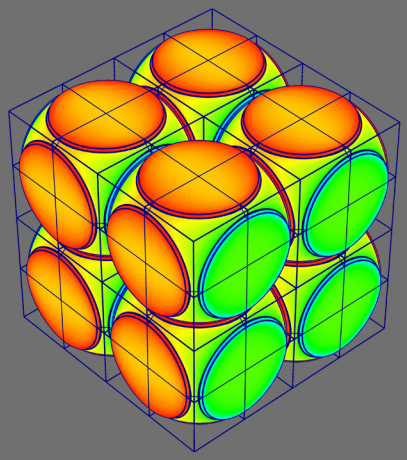
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Новосельцев А.С., Бабкин А.В., Ладов С.В. Математическое моделирование схлопывания осесимметричных металлических оболочек с учётом развития неустойчивости. Математическое моделирование и численные методы, 2025, № 4, с. 86–107.

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/391/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.216.140
13.11.2026 06:55:03

УДК 532.517.4;621.791.13+623.4.082.6 DOI: 10.18698/2309-3684-2025-4-86107

Математическое моделирование схлопывания осесимметричных металлических оболочек с учётом развития неустойчивости

© А.С. Новосельцев, А.В. Бабкин, С.В. Ладов

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

В статье рассматривается проблема устойчивости схлопывания металлических осесимметричных оболочек (кумулятивных облицовок) при воздействии на них продуктов детонации. Приведена математическая постановка задачи и описан численный метод решения, основанный на лагранжевом подходе и конечно-разностной схеме Уилкинса с дополнительной перестройкой расчётной сетки. Показано влияние начальных геометрических возмущений, толщины оболочки, её физико-механических свойств и других параметров на характер развития неустойчивости Релея–Тейлора и Рихтмайера–Мешкова.

Ключевые слова: *кумуляция, кумулятивный заряд, облицовка, схлопывание, поверхностные возмущения, гидродинамические неустойчивость*

Введение. Экспериментальное и численно-теоретическое исследование схлопывания под воздействием продуктов детонации ВВ металлических оболочек кумулятивных зарядов (кумулятивных облицовок). изучены достаточно подробно [1]. Однако проблема устойчивости этого процесса до последнего времени не получила столь же детального внимания [2].

Устойчивым принято называть такое схлопывание кумулятивной облицовки (КО), при котором её поверхностные слои сохраняют относительную гладкость, тогда как при неустойчивом процессе формируются поверхностные возмущения, приводящие к существенной деформации формы. Ключевую роль в определении устойчивости играет чувствительность оболочки к начальному несовершенству её геометрии. Если малые первичные возмущения не развиваются или подавляются, схлопывание остаётся устойчивым; напротив, их неограниченный рост указывает на переход в неустойчивый режим.

Понимание чувствительности КО к геометрическим несовершенствам и другим неидеальностям кумулятивного заряда (КЗ) имеет практическую значимость. Во-первых, в реальных условиях изготовления металлические облицовки неизбежно содержат малые дефекты формы. Во-вторых, процесс нагружения оболочки продуктами детонации может отклоняться от идеальной осесимметрии из-за неидеальности системы инициирования и управления детонационной волной (линзы) [3, 4]. В частности, многоточечное инициирование

взрывчатого вещества (ВВ) может привести к угловой зависимости нагрузки [5]. Эти факторы создают предпосылки для развития неустойчивости, что способно повлиять на нормальное функционирование КЗ и формирование кумулятивной струи (КС).

Цель настоящей статьи — разработка математической модели схлопывания КО с учетом начальных геометрических несовершенств и асимметрии приложения взрывной нагрузки. Исследование основано на анализе механизма развития поверхностной неустойчивости, в том числе неустойчивости Релея—Тейлора [6, 7] и Рихтмайера—Мешкова [8-9], характерных для взрывного нагружения оболочек.

Различные аспекты поверхностной неустойчивости при динамическом нагружении и деформировании пластин и оболочек уже рассматривались в литературе [6-19]. Выделяют три основные разновидности: неустойчивость Релея—Тейлора, неустойчивость Рихтмайера—Мешкова и тангенциальную неустойчивость Кельвина—Гельмгольца [6]. В контексте взрывного нагружения металлических оболочек наиболее актуальны первые две.

Неустойчивость Релея—Тейлора [13-15] обусловлена инерционными силами, возникающими при ускоренном движении границы раздела двух сред с разной плотностью. Если ускорение направлено в сторону среды с меньшей плотностью, инерционные силы стабилизируют границу, подавляя малые возмущения. В противоположном случае неустойчивость развивается, и поверхностные возмущения возрастают.

Неустойчивость Рихтмайера—Мешкова, имеющая ударно-волновую природу, проявляется при взаимодействии ударных волн с поверхностями, содержащими малые начальные возмущения [16-19]. После выхода ударной волны на свободную поверхность происходит инверсия фазы возмущений (максимумы и минимумы меняются местами), за которой следует их быстрое усиление. В некоторых случаях последующее взаимодействие с повторной ударной волной может подавить рост возмущений.

Для кумулятивных зарядов катастрофическая неустойчивость малопрочных оболочек может препятствовать нормальному схлопыванию КО и формированию КС. Особенно это актуально в случае предварительного нагрева облицовки, который используется в «тепловом способе» увеличения пробивной способности КЗ [20, 21]. Данные сложности обусловливают актуальность исследования устойчивости процесса схлопывания КО, что и является целью настоящей работы.

Математическая постановка задачи динамического деформирования металлической оболочки. В данной работе мы рассматриваем задачу в двухмерной плоской постановке, используя основы механики сплошной среды. Металлическая оболочка моделируется

как сжимаемая упругопластическая среда с идеальной пластичностью, причём для описания перехода в пластическое состояние применяется критерий текучести Мизеса.

Расчётная схема решаемой задачи показа на рисунке 1. Рассматривается цилиндрическая оболочка с номинальным начальным внутренним радиусом R_0, толщиной δ_0 и радиусом заряда R_{PD}. Вводится цилиндрическая система координат с осью z, направленной по оси оболочки, с линейной радиальной координатой r и угловой тангенциальной координатой θ.

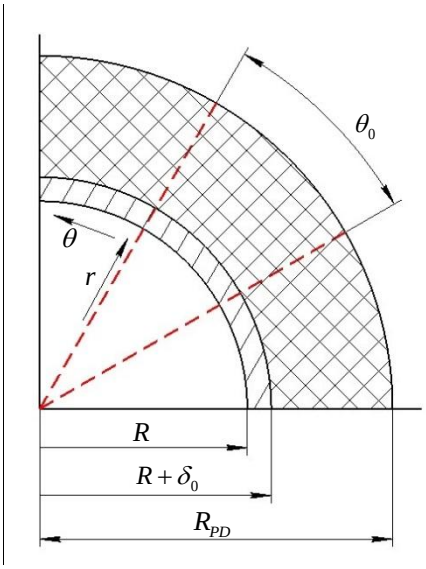


Рис. 1. Расчётный сегмент

Считается, что движение оболочки происходит лишь в радиальном и тангенциальном направлении и отсутствует в направлении оси z, то есть по существу рассматривается плоское движение и деформирование произвольного плоского сечения оболочки в полярной системе координат r, θ. Из оболочки радиальными лучами выделяется фрагмент с полярным углом $\theta_0 = \pi / n$, и предполагается, что в тангенциальном направлении по соседству с выделенным фрагментом находятся фрагменты, идентичные данному в геометрическом, кинематическом и динамическом отношении (соответствует граничным условиям симметрии в тангенциальном направлении). На внешней поверхности выделенного фрагмента подобно задаётся условие прилипания частиц, внутренняя поверхность считается свободной.

