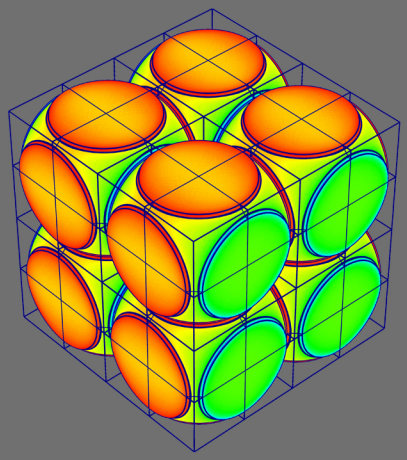
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Аттетков А.В., Котович А.В., Пилявская Е.В. Математическое моделирование температурного поля двухфазного пористого материала при ударно-волновом нагружении. Математическое моделирование и численные методы, 2025, № 4, с. 71–85.

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/390/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.216.58
14.03.2026 00:32:14

УДК 534.222.2+662.215.5 DOI: 10.18698/2309-3684-2025-4-7185

Математическое моделирование температурного поля двухфазного пористого материала при ударно-волновом нагружении

© А.В. Аттетков, А.В. Котович, Е.В. Пилявская

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Рассмотрена задача о распространении стационарной ударной волны в двухфазном пористом материале — несжимаемой вязкопластической среде, содержащей сферические поры с покрытием их поверхности (несжимаемая вязкая жидкость). Разработана иерархия упрощенных аналогов базовой математической модели процесса формирования температурного поля в ударно-сжатом пористом материале. Показано, что применение упрощенных аналогов базовой модели позволяет значительно сократить вычислительные затраты при проведении численного эксперимента. Определены условия, при удовлетворении которых упрощенные аналоги базовой математической модели позволяют с заданной точностью идентифицировать температурное поле двухфазного пористого материала при ударно-волновом нагружении.

Ключевые слова: *ударная волна, двухфазный пористый материал, температурное поле, математическое моделирование*

Введение. Исследование закономерностей поведения пористых материалов при ударно-волновых воздействиях — одно из наиболее развиваемых направлений физики экстремальных состояний вещества. Его возникновение связано с решением широкого круга задач как фундаментального, так и прикладного характера [1−9].

Вопросам разработки математических моделей и методов математического моделирования ударно-волновых процессов в пористых материалах посвящено большое количество работ [10−20]. Важное место в исследованиях занимает проблема ударно-волнового инициирования процессов взрывного разложения пористых энергетических материалов (ЭМ). Значительный интерес при этом представляет вязкопластическая модель горячих точек — локализованных зон динамического перегрева ударно-сжатого пористого ЭМ (см., например, работы [11−25] и обширную библиографию в них). Ее применение позволяет объяснить сложные закономерности, присущие ударно-волновой чувствительности пористых ЭМ.

Трудности, возникающие при математическом моделировании поля ударно-сжатого пористого материала, установлении специфического влияния на его топологические особенности мезоскопических (в масштабе поры) процессов тепловой диссипации, теплопереноса и межфазного теплообмена, хорошо известны [15, 26]. Они усугубля-

ются при возникновении расплавленных зон или зон разупрочненного материала (слой вязкой жидкости постоянной толщины [27]) в окрестности пластически затекаемых пор [28]. Возможный путь преодоления указанных трудностей связан с использованием разного рода допущений, позволяющих заменить исходную (базовую) математическую модель ее упрощенными аналогами с целью сокращения вычислительных затрат при проведении численного эксперимента. Обсуждению этого вопроса посвящены проведенные в данной работе исследования.

Постановка задачи и базовая математическая модель. Рассмотрим задачу о стационарной ударной волне (УВ), распространяющейся со скорость D в двухфазном пористом материале: несжимаемой вязкопластической среде (фаза «s») с постоянными коэффициентом вязкости η и пределом текучести Y, содержащем сферические поры одинакового радиуса (регулярная ячеистая система [29]; наличием газа в порах пренебрегаем), с покрытием их поверхности постоянной толщины (фаза «f» — несжимаемая вязкая среда с постоянным коэффициентом вязкости μ). Введем следующие предположения.

1. Характерная ширина фронта УВ много больше размера пор и расстояния между ними [13 – 15, 20].

2. Объемным содержанием фазы «f» в единице объема двухфазного пористого материала можно пренебречь.

3. На межфазной границе реализуются условия идеального теплового контакта [30], при этом покрытие не является термически тонким, т.е. для него не может быть реализована используемая в [25, 26] идея «сосредоточенная емкость».

