vol. 38, iss. 1, pp. 84-98. DOI: https://doi.org/10.1111/risa.12804

[10] Severtsev N.A., Betskov A.V., Darina A.N. Development of probable criteria for safe management of special technique objects. *Reliability & quality of complex systems*, 2019, no. 2(26), pp. 3-8.

[11] Vinogradov I.M. *Matematicheskaya enciklopediya. T.5. Slu – YA* [Mathematical encyclopedia. T.5. Slu - Ya.]. Moscow, Soviet Encyclopedia Publishing House, 1984, 1248 cols.

[12] Koks D., Smit V. *Teoriya vosstanovleniya* [Recovery theory]. Moscow, Soviet Radio Publishing House, 1967, 299 p.

[13] Majn H., Osaki S. *Markovskie processy prinyatiya reshenij* [Markov decision processes]. Moscow, Nauka Publ., 1977, 175 p.

[14] Kashtanov V.A., Kondrashova E.V. *Issledovanie funkcionala dlya zadannoj sistemy massovogo obsluzhivaniya* [Research of functionality for a given queuing system]. Moscow, MIEM, 2010, 20 p.

[15] Karmanov V.G. *Matematicheskoe programmirovanie* [Mathematical programming]. Moscow, Fizmatlit, 2004, 264 p.
[16] SHiryaev A.N. *Veroyatnost'. V 2-h knigah* [Probability. In 2 books]. Moscow, MCCME Publishing House, 2007, 967 p.
[17] Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elementy teorii funkcij i funkcional'nogo analiza* [Elements of the theory of functions and functional analysis]. Moscow, Nauka Publ., 1976, 543 p.
[18] Volkov I.K., Zagorujko E.A. *Issledovanie operacij: uchebnik dlya studentov vysshih tekhnichekih uchebnyh zavedenij* [Operations research: a textbook for students of higher technical educational institutions]. Moscow, BMSTU Publ., 2000, 435 p.

Karmanov A.V., Dr. Sci. (Phys. — Math.), Professor, Department of Automation of Technological Processes, G National University of Oil and Gas « Gubkin University». e-mail: ABKar2007@yandex.ru

Orlova K.P., Cand. Sc. (Eng.), Associate Professor, Department of Automation of Technological Processes, National University of Oil and Gas « Gubkin University».e-mail: sherksu@mail.ru

Serkin V.E., Postgraduate Student, Department of Automation of Technological Processes, National University of Oil and Gas « Gubkin University». e-mail: ser-kin.ve@gmail.com