В начальный момент времени $t = 0$ на внешней или внутренней поверхностях с номинальным радиусом R (для внутренней поверхности $R = R_0$, для наружной — $R = R_0 + \delta_0$) задаются малые гармонические возмущения формы

$$r = R + \eta cos\left(\frac{2\pi\theta}{2\theta_0}\right) = R + \eta cos\left(2n\theta\right). \qquad (1)$$

Движение и деформирование выделенного фрагмента оболочки описывалось с позиций подхода Лагранжа. В двумерной плоской постановке движение и состояние материала характеризуется радиальной r и тангенциальная θ эйлеровыми координаты индивидуальных точек.

Введем обозначение для вектора скорости

$$\mathbf{v} = v^i \mathbf{r_i} = v^1 \mathbf{r_1} + v^2 \mathbf{r_2},$$

где $\mathbf{r_1}$ и $\mathbf{r_2}$ — базисные вектора полярной системы координат, v^1 и v^2 — геометрические компоненты вектора скорости, которым соответствуют физические компоненты — радиальная υ_r и тангенциальная υ_θ.

Введем также обозначения для: плотности ρ, давления p, удельной внутренней энергии E индивидуальных частиц, тензора скоростей деформации

$$\left(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\right) = \dot{\varepsilon}_{ij} \mathbf{r^i} \mathbf{r^j}$$

тензора напряжений

$$\left(\boldsymbol{\sigma}\right) = \sigma_{ij} \mathbf{r^i} \mathbf{r^j}$$

и девиатора тензора напряжений

$$\left(\mathbf{D_\sigma}\right) = D_{\sigma ij} \mathbf{r^i} \mathbf{r^j}.$$

Уравнения движения среды в случае двумерного плоского движения среды в полярной системе координат определяют скорости изменения радиальной и тангенциальной физических компонент вектора скорости индивидуальных точек:

$$\rho \frac{d\upsilon_r}{dt} = F_r + \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + \rho \frac{(\upsilon_\theta)^2}{r}, \qquad (2)$$

$$\rho \frac{d\upsilon_\theta}{dt} = F_\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + 2\frac{\sigma_{r\theta}}{r} - \rho \frac{\upsilon_r \upsilon_\theta}{r}. \qquad (3)$$

Присутствие в правых частях уравнений движения составляющих, зависящих от скоростей, отличает запись уравнений движения от использованных в ближайшем аналоге. Их появление является прямым следствием тензорных уравнений движения (5) и учитывает

переменность базисных векторов криволинейной цилиндрической системы координат. Физически эти составляющие учитывают факт взаимного влияния радиального и тангенциального движений друг на друга. Отметим также, что в записи уравнений движения одновременно использованы элементы лагранжева описания (индивидуальные производные по времени в левых частях (6) и (7)) и эйлерова описания (частные производные по эйлеровым полярным координатам в правых частях). Для реализации в целом лагранжева описания движения (изучение изменения параметров движения и состояния для индивидуальных точек и частиц среды) в систему уравнений включаются дифференциальные уравнения изменения эйлеровых координат индивидуальных точек

$$\frac{dr}{dt} = \upsilon^1 = \upsilon_r, \tag{4}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \upsilon^2 = \frac{\upsilon_\theta}{r}. \tag{5}$$

Закон сохранения массы при использовании лагранжева подхода к описанию движения и деформирования среды наиболее удобно записывается через текущие и начальные плотность и объем ее индивидуальных частиц:

$$dm = \rho_0 dV_0 = \rho V.$$

Для двумерной плоской задачи индивидуальные частицы имеют форму цилиндров с образующей, параллельной оси z, и с переменной площадью поперечного сечения S, ограниченной так же переменным деформируемым контуром l. Поэтому в данном случае уравнение закона сохранения массы приобретает вид:

$$\rho dS = \rho_0 dS_0. \tag{6}$$

где текущая площадь частиц dS вычисляются по координатам индивидуальных точек на контуре l, а ее начальное значение dS_0 определяется начальными условиями.

Выражающее первое начало термодинамики дифференциальное уравнение энергии записывается в лагранжевой форме представления через скорость изменения плотности частиц, компоненты девиатора напряжений и тензора скоростей деформаций в частицах. Это уравнение принимает следующий вид:

$$\frac{dE}{dt} = -p\frac{d\left(1/\rho\right)}{dt} + \frac{D_{\sigma rr}\dot{\varepsilon}_{rr} + D_{\sigma\theta\theta}\dot{\varepsilon}_{\theta\theta} + 2D_{\sigma r\theta}\dot{\varepsilon}_{r\theta}}{\rho} \tag{7}$$

В свою очередь, для вычисления компонент тензора скоростей деформаций используются кинематические соотношения

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = 0.5\left(\nabla_i \upsilon_j + \nabla_j \upsilon_i\right)$$

в полярной системе координат и с учетом вида деформированного состояния приобретающие вид:

$$\dot{\varepsilon}_{rr} = \frac{\partial v_r}{\partial r}, \tag{8}$$

$$\dot{\varepsilon}_{r\theta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \upsilon_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r}\right), \tag{9}$$

$$\dot{\varepsilon}_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial \upsilon_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r}. \tag{10}$$

Из физико-механических свойств материала металлической оболочки учитывались сжимаемость и упругопластические свойства. Сжимаемость металла описывалась с помощью баротропной зависимости в форме Тэта

$$p = A_C\left[\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^n - 1\right]. \tag{11}$$

Упругопластические свойства – с помощью уравнений пластического течения Прантдля-Рейсса в сочетании с критерием пластичности Мизеса. Естественно, определяемые раздельно из указанных уравнений давление и девиатор напряжений позволяют вычислить компоненты тензора полных напряжений

$$\sigma_{ij} = -pg_{ij} + D_{\sigma ij}, \tag{12}$$

где $-pg_{ij}$ — компоненты шарового тензора напряжений.

Уравнения пластического течения решались численно с помощью известного конечно-разностного метода [21] Уилкинса. Согласно этому методу на первом этапе определения компонент девиатора напряжений решаются «чисто упругие» уравнения взаимосвязи девиаторов напряжений (D_σ) и скоростей деформаций ($D_{\dot{\varepsilon}}$) через модуль сдвига G

$$\frac{D(\mathbf{D}_\sigma)}{Dt} = 2G(\mathbf{D}_{\dot{\varepsilon}}), \tag{13}$$

где производная по времени D/Dt понимается как производная Яуманна. На втором этапе для вычисленного таким образом девиатора напряжений проверяют выполнение критерия пластичности Мизеса, который для рассматриваемого случая напряженного состояния имеет вид:

$$D_{\sigma rr}{}^2 + D_{\sigma\theta\theta}{}^2 + D_{\sigma rr}D_{\sigma\theta\theta} + D_{\sigma r\theta}{}^2 = \frac{\sigma_Y{}^2}{3}, \qquad (14)$$

где σ_Y – предел текучести материала оболочки. В случае невыполнения условия:

$$D_{\sigma rr}{}^2 + D_{\sigma\theta\theta}{}^2 + D_{\sigma rr}D_{\sigma\theta\theta} + D_{\sigma r\theta}{}^2 = \frac{\sigma_Y{}^2}{3},$$

(соответствует выходу вектора девиатора напряжений за круг текучести, что для упругоидеальнопластической среды достигнуто быть не может), на заключительном третьем этапе вектор девиатора приводят на круг текучести, обеспечивая точное выполнения критерия Мизеса.