С учетом принятых предположений и ранее полученных результатов [25] интегралы уравнений сохранения массы и импульса двухфазного пористого материала в системе координат, связанной с УВ, можно представить в следующем виде:

$$p - p_0 = \rho_s D^2 \frac{\alpha_0 - \alpha}{\alpha_0^2}; \;\; p_0 = \frac{2Y}{3} \ln \frac{\alpha_0}{\delta + \alpha_0 - 1}. \qquad (1)$$

индекс «0» соответствует параметрам состояния пористого материала перед фронтом УВ. При этом зависимости между среднеинтегральными и фазовыми значениями величин имеют вид:

$$p = \frac{(1-\delta)\, p_s + \delta p_f}{\alpha}; \;\; \rho = \frac{(1-\delta)\rho_s + \delta\rho_f}{\alpha} \approx \frac{\rho_s}{\alpha};$$

$$p_s = \langle p_s(r,t) \rangle = \frac{3}{b^3 - r_*^3} \int_{r_*}^{b} p_s(r,t)\, r^2 dr;$$

$$p_f = \left\langle p_f\left(r,t\right)\right\rangle = \frac{3}{r_*^3 - a^3}\int_a^{r_*} p_f\left(r,t\right) r^2 dr;$$

$$\alpha = \frac{b^3}{b^3 - a^3};\ \delta = \frac{r_*^3 - a^3}{b^3 - a^3}.$$

Здесь p — давление; ρ — плотность; α, δ — концентрационные симплексы; a — радиус поры; r_* — радиус границы фаз сферического объема характерного (представительного) элемента двухфазного пористого материала радиуса b.

Результирующее уравнение связи $g\left(p,\alpha\right)=0$, определяющее скачок начального состояния пористого материала во фронте УВ в (1), динамически неравновесно и имеет вид

$$p = p_d\left(\ddot{\alpha},\dot{\alpha},\alpha,\delta,\gamma\right) + p_V\left(\dot{\alpha},\alpha,\delta,\zeta\right) + p_Y\left(\alpha,\delta\right);$$

$$p_d\left(\ddot{\alpha},\dot{\alpha},\alpha,\delta,\gamma\right) = \frac{\rho_S a_0^2}{\left(\alpha_0 - 1\right)^{2/3}}\left\{-A\left(\alpha,\delta,\gamma\right)\frac{\ddot{\alpha}}{\alpha} + B\left(\alpha,\delta,\gamma\right)\frac{\dot{\alpha}^2}{6\alpha}\right\};$$

$$A\left(\alpha,\delta,\gamma\right) = A_1\left(\alpha,\delta\right) + \gamma A_2\left(\alpha,\delta\right);$$

$$A_1\left(\alpha,\delta\right) = \frac{1-\delta}{3\left(\delta+\alpha-1\right)^{1/3}} + \frac{\left(\delta+\alpha-1\right)^{2/3} - \alpha^{2/3}}{2};$$

$$A_2\left(\alpha,\delta\right) = \frac{1}{3\left(\alpha-1\right)^{1/3}} + \frac{\left(\alpha-1\right)^{2/3} - \left(\delta+\alpha-1\right)^{2/3}}{2} - \frac{1-\delta}{3\left(\delta+\alpha-1\right)^{1/3}};$$

$$B\left(\alpha,\delta,\gamma\right) = B_1\left(\alpha,\delta\right) + \gamma B_2\left(\alpha,\delta\right); \qquad (2)$$

$$B_1\left(\alpha,\delta\right) = \frac{1}{\alpha^{1/3}} - \frac{1}{\left(\delta+\alpha-1\right)^{1/3}} + \frac{1-\delta}{3\left(\delta+\alpha-1\right)^{4/3}};$$

$$B_2\left(\alpha,\delta\right) = \frac{1}{\left(\delta+\alpha-1\right)^{1/3}} - \frac{1}{\left(\alpha-1\right)^{1/3}} + \frac{1}{3\left(\alpha-1\right)^{4/3}} - \frac{1-\delta}{3\left(\delta+\alpha-1\right)^{4/3}};$$

$$p_v\left(\dot{\alpha},\alpha,\delta,\zeta\right) = -\frac{4\eta\dot{\alpha}}{3\alpha\left(\alpha-1\right)}\frac{\left(\alpha-1\right)\left(1-\delta\right)+\zeta\alpha\delta}{\delta+\alpha-1};$$

$$p_Y\left(\alpha,\delta\right) = \frac{2Y}{3}\ln\frac{\alpha}{\delta+\alpha-1},$$

где $\gamma = \dfrac{\rho_f}{\rho_s}$; $\zeta = \dfrac{\mu}{\eta}$ — симплексы подобия физических и вязких свойств материалов фаз пористого материала; точкой обозначена производная по переменной t.