Участвующая в записи определяющих соотношений упругости производная Яуманна отличается от обычной индивидуальной производной учетом фактора вращения индивидуальной частицы как целого с некоторой угловой скоростью

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} rot\mathbf{v}$$

вектор, которой в рассматриваемых условиях движения направлен по оси z. Даже при отсутствии приращений деформаций (при равном 0 тензоре скоростей деформаций) такое вращение может приводить к изменению компонент девиатора напряжений $D_{\sigma rr}$, $D_{\sigma\theta\theta}$, $D_{\sigma r\theta}$ в неподвижной цилиндрической системе координат. Кроме того, индивидуальная производная по времени от тензора второго ранга, заданного в цилиндрической системе координат с меняющимся в зависимости от координат основным базисом, также привносит определенную специфику координатной записи тензорного соотношения. С учетом двух отмеченных обстоятельств дифференциальная форма записи определяющих соотношений упругости приобретает следующий вид:

$$\frac{dD_{\sigma rr}}{dt} = 2G\left(\dot{\varepsilon}_{rr} + \frac{1}{3}\frac{\dot{\rho}}{\rho}\right) + 2D_{\sigma r\theta}\left(\frac{v_\theta}{r} - \dot{\omega}_z\right), \qquad (15)$$

$$\frac{dD_{\sigma\theta\theta}}{dt} = 2G\left(\dot{\varepsilon}_{\theta\theta} + \frac{1}{3}\frac{\dot{\rho}}{\rho}\right) + 2D_{\sigma r\theta}\left(\dot{\omega}_z - \frac{v_\theta}{r}\right), \qquad (16)$$

$$\frac{dD_{\sigma r\theta}}{dt} = 2G\left(\dot{\varepsilon}_{rr} + \frac{1}{3}\frac{\dot{\rho}}{\rho}\right) + \left(D_{\sigma rr} - D_{\sigma\theta\theta}\right)\left(\dot{\omega}_z - \frac{v_\theta}{r}\right), \qquad (17)$$

где угловая скорость вращения индивидуальной частицы

$$\dot{\omega}_z = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial(\upsilon_\theta r)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial \upsilon_r}{\partial\theta}\right]. \qquad (18)$$

Моделирование продуктов детонации в рамках настоящего исследования осуществлялось с использованием уравнения состояния Джонса-Вилкинса-Ли (JWL), которое широко применяется при описании поведения детонационных газов. Данное уравнение состояния позволяет адекватно учитывать зависимость давления продуктов детонации от плотности и внутренней энергии, обеспечивая реалистичное воспроизведение динамических процессов.

Уравнение состояния JWL имеет вид:

$$p = A\left(1-\frac{\omega}{R_1 V}\right)e^{-R_1 V} + B\left(1-\frac{\omega}{R_2 V}\right)e^{-R_2 V} + \frac{\omega E}{V}, \qquad (19)$$

где p — давление, V — удельный объем, E — удельная внутренняя энергия, A, B, ω, R_1, R_2 — эмпирические параметры, зависящие от типа взрывчатого вещества.

Замкнутая система дифференциальных и конечных уравнений (6)–(19) является математическим описанием движения и деформирования сжимаемой упругопластической оболочки и продуктов детонации в рамках двумерного плоского приближения. Постановку задачи завершают начальные и граничные условия.

Начальные условия по параметрам движения и состояния оболочки соответствуют условиям покоя, а также отсутствию деформаций и напряжений в материале оболочке. На внутренней или наружной поверхности оболочки задавалось начальное гармоническое поверхностное возмущение (1).

Граничные условия в рамках данного исследования формулировались с учетом физических особенностей процесса схлопывания оболочки под действием детонационных продуктов. Внутренняя поверхность оболочки рассматривалась как свободная, что означает отсутствие напряжений на границе, то есть вектор полного напряжения принимался равным нулю.

На ограничивающих выделенный фрагмент оболочки радиальных лучах использовались граничные условия циклической повторяемости в тангенциальном направлении. Эти условия обеспечивали корректное моделирование деформирования рассматриваемого участка в составе всей оболочки, исключая влияние краевых эффектов и имитируя его окружение аналогичными сегментами.

На наружной поверхности оболочки задавались условия идеального сцепления с детонационными продуктами, что обеспечивало непрерывность скоростей частиц материала оболочки и продуктов детонации.

Внешняя граница продуктов детонации моделировалась как жесткая стенка, что исключало их расширение в данном направлении и обеспечивало сохранение осевой симметрии процесса. Это допу-

щение использовалось для упрощения расчетной схемы, поскольку в реальном физическом эксперименте аналогичное условие может быть реализовано за счет геометрической конфигурации заряда или окружающей его среды.

Алгоритм численного решения задачи схлопывания фрагмента оболочки с начальными поверхностными возмущениями. Этот алгоритм строился на основе алгоритма известного конечно-разностного метода Уилкинса [22], который подробно описан в статье [23].

Одним из существенных недостатков классического лагранжева метода Уилкинса является возникновение чрезмерно вытянутых ячеек в процессе расчета, что приводит к некорректной работе численного алгоритма. При исследовании процесса неустойчивости такая проблема встаёт наиболее остро. Для устранения данной проблемы разработаны два алгоритма перестроения расчетной сетки: локальный и глобальный. Перестроение осуществляется в ходе расчета при достижении заданного критического соотношения длин сторон ячейки в радиальном и тангенциальном направлениях.

В случае превышения данного порога ячейки при локальном перестроении сетки ячейка с соответствующими индексами делится на две равные части, а скорости новых узлов вычисляются как среднее значение скоростей исходных граничных узлов. Физические параметры ячеек изменяются пропорционально площади. Однако данный подход приводит к увеличению числа ячеек, что, в свою очередь, уменьшает временной шаг и значительно повышает вычислительные затраты.

Для преодоления данной проблемы использовался алгоритм глобального перестроения расчётной сетки, который проводился в три этапа. Первый этап включал в себя задачу построения новой расчётной сетки с учётом положения узлов на внутренней и внешней границах, которые остаются неизменными. На втором этапе проводилось переопределение параметров в узлах расчётной сетки. И заключительным этапом рассчитывались новые значения в ячейках новой сетки, исходя из того, что параметры ячеек изменяются пропорционально их площади.

Рассмотрим подробнее каждый из этапов. На первом этапе осуществляется построение новой расчётной сетки. В сложных геометриях качество сетки оказывает решающее влияние на точность численного решения. В данной работе применялось два подхода для сглаживания и перераспределения узлов сетки — метод Винслоу и метод пружин.