Динамические слагаемые $p_d(\ddot{\alpha}, \dot{\alpha}, \alpha, \delta, \gamma)$ и $p_V(\dot{\alpha}, \alpha, \delta, \zeta)$ в (2) соответственно отражают инерционные и вязкие эффекты при пластическом затекании пор, слагаемое $p_Y(\alpha, \delta)$ характеризует статическое сопротивление материала фазы « s ».

Задача идентификации температурного поля, определяемого базовой математической моделью процесса теплопереноса в двухфазном пористом материале, представима в виде смешанной задачи для системы двух уравнений в частных производных второго порядка параболического типа:

$$
\begin{gathered}
c_f \rho_f \left[\frac{\partial T(r,t)}{\partial t} + v_r(r,t) \frac{\partial T(r,t)}{\partial r} \right] = \\
= \frac{\lambda_f}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial T(r,t)}{\partial r} + \Phi_f(r,t), \ a(t) < r < r_*(t), \ t > 0; \\
c_s \rho_s \left[\frac{\partial T(r,t)}{\partial t} + v_r(r,t) \frac{\partial T(r,t)}{\partial r} \right] = \\
= \frac{\lambda_s}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial T(r,t)}{\partial r} + \Phi_s(r,t), \ r_*(t) < r < b(t), \ t > 0; \\
a(t)\big|_{t=0} = a_0; \quad r_*(t)\big|_{t=0} = r_{*0}; \quad b(t)\big|_{t=0} = b_0; \\
v_r(r,t)\big|_{t=0} = 0; \ T(r,t)\big|_{t=0} = T_0; \\
\left.\frac{\partial T(r,t)}{\partial r}\right|_{r=a(t)} = 0 = \left.\frac{\partial T(r,t)}{\partial r}\right|_{r=b(t)}; \\
T(r,t)\big|_{t=r_*(t)-0} = T(r,t)\big|_{t=r_*(t)+0}; \\
\lambda_f \left.\frac{\partial T(r,t)}{\partial r}\right|_{r=r_*(t)-0} = \lambda_s \left.\frac{\partial T(r,t)}{\partial r}\right|_{r=r_*(t)+0},
\end{gathered}
\tag{3}
$$

где

$$
v_r(r,t) = \dot{a}(t) \left[\frac{a(t)}{r} \right]^2 = \frac{a_0^3 \dot{\alpha}(t)}{3(\alpha_0 - 1) r^2}; \quad r^3 - r_0^3 = a^3(t) - a_0^3;
$$

$$r_*(t)=\left[a^3(t)+\frac{a_0^3\delta}{\alpha_0-1}\right]^{1/3};\quad b(t)=\left[a^3(t)+\frac{a_0^3}{\alpha_0-1}\right]^{1/3};$$

c, λ — удельная массовая теплоемкость и теплопроводность соответственно; $\dot{a}(t)$ — скорость движения границы поры; $\dot{\alpha}(t)$ — скорость деформации двухфазного пористого материала во фронте УВ.

Функции $\Phi_f(r,t)$ и $\Phi_s(r,t)$, где

$$\Phi(r,t)=\sigma_i\dot{\varepsilon}_i$$

а σ_i — интенсивность напряжений, $\dot{\varepsilon}_i$ — интенсивность скоростей деформаций, определяют объемную плотность мощности внутренних источников теплоты фаз « f » и « s » соответственно и имеют вид:

$$\Phi_f(r,t)=12\mu\left[\frac{v_r(r,t)}{r}\right]^2;$$
$$\Phi_s(r,t)=-2Y\frac{v_r(r,t)}{r}+12\eta\left[\frac{v_r(r,t)}{r}\right]^2. \tag{4}$$

Иерархия упрощенных аналогов базовой математической модели. Для достижения основной цели исследований введем в рассмотрение среднеинтегральную по толщине покрытия температуру

$$\langle T(t)\rangle=\frac{3}{r_*^3(t)-a^3(t)}\int_{a(t)}^{r_*(t)}T(r,t)r^2dr \tag{5}$$

и воспользуемся следующими допущениями:

- температура покрытия на границах равна его среднеинтгральной температуре, т.е.

$$T(a(t)+0,t)=T(r_*(t)-0,t)=\langle T(t)\rangle,\ t>0;$$

- тепловое взаимодействие на подвижной границе раздела фаз может быть описано законом Ньютона-Рихмана

$$\left.\frac{\partial T(r,t)}{\partial r}\right|_{r=r_*(t)+0}=h\left[T(r,t)\big|_{r=r_*(t)+0}-\langle T(t)\rangle\right]$$

с неизвестным параметром h, являющимся аналогом относительного коэффициента контактного теплообмена и подлежащим идентификации.