Метод Винслоу [24] основан на решении гармонических уравнений для координат r, θ от параметров (ξ,η). Пусть

$$x = r(\xi,\eta)\cos\left(\theta(\xi,\eta)\right), \tag{20}$$

$$y = r(\xi,\eta)\sin\left(\theta(\xi,\eta)\right). \tag{21}$$

Необходимо, чтобы $x(\xi,\eta)$ и $y(\xi,\eta)$ удовлетворяли уравнениям Лапласа

$$\nabla^2 x = 0, \tag{22}$$

$$\nabla^2 y = 0, \tag{23}$$

которые в полярных координатах приводит к следующей системе:

$$r_{\xi\xi} + r_{\eta\eta} - r\left(\theta_\xi^2 + \theta_\eta^2\right) = 0, \tag{24}$$

$$r^2\left(\theta_{\xi\xi} + \theta_{\eta\eta}\right) + 2r\left(r_\xi\theta_\xi + r_\eta\theta_\eta\right) = 0. \tag{25}$$

Решение этих уравнений позволяет перераспределить узлы сетки так, чтобы уменьшить её искажения и обеспечить более равномерное покрытие расчётной области**.**

Метод пружин представляет подход к перестроению сетки, основанный на моделировании связей между узлами как механических пружин. В полярных координатах, если принять одинаковые жёсткости на противоположных рёбрах, метод описывается следующими уравнениями:

$$K_r\left(r_{i+1,j} - r_{i,j}\right) + K_\theta\left(r_{i,j+1} - r_{i,j}\right) = 0, \tag{26}$$

$$K_r\left(\theta_{i+1,j} - \theta_{i,j}\right) + K_\theta\left(\theta_{i,j+1} - \theta_{i,j}\right) = 0. \tag{27}$$

где K_r и K_θ — коэффициенты жёсткости пружин в радиальном и угловом направлениях, определяемые обратной длиной соответствующих сегментов сетки. В отличие от метода Винслоу, данный подход позволяет адаптивно изменять плотность сетки в зависимости от её локальных характеристик. Однако метод пружин чувствителен к начальному распределению узлов и может приводить к чрезмерному вытягиванию ячеек, если не используются дополнительные ограничения на движение узлов [25].

Оба метода обладают своими преимуществами и недостатками. Метод Винслоу обеспечивает более гладкое распределение узлов и стабилен при больших деформациях сетки, но требует решения нелинейных эллиптических уравнений, что увеличивает вычислительные затраты. Метод пружин, напротив, является более простым в реализации и вычислительно эффективным, но не гарантирует ортогональность сетки и может приводить к возникновению вырожденных ячеек.

Для перестроения расчётной сетки используются комбинация этих методов, изначально записанные в полярных координатах, что позволяет учитывать, как физические деформации, так и требования к численной точности решения [26]. Метод пружин используется для предварительного перераспределения узлов, после чего метод Винслоу выполняет финальное сглаживание сетки.

Поскольку численное решение в полярных координатах может приводить к увеличению вычислительной сложности и численным артефактам (особенно вблизи оси симметрии), расчётная процедура была выполнена в декартовой системе координат. После перестроения сетки, полученные значения координат были обратно преобразованы в полярную систему. Этот подход позволяет упростить численный алгоритм. Граничные условия при этом задаются жёстко: узлы внутренней и внешней границ не меняют своего положения, чтобы сохранить конфигурацию исходной геометрии.

После построения новой расчётной сетки необходимо последовательно перенести значения скоростей, в новые узлы сетки. Для этого формируется взаимная «карта» соответствия: каждому узлу исходной сетки сопоставляются ячейки новой, а каждому новому узлу — ячейки старой сетки. На основе этой информации проводится билинейная интерполяция скоростей.

Поскольку ячейки представляют собой произвольные четырёхугольники, встаёт задача универсального определения их пересечения. В настоящей работе для этой цели используется алгоритм Вейлера-Азертона [27], который реализует процедуру «отсечения» одного многоугольника другим. Алгоритм основывается на циклическом представлении вершин, как отсекаемого многоугольника (старой ячейки), так и отсекателя (новой ячейки). Наружные границы полигонов задаются в обходе по часовой стрелке, тогда как внутренние — против часовой стрелки. Точки пересечения определяются и регистрируются в момент входа и выхода отсекаемого многоугольника относительно границы отсекателя. Алгоритм начинается с первой точки входа, после чего осуществляется пошаговый обход внешней границы до следующего пересечения, с последующим переключением на контур отсекателя. Данные шаги повторяются до возвращения в исходную точку, что позволяет построить все итоговые многоугольники пересечения.

Результатом операции отсечения является новый многоугольник или несколько многоугольников, задающий форму пересекающейся области. Параметры ячеек, например, плотность и энергия в каждой новой ячейке вычисляются путём усреднения по площади пересечения. Таким образом, применение алгоритма Вейлера-Азертона обеспечивает надёжный и универсальный механизм пересчёта параметров ячеек при глобальной перестройке расчётной сетки.

Применение описанного подхода к перестройке сетки позволяет избежать роста числа ячеек и связанных с этим вычислительных за-

трат, который характерен для локального метода адаптации сетки. Благодаря этому в совокупности достигается необходимый баланс между точностью моделирования и приемлемым уровнем вычислительной сложности.

Примеры численного решения задачи. В качестве исследуемой оболочки выступала медная кумулятивная облицовка 68-мм заряда. Радиус заряда обозначен как R_{PD}. Внутренний радиус облицовки R_0 составил 20 мм, её толщина δ — 1,4 мм. Амплитуда рассматриваемых возмущений η_0 соответствовала технологической погрешности по разностенности штатных кумулятивных облицовок. Для типового варианта разностенность полагалась равной $2\eta_0 = 30$ мкм, что составляет примерно 2 % от толщины облицовки. Полное количество возмущений n, определяющее количество гармонических возмущений по всей длине окружности поверхности оболочки, соответствовало 12 для типового варианта. Константы в тета-уравнении сжимаемости $A = 30.2$ ГПа и $n = 4{,}8$ [1] и $A = 524.23$ ГПа, $B = 7.678$ ГПа, $\omega = 0.34$, $R_1 = 4.2$, $R_2 = 1.1$ [1] в уравнении JWL.

Ниже в качестве дополнительной иллюстрации корректности работы численного метода Уилкинса с учётом перестройки расчётной сетки приведён расчёт схлопывания цилиндрической оболочки без начальных возмущений формы. На рис. 2 показаны временные зависимости радиальной скорости внутренней и наружной поверхностей оболочки.

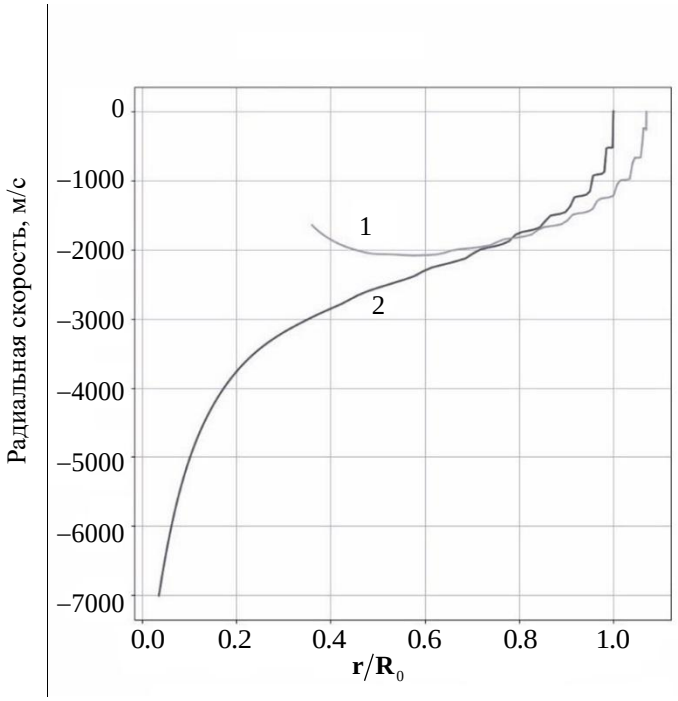


Рис. 2. Пример шаблона — шаблон для аппроксимации уравнений движения

На рис. 3 приведены дисбалансы по массе, энергиям и составляющим импульса, выраженные в процентах. Как видно, закон сохранения массы выполняется практически идеально: соответствующая кривая близка к нулю на всём временном интервале расчёта. Дисбаланс энергии остаётся в пределах 3 % во время всего расчёта. Хуже обстоят дела для дисбаланса импульса (радиального и поперечного), их значение возрастает по мере развития процесса, достигая порядка 10 % к моменту схлопывания.

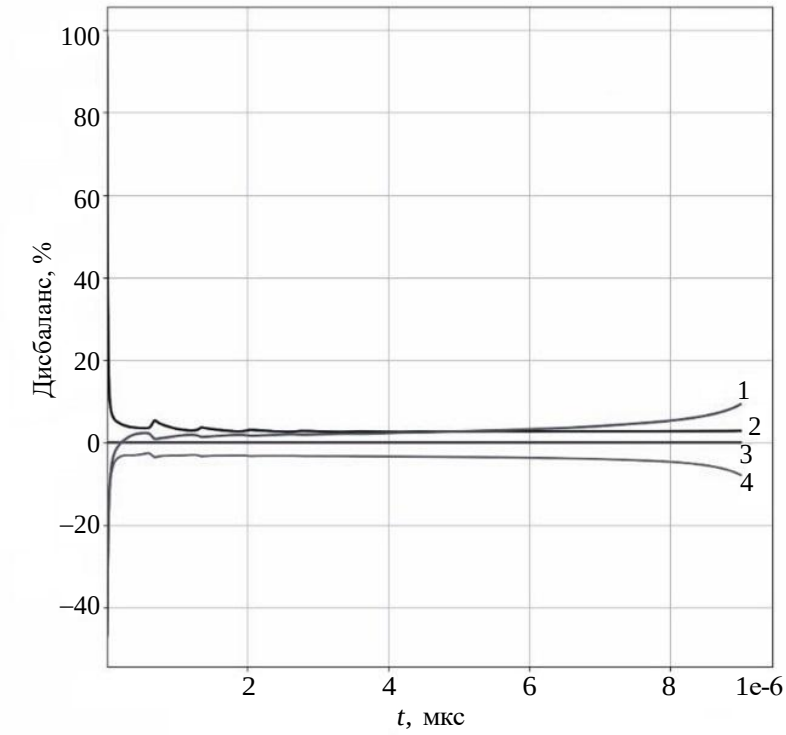


Рис. 3. Пример шаблона — шаблон для аппроксимации уравнений движения

Было также выполнено перестроение расчётной сетки, детали которого подробно рассмотрены в предыдущей главе. На рис. 4 приведены дисбалансы по массе, энергии и составляющим импульса после перестроения сетки, а на рис. 5 положение оболочки с перестроением и без перестроения расчётной сетки.

Из графиков видно, что благодаря перестроению сетки дисбалансы на поздних стадиях расчёта несколько уменьшились, при этом положение оболочки в обоих вариантах практически совпадает с результатами без перестроения, что свидетельствует о надёжности и корректности данного подхода при моделировании динамического схлопывания оболочек.

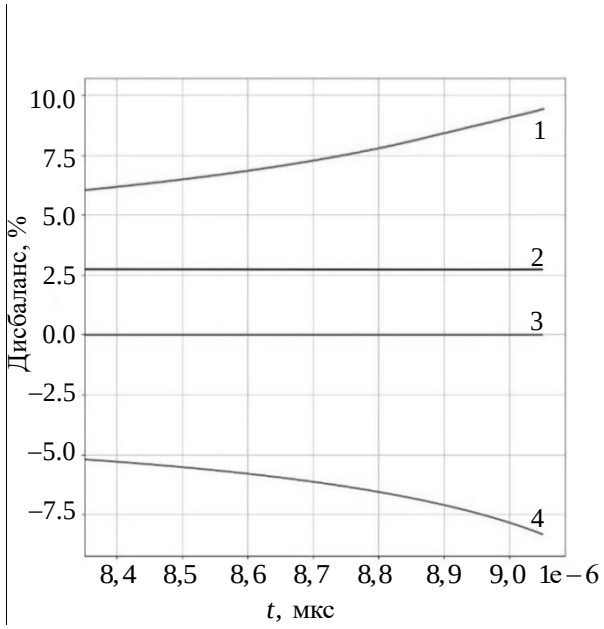
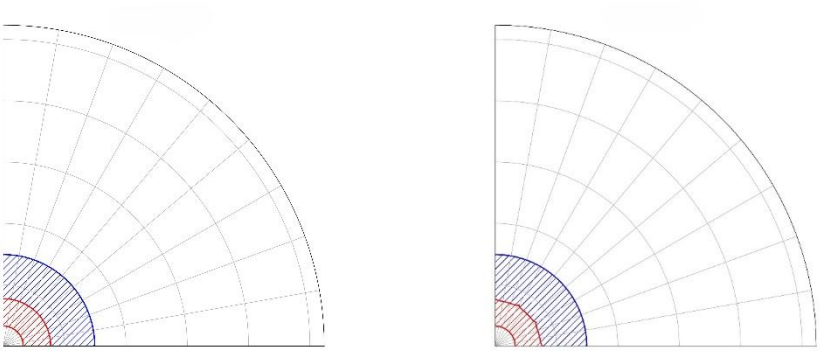


Рис. 4. Пример шаблона — шаблон для аппроксимации уравнений движения



а) б)

Рис. 5. Положение оболочки для момента времени 9 мкс:
а) без перестроения расчётной сетки, б) с перестроением расчётной сетки

Таким образом, расчётный пример без начальных возмущений подтверждает корректность используемой методики моделирования динамического схлопывания осесимметричных оболочек. Результаты совпадают с физическими ожиданиями относительно скоростей схлопывания и демонстрируют, что численный метод надёжно сохраняет массу и обеспечивает удовлетворительную точность по импульсу и энергии, даже с учётом перестроения расчётной сетки в ходе вычислений.

Под устойчивым процессом динамического деформирования осесимметричной кумулятивной облицовки (оболочки) понималось ее деформирование с сохранением относительно гладкой формы наружной и внутренней поверхностей, а под неустойчивым – развитие поверхностных возмущений в процессе схлопывания, когда локальные центры кривизны различных участков схлопывающейся оболочки могут находиться по разные стороны от срединной поверхности. Иначе говоря, устойчивость или неустойчивость деформирования оболочки определяется ее чувствительностью к начальным несовершенствам формы поверхностей или асимметрией приложения взрывной нагрузки. Процесс деформирования будет устойчив, когда начальные малые возмущения не развиваются или подавляются. И наоборот, когда они неограниченно возрастают при реализации механизма неустойчивости Рэлея-Тейлора.