Заметим, что принятие сформулированной гипотезы о «механизме» теплообмена на межфазной границе фактически означает принятие гипотезы о допустимости реализации идеи «уточненная модель сосредоточенной емкости» [31].

Проинтегрировав с учетом (4) левую и правую части первого уравнения в (3) с весом $3\left[r_*^3(t)-a^3(t)\right]^{-1}$ по переменной r, воспользовавшись равенством (5) и принятыми допущениями, а также сформулированными в (3) краевым условием при $r=a(t)$ и условиями сопряжения на межфазной границе $r=r_*(t)$, представим данное уравнение в виде:

$$c_f\rho_f\frac{d\langle T(t)\rangle}{dt}=\frac{3\lambda_s r_*^2(t)}{r_*^3(t)-a^3(t)}\left.\frac{\partial T(r,t)}{\partial r}\right|_{r=r_*(t)+0}+12\mu\frac{a(t)\dot{a}^2(t)}{r_*^3(t)}. \quad (6)$$

При этом справедливы равенства:

$$\begin{gathered}\langle T(t)\rangle=\left.\left[T(r,t)-h^{-1}\frac{\partial T(r,t)}{\partial r}\right]\right|_{r=r_*(t)+0};\\ \frac{d\langle T(t)\rangle}{dt}=\left.\left[\frac{\partial T(r,t)}{\partial t}-h^{-1}\frac{\partial^2 T(r,t)}{\partial t\partial r}\right]\right|_{r=r_*(t)+0}.\end{gathered} \quad (7)$$

Учитывая (6) и (7), трансформируем исходную (базовую) математическую модель (3) к ее упрощенному аналогу — «уточненной модели сосредоточенной емкости»:

$$\begin{gathered}c_s\rho_s\left[\frac{\partial T(r,t)}{\partial t}+v_r(r,t)\frac{\partial T(r,t)}{\partial r}\right]=\\ =\frac{\lambda_s}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial T(r,t)}{\partial r}+\Phi_s(r,t),\ r_*(t)<r<b(t),\ t>0;\\ a(t)\big|_{t=0}=a_0;\quad r_*(t)\big|_{t=0}=r_{*0};\quad b(t)\big|_{t=0}=b_0;\\ v_r(r,t)\big|_{t=0}=0;\ T(r,t)\big|_{t=0}=T_0;\end{gathered} \quad (8)$$

$$\lambda_s\left.\frac{\partial T(r,t)}{\partial r}\right|_{r=r_*(t)}=\frac{r_*^3(t)-a^3(t)}{3r_*^2(t)}\left\{c_f\rho_f\left[\left.\frac{\partial T(r,t)}{\partial t}\right|_{r=r_*(t)}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-h^{-1}\left.\frac{\partial^2 T(r,t)}{\partial t\partial r}\right|_{r=r_*(t)}\right]-12\mu\frac{a(t)\dot{a}^2(t)}{r_*^3(t)}\right\};$$

$$\left.\frac{\partial T(r,t)}{\partial r}\right|_{r=b(t)}=0,$$

где функция $\Phi_s(r,t)$ конретизирована в (4).

Относительно параметра h могут быть высказаны различные соображения. В частности, физически обоснованные соображения его идентификации можно ассоциировать с решением задачи минимаксной оптимизации — задачи минимизации максимально возможного отклонения температуры подвижной границы раздела фаз $r=r_*(t)$, определяемой математической моделью (8), от ее истинного значения, найденного с применением «точной модели» (3), (4).

Дальнейшее упрощение математической модели (8) связано с допущением, что $h\to+\infty$, т.е. предположением равенства температуры границ покрытия не только его среднеинтегральной температуре, но и температуре подвижной границы раздела фаз:

$$T\left(a(t)+0,t\right)=T\left(r_*(t)-0,t\right)=\left\langle T(t)\right\rangle=T\left(r_*(t)+0,t\right),\ t>0.$$