На представленном ниже результате расчёта типового варианта показано положение облицовки в различные моменты времени (рис. 6.). Струеобразующий слой — зона, из которой образуется кумулятивная струя, задавался как 20 % массы оболочки со стороны ее внутренней поверхности. В процессе деформирования оболочки наблюдается значительный рост возмущений, изменяющий форму облицовки. После выхода ударной волны на свободную поверхность с очень малыми начальными возмущениями формы происходит сначала изменение фазы поверхностных геометрических возмущений (максимумы и минимумы меняются местами), а затем — их быстрый значительный рост.

Для оценки влияния того или иного параметра на устойчивость процесса схлопывания было проведено варьирование выбранного параметра в сравнении с типовым вариантом [25]. В качестве основной меры оценки развития неустойчивости была выбрана амплитуда возмущений η.

Характерным и наиболее сильно влияющим на развитие неустойчивости параметром является амплитуда поверхностных возмущений (рис. 7). При амплитуде, соответствующей разностенности в 2-3 раза превышающей реализуемую технологически для облицовок заряда диаметром 68 м, развитие неустойчивости проявляется столь сильно, значительно что затрагивает внутреннюю поверхность и 20 %-й «струеобразующий слой» облицовки

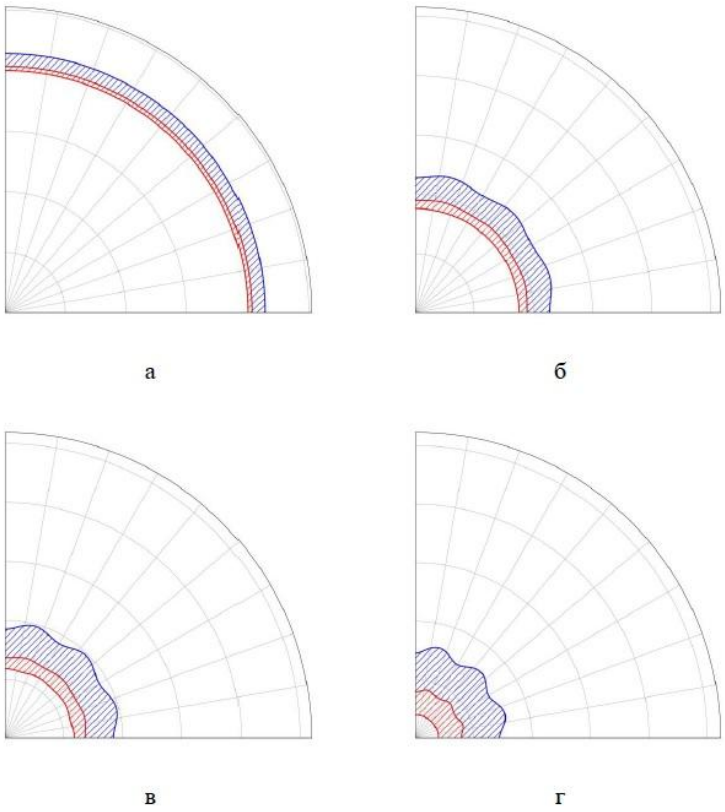


Рис. 6. Положение облицовки в момент времени:
а) $t = 0$ мкс б) $t = 7$ мкс в) $t = 8$ мкс г) $t = 9$ мкс

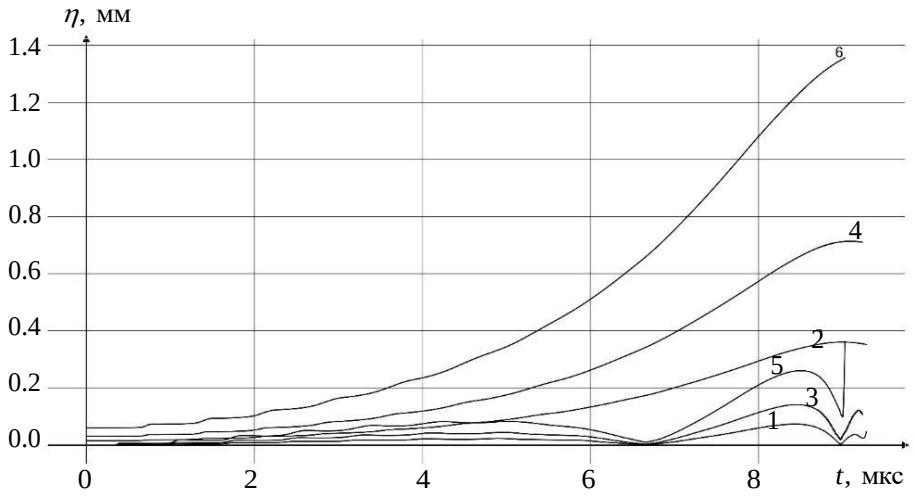


Рис. 7. Развитие возмущений на внутренней (1, 3, 5) и внешней (2, 4, 6) поверхности оболочки с начальной амплитудой $2\eta = 30$ мкм (1, 2); $2\eta = 60$ мкм (3, 4); 3 - $2\eta = 120$ мкм (5, 6)

Среди варьируемых геометрических характеристик оболочки рассматривались длина волны возмущений и номинальная толщина облицовки [25].

Уменьшение длины волны приводит к более быстрому росту неустойчивости на внешней поверхности. На внутренней поверхности на заключительной стадии схлопывания наблюдается уменьшений амплитуды возмущений – возникшие складки соединяются между собой, разглаживая тем самым внутреннюю сторону облицовки.

При увеличении длины волны геометрических возмущений большему искажению подвергается внутренняя поверхность оболочки. Для длинноволновых возмущений в большей степени проявляется эффект разнотолщинности оболочки (разнотолщинность оболочки ведет к различию в радиальных скоростях движения на участках фрагмента оболочки), что и приводит к большей деформации внутренней поверхности.

Таким образом, можно сделать вывод о том, что с увеличением длины волны начального гармонического возмущения формы оболочки степень проявления неустойчивости деформирования оболочки уменьшается на наружной и увеличивается на внутренней поверхности.

Уменьшении толщины облицовка в значительной степени деформируется, затрагивая в том числе и струеобразующий слой.

Меньшее влияние оказывают параметр, учитывающие физико-механические свойства материала оболочки: динамический предел текучести Y_0 и плотность материала облицовки ρ_0. Полученные результаты расчётов показали незначительное влияние данной величины на рост неустойчивости на внутренней и внешней поверхностях облицовки. Подобное «неопасное» влияние на схлопывание оболочки и развитие неустойчивости имеет и плотность: более легкий и более «скоростной» материал способствует более быстрому и устойчивому схлопыванию при практически идеальном струеобразующем слое.

Выводы. Разработана двумерная плоская математическая модель схлопывания металлической оболочки в полярной системе координат с учётом упругопластических свойств материала оболочки и её взаимодействия с продуктами детонации. Подтверждена работоспособность модифицированной конечно-разностной схемы Уилкинса с перестройкой расчётной сетки.

Установлено, что при увеличении амплитуды и уменьшении длины волны возмущений наружная поверхность оболочки подвергается более сильному искажению, и в ряде случаев деформация затрагивает струеобразующий слой оболочки.

Показано, что характеристики материала оболочки (динамический предел текучести, плотность) из меди, алюминия и стали, влия-

ют на неустойчивость в меньшей степени, чем начальные геометрические дефекты в рассмотренном диапазоне.

Таким образом, предложенный подход позволяет возможность моделировать развитие поверхностной неустойчивости при схлопывании оболочек. Результаты могут быть использованы для оценки чувствительности процесса формирования кумулятивной струи к начальным несовершенствам оболочки.

Данная работа финансировалась за счет средств бюджета федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования "Московский Государственный Технический Университет Имени Н.Э. Баумана (Национальный Исследовательский Университет)".

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Орленко Л.П. *Физика взрыва. В 2 т. Т. 2*. Москва, Физматлит, 2002, 656 с.

[2] Пай В.В., Титов В.М., Лукьянов Я.Л., Пластинин А.В. Исследование неустойчивости конической облицовки в процессе формирования кумулятивной струи. *Физика горения и взрыва*, 2019, т. 54, № 4, с. 69–73.

[3] Баскаков В.Д., Зарубина О.В., Карнаухов К.А., Тарасов В.А. Математическое моделирование процесса соударения плоских струй идеальной жидкости. *Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2016, № 2 (65), с. 79–90.

[4] Karnaukhov K.A., Baskakov V.D., Korenkov V.V., Zarubina O.V. Peculiarity of the shaped-charge liner collapse concerning the unevenness in its cross-section. *Journal of Physics. Conference Series*, 2017, vol. 894, no. 1, pp. 012–039.

[5] Андреев С.Г., Соловьев В.С., Новицкий А.Е., Шикунов Н.В. Продольно-поперечная неустойчивость инициирующих ударных волн. *Труды V Всесоюзного совещания по детонации. Черноголовка, ИХФ РАН*, 1991, с. 330–334.

[6] Иванов А.Г., Огородников В.А., Карпенко Г.Я. и др. О влиянии сдвиговой прочности на развитие неустойчивости при торможении сходящихся оболочек. *Прикладная механика и техническая физика*, 1994, т. 35, № 4, с. 163–167.

[7] Дреннов О.Б., Михайлов А.Л., Огородников В.А. О задании и эволюции локальных (периодических) возмущений в экспериментах по исследованию неустойчивости Рэлея—Тейлора в средах с прочностью. *Прикладная механика и техническая физика*, 2000, т. 41, № 2, с. 171–176.

[8] Чарахчьян А.А. Неустойчивость Рихтмайера—Мешкова на границе раздела сред при прохождении через неё двух последовательных ударных волн. *Прикладная механика и техническая физика*, 2000, т. 41, № 1, с. 28–37.

[9] Чарахчьян А.А. Об устойчивости кумулятивных струй, возникающих при импульсном воздействии на конические мишени. *Прикладная механика и техническая физика*, 1997, т. 38, № 3, с. 9–13.

[10] Колпаков В.И., Ладов С.В., Рубцов А.А. *Математическое моделирование функционирования кумулятивных зарядов*. Москва, МГТУ им. Н. Э. Баумана, 1998, 36 с. EDN ZTYKDN.

[11] Колпаков В.И., Плетнёв С.Л. *Тезисы докладов IV Международной конференции «Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике»*. Новосибирск, 1995, с. 125.

[12] Огородников В.А., Иванов А.Г., Михайлов А.Л. и др. О выбросе частиц со свободной поверхности металлов при выходе на неё ударной волны и методах диагностики этих частиц. *Физика горения и взрыва*, 1998, т. 34, № 3, с. 103–107.

[13] Огородников В.А., Иванов А.Г., Крюков Н.И. Ударно-волновое диспергирование конструкционных материалов. *Физика горения и взрыва*, 1999, т. 35, № 5, с. 122–126.

[14] Огородников В.А., Романов Ф.В., Ерунов С.В. и др. Взаимодействие металлического лайнера с сосредоточенными элементами и передача возмущений по ним. *Физика горения и взрыва*, 2008, т. 44, № 6, с. 107–113.

[15] Невмержицкий Н.В., Раевский В.А., Сотсков Е.А. и др. Некоторые особенности выброса частиц с поверхности ударно-нагруженного свинцового образца. *Физика горения и взрыва*, 2018, т. 54, № 5, с. 82–89.

[16] Бабкин А.В., Новосельцев А.С., Ладов С.В. Неустойчивость при динамическом схлопывании оболочек. *Физика горения и взрыва*, 2025, т. 61, № 2, с. 123–129. DOI 10.15372/FGV2023.9411. EDN WCOWZM.

[17] Qiang Z., Graham M.J. A numerical study of Richtmyer–Meshkov instability driven by cylindrical shocks. *Physics of Fluids*, 1998, vol. 974, no. 10. DOI: 10.1063/1.869624.

[18] Lopez Ortega A., Lombardini M., Barton P., et. al. Richtmyer–Meshkov instability for elastic–plastic solids in converging geometries. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 2015, vol. 76, pp. 291–324.

[19] Lopez Ortega A., Lombardini M., Pullin D., Meiron D. Numerical simulations of the Richtmyer–Meshkov instability in solid-vacuum interfaces using calibrated plasticity laws. *Phisical Review*, 2014, vol. 89 (3), art. no. 033018. DOI: 10.1103/PhysRevE.89.033018.

[20] Бабкин А.В., Колпаков В.И., Федоров С.В. и др. О возможностях «теплового» способа повышения пробития кумулятивных зарядов. *Оборонная техника*, 2000, № 1–2, с. 41–48.

[21] Бабкин А.В., Бондаренко П.А., Ладов С.В. и др. Пределы увеличения глубины пробития кумулятивного заряда при импульсном тепловом воздействии на его облицовку. *Физика горения и взрыва*, 2001, т. 37, № 6, с. 124–132.

[22] Уилкинс М. *Расчёт упругопластических течений. Вычислительные методы в гидродинамике*. Москва, Мир, 1967, с. 212–263.

[23] Новосельцев А.С., Бабкин А.В. Математическая модель схлопывания упругопластической оболочки с учётом возможного развития неустойчивости процесса. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2019, № 5(89), с. 1. DOI 10.18698/2308-6033-2019-5-1874. EDN BNTOCZ.

[24] Winslow A. *Numerical solution of the partial differential equations for coordinate system generation*. Berkeley, Lawrence Radiation Laboratory, 1966, 35 p.

[25] Thompson J.F., Wars A., Mastin C.W. *Numerical grid generation: foundations and applications*. Amsterdam, North-Holland, 1985, 466 p.

[26] Knupp P., Steinberg S. *Fundamentals of grid generation*. Boca Raton, CRC Press, 1993, 273 p.

[27] Weiler K., Atherton P. Hidden-surface removal using polygon area sorting. *ACM SIGGRAPH Computer Graphics*, 1977, vol. 11 (2), pp. 214–222.

Статья поступила в редакцию 18.08.2025

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Новосельцев А.С., Бабкин А.В., Ладов С.В. Математическое моделирование схлопывания осесимметричных металлических оболочек с учётом развития неустойчивости. *Математическое моделирование и численные методы*, 2025, № 4, с. 86–107.

Новосельцев Алексей Сергеевич — аспирант кафедры «Высокоточные летательные аппараты» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: novoseltsev.alexey@yandex.ru

Бабкин Александр Викторович — д-р техн. наук, чл.-кор. РАЕН, профессор кафедры «Высокоточные летательные аппараты» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: pc-os@bmstu.ru

Ладов Сергей Вячеславович — канд. техн. наук, чл.-кор. РАЕН, доцент кафедры «Высокоточные летательные аппараты» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: ladovsv@bmstu.ru

Mathematical simulation of the collapse of axisymmetric metallic shells considering the growth of instability

© A.S. Novoseltsev, A.V. Babkin, S.V. Ladov

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

The article considers the problem of the stability of the collapse of metallic axisymmetric shells (shaped-charge liners) under the action of detonation products. A mathematical formulation of the problem is presented, and a numerical solution method is described, based on the Lagrangian approach and Wilkins' finite-difference scheme with additional reconstruction of the computational grid. The influence of initial geometric perturbations, shell thickness, its physical and mechanical properties, and other parameters on the development of Rayleigh–Taylor and Richtmyer–Meshkov instabilities is demonstrated.