Реализуемая математическая модель — модель «сосредоточенная емкость» [25, 26] — имеет вид:

$$\begin{gathered}
c_s\rho_s\left[\frac{\partial T(r,t)}{\partial t}+v_r(r,t)\frac{\partial T(r,t)}{\partial r}\right]=\\
=\frac{\lambda_s}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial T(r,t)}{\partial r}+\Phi_s(r,t),\ r_*(t)<r<b(t),\ t>0;\\
a(t)\big|_{t=0}=a_0;\quad r_*(t)\big|_{t=0}=r_{*0};\quad b(t)\big|_{t=0}=b_0;\\
v_r(r,t)\big|_{t=0}=0;\ \ T(r,t)\big|_{t=0}=T_0;
\end{gathered}\tag{9}$$

$$\lambda_s\left.\frac{\partial T(r,t)}{\partial r}\right|_{r=r_*(t)}=\frac{r_*^3(t)-a^3(t)}{3r_*^2(t)}\left\{c_f\rho_f\left.\frac{\partial T(r,t)}{\partial t}\right|_{r=r_*(t)}-12\mu\frac{a(t)\dot{a}^2(t)}{r_*^3(t)}\right\};$$

$$\left.\frac{\partial T(r,t)}{\partial r}\right|_{r=b(t)}=0.$$

Данную математическую модель можно ассоциировать с принятием гипотезы, что покрытие является термически тонким [30]. Наличие такого покрытия на поверхности пластически затекаемых пор фактически учтено специфическим краевым условием на подвижной границе раздела фаз $r=r_*(t)$, явно содержащим производную температуры по времени.

Базовую математическую модель (3), (4) и ее упрощенные аналоги (8), (9) можно рассматривать как иерархию моделей процесса формирования температурного поля в двухфазном пористом материале при ударно-волновом нагружении. При этом каждый из упрощенных аналогов базовой модели представляет собой смешанную задачу для уравнения в частных производных второго порядка параболического типа. Ее специфику наглядно иллюстрирует нестандартное краевое условие на межфазной границе $r = r_*(t)$. Применение данных упрощенных аналогов базовой модели позволяет не только упростить параметрический анализ изучаемого процесса, но и значительно сократить вычислительные затраты при проведении численного эксперимента.

Результаты численных расчетов и обсуждение. Для удобства дальнейших рассуждений введем безразмерные переменные и параметры:

$$\tau_\eta = \frac{p_e t}{\eta},\ \rho = \frac{r}{a_0},\ R_* = \frac{r_*}{a_0},\ \theta = \frac{c_s \rho_s}{p_e}\left(T - T_0\right),\ \beta = \frac{Y}{p_e},$$

$$\mathrm{Re} = \frac{a_0\sqrt{p_e \rho_s}}{\eta},\ \mathrm{Pr} = \frac{c_s \eta}{\lambda_s},\ \gamma = \frac{\rho_f}{\rho_s},\ \zeta = \frac{\mu}{\eta},\ \Lambda = \frac{\lambda_f}{\lambda_s},\ \varepsilon = \frac{c_f \rho_f}{c_s \rho_s}.$$

где p_e — амплитуда УВ; Re — число Рейнольца (критерий динамического подобия), Pr — число Прандтля (критерий диффузионных взаимодействий).

Численный анализ разработанной иерархии математических моделей, параметрический анализ формируемого температурного поля в ударно-сжатом пористом материале проводился путем перехода в подвижную систему координат с применением неявной конечно-разностной схемы.

Идентифицируем условия, при удовлетворении которых каждый из упрощенных аналогов (8) и (9) базовой математической модели (3), (4) позволяет находить функцию $\theta\left(\rho, \tau_\eta\right)$ при $\rho \ge R_*,\ \tau_\eta \ge 0$ с заданной точностью $\tilde{\varepsilon} > 0$. Использование любой из рассматриваемых моделей определяет температурное поле ударно-сжатого пористого материала значением вектора

$$\Pi = \left[\alpha_0,\ \delta,\ \gamma,\ \varepsilon,\ \zeta,\ \Lambda,\ \beta,\ \mathrm{Re},\ \mathrm{Pr}\right]^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^9,$$

для каждого из которых в любой момент времени $\tau_\eta \ge 0$ на подвижной границе раздела фаз $\rho = R_*\left(\tau_\eta\right)$ отклонение безразмерной температуры $\theta_k\left(R_*,\ \tau_\eta\right),\ k \in \{1, 2\}$ от ее истинного значения $\theta_0\left(R_*,\ \tau_\eta\right)$,

определяемого базовой моделью, не превосходит заданной величины $\tilde{\varepsilon}$.

Если ввести в рассмотрение допустимые множества $\Omega_{\tilde{\varepsilon}}^{k}$, $k \in \{1,2\}$, где $k = 1$ соответствует «уточненной модели сосредоточенной емкости», $k = 2$ — модели «сосредоточенная емкость», то можно утверждать, что параметрическая идентификация этих множеств эквивалентна факту установления условий применимости упрощенных аналогов базовой («точной») модели. При этом $\Omega_{\tilde{\varepsilon}}^{2} \subset \Omega_{\tilde{\varepsilon}}^{1}$, поскольку каждый этап упрощения «точной» модели приводит к возрастанию погрешности в определении температурного поля. При этом абсолютная погрешность

$$\Delta_k\left(\tau_\eta\right) = \left|\theta_k\left(R_* + 0,\ \tau_\eta\right) - \theta_0\left(R_* + 0,\ \tau_\eta\right)\right|,\ k \in \{1,2\}, \tag{10}$$

достигает максимума при некотором фиксированном значении $\tau_\eta \in (0, +\infty)$.