***Keywords**: collapse, instability, numerical simulation, shaped-charge liner*

REFERENCES

[1] Orlenko L.P. (Ed.). *Fizika vzryva* [Physics of Explosion]. In 2 vols., vol. 2. Moscow, Fizmatlit Publ., 2002, 656 p.

[2] Pai V.V., Titov V.M., Luk'yanov Ya.L., Plastinin A.V. Instability of a conical liner during shaped-charge jet formation. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 2019, vol. 55, no. 4, pp. 434-438.

[3] Baskakov V.D., Zarubina O.V., Karnaukhov K.A., Tarasov V.A. Mathematical modeling of the collision of plane jets of an ideal fluid. *Herald of Bauman Moscow State Technical University. Natural Sciences*, 2016, no. 2(65), pp. 79–90.

[4] Karnaukhov K.A., Baskakov V.D., Korenkov V.V., Zarubina O.V. Peculiarity of the shaped-charge liner collapse concerning the unevenness in its cross-section. *Journal of Physics: Conference Series*, 2017, vol. 894, no. 1, pp. 012–039.

[5] Andreev S.G., Soloviev V.S., Novitskii A.E., Shikunov N.V. Longitudinal–transverse instability of initiating shock waves. *Proc. V All-Union Conference on Detonation. Chernogolovka, IPC RAS*, 1991, pp. 330–334.

[6] Ivanov A.G., Ogorodnikov V.A., Karpenko G.Ya., et al. On the influence of shear strength on the development of instability during the deceleration of converging shells. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1994, vol. 35, no. 4, pp. 163–167.

[7] Drennov O.B., Mikhailov A.L., Ogorodnikov V.A. On the specification and evolution of local (periodic) perturbations in experiments on Rayleigh–Taylor instability in strength media. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2000, vol. 41, no. 2, pp. 171–176.

[8] Charakhch'yan A.A. Richtmyer–Meshkov instability at the interface of media under the passage of two consecutive shock waves. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2000, vol. 41, no. 1, pp. 28–37.

[9] Charakhch'yan A.A. On the stability of shaped jets arising under impulsive loading of conical targets. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1997, vol. 38, no. 3, pp. 9–13.

[10] Kolpakov V.I., Ladov S.V., Rubtsov A.A. *Matematicheskoe modelirovanie funktsionirovaniya kumulyativnykh zaryadov* [Mathematical Modeling of the Functioning of Shaped Charges]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 1998, 36 p. EDN ZTYKDN.

[11] Kolpakov V.I., Pletnyov S.L. *Tezisy dokladov IV Mezhdunarodnoj konferencii «Lavrent'evskie chteniya po matematike, mekhanike i fizike»* [Abstracts of reports of the IV International Conference "Laurentian Readings in Mathematics, Mechanics and Physics"]. Novosibirsk, 1995, 125 p.

[12] Ogorodnikov V.A., Ivanov A.G., Mikhailov A.L., et al. On particle ejection from the free surface of metals under shock-wave loading and methods for their diagnostics. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*, 1998, vol. 34, no. 3, pp. 103–107.

[13] Ogorodnikov V.A., Ivanov A.G., Kryukov N.I. Shock-wave dispersion of structural materials. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*, 1999, vol. 35, no. 5, pp. 122–126.

[14] Ogorodnikov V.A., Romanov F.V., Yerunov S.V., et al. Interaction of a metallic liner with concentrated elements and the transmission of perturbations through them. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*, 2008, vol. 44, no. 6, pp. 107–113.

[15] Nevmerzhitsky N.V., Raevsky V.A., Sotskov E.A., et al. Some features of particle ejection from the surface of a shock-loaded lead sample. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*, 2018, vol. 54, no. 5, pp. 82–89.

[16] Babkin A.V., Novoseltsev A.S., Ladov S.V. Instability during the dynamic collapse of shells. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*, 2025, vol. 61, no. 2, pp. 123–129. DOI: 10.15372/FGV2023.9411. EDN WCOWZM.

[17] Qiang Z., Graham M.J. A numerical study of Richtmyer–Meshkov instability driven by cylindrical shocks. *Physics of Fluids*, 1998, vol. 974, no. 10. DOI: 10.1063/1.869624.

[18] Lopez Ortega A., Lombardini M., Barton P., et al. Richtmyer–Meshkov instability for elastic–plastic solids in converging geometries. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 2015, vol. 76, pp. 291–324.

[19] Lopez Ortega A., Lombardini M., Pullin D., Meiron D. Numerical simulations of the Richtmyer–Meshkov instability in solid–vacuum interfaces using calibrated plasticity laws. *Physical Review E*, 2014, vol. 89(3), art. no. 033018. DOI: 10.1103/PhysRevE.89.033018.
[20] Babkin A.V., Kolpakov V.I., Fedorov S.V. and others. O vozmozhnostyah «teplovogo» sposoba povysheniya probitiya kumulyativnyh zaryadov [On the possibilities of the "thermal" method of increasing the penetration of shaped charges]. *Oboronnaya tekhnika* [Defense equipment], 2000, no. 1–2, pp. 41–48.
[21] Babkin A.V., Bondarenko P.A., Ladov S.V., et al. Limits of increasing the penetration depth of a shaped charge under pulsed thermal action on its liner. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*, 2001, vol. 37, no. 6, pp. 124–132.
[22] Wilkins M. Calculation of elastic–plastic flows. *Computational Methods in Hydrodynamics*. Moscow, Mir Publ., 1967, pp. 212–263.
[23] Novoseltsev A.S., Babkin A.V. Mathematical model of the collapse of an elastoplastic shell with allowance for the possible development of instability. *Engineering Journal: Science and Innovation*, 2019, no. 5(89), p. 1. DOI: 10.18698/2308-6033-2019-5-1874. EDN BNTOCZ.
[24] Winslow A. *Numerical solution of the partial differential equations for coordinate system generation*. Berkeley, Lawrence Radiation Laboratory, 1966, 35 p.
[25] Thompson J.F., Wars A., Mastin C.W. *Numerical Grid Generation: Foundations and Applications*. Amsterdam, North-Holland, 1985, 466 p.
[26] Knupp P., Steinberg S. *Fundamentals of Grid Generation*. Boca Raton, CRC Press, 1993, 273 p.
[27] Weiler K., Atherton P. Hidden-surface removal using polygon area sorting. *ACM SIGGRAPH Computer Graphics*, 1977, vol. 11(2), pp. 214–222.

Novoseltsev A.S., Postgraduate student, Department of High-Precision Airborne Devices, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: novoseltsev.alexey@yandex.ru

Babkin A.V., Dr Sc. (Eng.), Corresponding Member RANS, Professor, Department of High-Precision Airborne Devices, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: pc-os@bmstu.ru

Ladov S.V., Cand. Sc. (Eng.), Corresponding Member RANS, Associate Professor, Department of High-Precision Airborne Devices, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: ladovsv@bmstu.ru