Если ввести в рассмотрение функцию

$$E_k^*(\Pi) = \max_{\tau_\eta \geq 0} E_k\left(\Pi, \tau_\eta\right) = \max_{\tau_\eta \geq 0}\left|\theta_k\left(R_* + 0,\ \tau_\eta\right) - \theta_{k-1}\left(R_* + 0,\ \tau_\eta\right)\right|, \tag{11}$$

которая при каждом фиксированном значении $k \in \{1,2\}$ определяется как максимально возможная погрешность в определении температурного поля, обусловленная лишь k-ым этапом упрощения «точной» модели, то можно считать, что

$$\Omega_{\tilde{\varepsilon}}^{1} = \left\{\Pi \in \mathbb{R}^9 \middle| E_1^*(\Pi) < \tilde{\varepsilon}\right\}.$$

При этом согласно равенствам (10), (11), справедливы неравенства

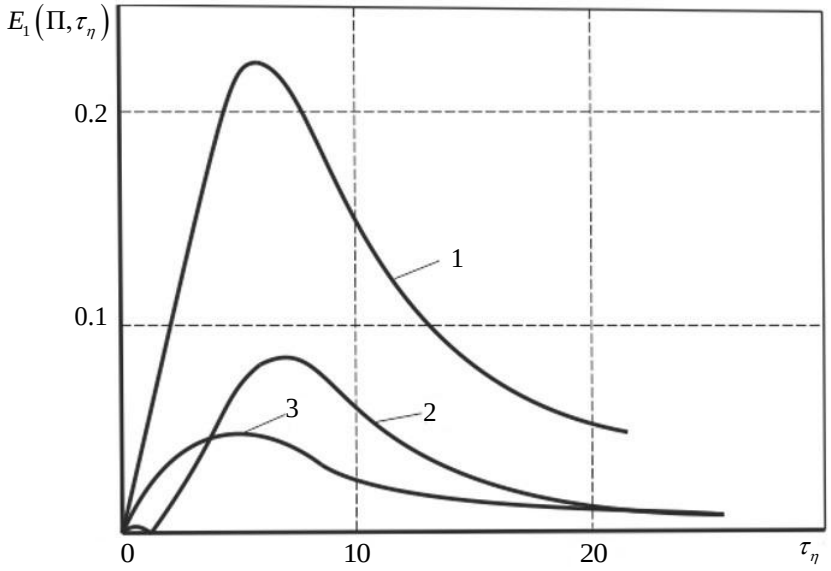
$$\Delta_2\left(\tau_\eta\right) \leq \left|\theta_2\left(R_* + 0,\ \tau_\eta\right) - \theta_1\left(R_* + 0,\ \tau_\eta\right)\right| +$$
$$+ \left|\theta_1\left(R_* + 0,\ \tau_\eta\right) - \theta_0\left(R_* + 0,\ \tau_\eta\right)\right| \leq E_2^*(\Pi) + E_1^*(\Pi),$$

поэтому можно считать, что

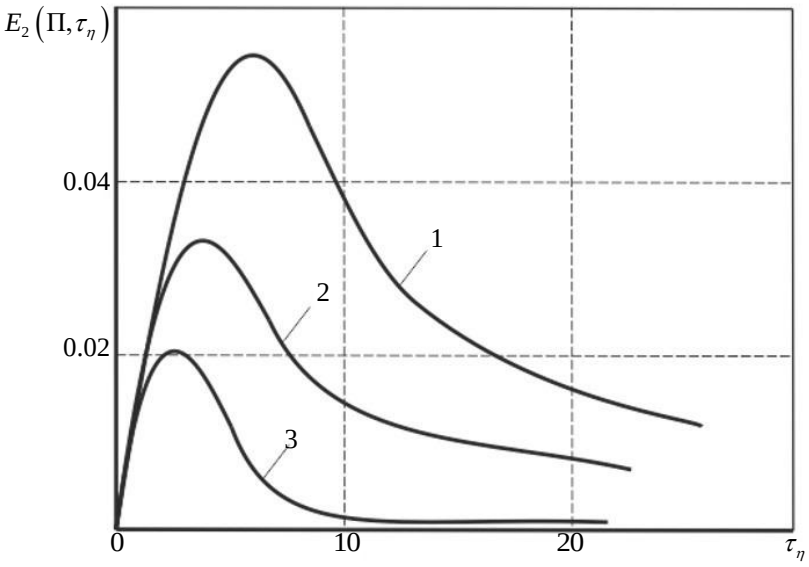
$$\Omega_{\tilde{\varepsilon}}^{2} = \left\{\Pi \in \mathbb{R}^9 \middle| E_1^*(\Pi) + E_2^*(\Pi) < \tilde{\varepsilon}\right\}.$$

Таким образом, задача идентификации допустимых множеств $\Omega_{\tilde{\varepsilon}}^{k}$, $k \in \{1,2\}$ упрощенных аналогов базовой математической модели сводится к задаче нахождения функций $E_k^*(\Pi)$. Общие свойства динамики погрешностей в определение температурного поля при

$h^* = a_0 h = 10^2$ и $\Pi = \left[1.11,\ \delta,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 0.1,\ 0.1,\ 10^4\right]^{\mathrm{T}}$ отражают результаты вычислительных экспериментов, частично представленных на рис. 1.



а)



б)

Рис. 1. График функций $E_k\left(\Pi,\ \tau_\eta\right),\ k \in \{1, 2\}$ (а) и б)),
при различных значениях концентрационного симплекса δ :
$1 - 10^{-2}$, $2 - 5 \cdot 10^{-2}$, $3 - 10^{-3}$

Заметим, что при $h^* = +\infty$ $\Omega^1_{\tilde{\varepsilon}} \equiv \Omega^2_{\tilde{\varepsilon}}$, так как в рассматриваемой ситуации $E_2^*(\Pi) = 0$.

Заключение. Рассмотрена задача о распространении стационарной ударной волны в двухфазном пористом материале — несжимаемой вязкопластической среде, содержащей сферические поры с покрытием их поверхности постоянной толщины. Предложена и теоретически обоснована иерархия математических моделей, реализуемых при численном анализе мезоскопических (в масштабе поры) процессов тепловой диссипации и теплопереноса в ударно-сжатом пористом материале. Идентифицированы условия, удовлетворение которых при применении упрощенных аналогов базовой модели позволяет значительно сократить вычислительные затраты численного анализа формируемого температурного поля.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Альтшулер Л.В. Применение ударных волн в физике высоких давлений. *Успехи физических наук*, 1965, т. 85, № 2, с. 197−258.

[2] Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П. *Физика ударных волн и высотемпературных гидродинамических явлений*. Москва, Наука, 1966, 686 с.

[3] Херманн В. Определяющие уравнения уплотняющихся пористых материалов. *Проблемы теории пластичности. Сборник переводов*, 1976, вып. 7, с. 178−216.

[4] Николаевский В.Н. *Механика пористых и трещиноватых сред*. Москва, Недра, 1984, 232 с.

[5] Нестеренко В.Ф. *Импульсное нагружение гетерогенных материалов*. Новосибирск, Наука, 1992, 197 с.

[6] Киселев С.П., Руев А.П., Трунев А.П., Фомин В.М., Шавалиев М.Ш. *Ударно-волновые процессы в двухкомпонентных и двухфазных средах*. Новосибирск, Наука, 1992, 261 с.

[7] Фортов В.Е., Альтшулер Л.В., Трунин Р.Ф., Фунтикова А.И. *Ударные волны и экстремальные состояния вещества*. Москва, Наука, 2000, 425 с.

[8] Орленко Л.П. *Физика взрыва. В 2 т. Т. 1.* Москва, Физматлит, 2002, 832 с.

[9] Канель Г.И., Фортов В.Е., Разоренов С.В. Ударные волны в физике конденсированного состояния. *Успехи физических наук*, 2007, т. 177, № 8, с. 809−831.

[10] Carroll M.M., Holt A.C. Static and dynamic pore-collapse relations for ductile porous materials. *Journal of Applied Physics*, 1972, vol. 43, iss. 4, pp. 1626 −1636.

[11] Butcher B.M., Carroll M.M., Holt A.C. Shock-wave compaction of porous aluminum. *Journal of Applied Physics*, 1974, vol. 45, iss. 9, pp. 3864 −3875.

[12] Cowin S.C. Thermodynamics model for porous materials with vacuous pores. *Journal of Applied Physics*, 1972, vol. 43, iss. 6, pp. 2495 −2497.

[13] Дунин С.З., Сурков В.В. Динамика закрытия пор во фронте ударной волны. *Прикладная математика и механика*, 1979, т. 43, вып. 3, с. 511−518.

[14] Дунин С.З., Сурков В.В. Эффекты диссипации энергии и влияние плавления на ударное сжатие пористых тел. *Журнал прикладной механики и технической физики*, 1982, № 1, с. 131−142.

[15] Аттетков А.В., Власова Л.Н., Селиванов В.В., Соловьев В.С. Влияние неравновесного разогрева на поведение пористого вещества при ударном сжатии. *Журнал прикладной механики и технической физики*, 1984, № 6, с. 120−127.

[16] Carroll M.M., Kim R.N., Nesterenko V.F. The effect of temperature on viscoplactic pore collapse. *Journal of Applied Physics*, 1986, vol. 59, iss. 6, pp. 1962 −1967.

[17] Attetkov A.V., Solov'ev V.S. Heterogeneous explosive decomposition in a weak shock wave. *Combustion, Explosion and Shock Waves*, 1987, vol. 23, iss. 4, pp. 482−491.

[18] Киселев С.П., Фомин В.М. О модели пористого материала с учетом пластической зоны, возникающей в окрестности поры. *Прикладная механика и техническая физика*, 1993, т. 34, № 6, с. 125−133.

[19] Садырин А.И. Уточненная модель пластического деформирования пористой среды. *Химическая физика*, 1995, т. 14, № 2−3, с. 136−142.

[20] Аттетков А.В., Волков И.К., Пилявская Е.В. Специфические особенности процесса распространения ударной волны в двухфазном пористом материале. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2013, № 2, с. 112−121.

[21] Хасаинов Б.А., Аттетков А.В., Борисов А.А. Ударно-волновое инициирование пористых энергетических материалов и вязкопластическая модель горячих точек. *Химическая физика*, 1996, т. 15, № 7, с. 53−125.

[22] Bonnet D.L., Butler P.B. Hot-spot ignition of condensed phase energetic materials. *Jornal of Propulsion and Power*, 1996, vol. 12, no. 4, pp. 680−690.

[23] Khasainov B.A., Ermolaev B.S., Presles H.-M., Vidal P. On the effect of grain size on shock sensitivity of heterogeneous high explosives. *Shock Waves*, 1997, vol. 7, no. 2, pp. 89−105.

[24] Yang K., Dong L., Wu Ya. Viscous shear flow and heating of impact-extruded composite energetic materials. *International Journal of Mechanical Scinces*, 2023, vol. 258, no. 3, art. 108588.

[25] Аттетков А.В., Котович А.В., Пилявская Е.В. Вязкопластическая модель горячих точек в двухфазном пористом материале при ударно-волновом нагружении. *Физика горения и взрыва*, 2025, т. 61, № 3, с. 89 −99.

[26] Attetkov A.V., Golovina T.V., Ermolaev B.S. Mathematical simulation of mesoscopic processes of heat dissipation and heat transfer in two-phase porous material subjected to shock compression. *Journal of Heat Transfer Research*, 2008, vol. 39, no. 6, pp. 479−487.

[27] Киселев С.П., Киселев В.П. О механизме сверхглубокого проникания частиц в металлическую преграду. *Прикладная механика и техническая физика*, 2000, т. 41, № 2, с. 37−46.

[28] Аттетков А.В., Котович А.В., Пилявская Е.В. Математическое моделирование температурного поля при фазовых превращениях в ударно-сжатом пористом материале. *Математическое моделирование и численные методы*, 2025, № 2, с. 3−18.

[29] Нигматулин Р.И. *Динамика многофазных сред. Ч. 1*. Москва, Наука, 1987, 464 с.

[30] Зарубин В.С., *Кувыркин* Г.Н. *Математические модели механики и электродинамики сплошной среды*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008, 512 с.

[31] Пудовкин М.А., Волков И.К. *Краевые задачи математической теории теплопроводности в приложении к расчетам температурных полей в нефтяных пластах при заводнении*. Казань, Изд-во Казанского ун-та, 1978, 188 с.

Статья поступила в редакцию 07.10.2025

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:
Аттетков А.В., Котович А.В., Пилявская Е.В. Математическое моделирование температурного поля двухфазного пористого материала при ударно-волновом нагружении. *Математическое моделирование и численные методы*, 2025, № 4, с. 71–85.

Аттетков Александр Владимирович — к.т.н., доцент, доцент кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: attetkov@bmstu.ru

Котович Александр Валерианович — к.т.н., доцент, доцент кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: kkot@bmstu.ru

Пилявская Елена Владимировна — к.ф.-м.н., ассистент кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: e.pilyavskaya@mail.ru

Mathematical modeling of the temperature field of a two-phase porous material under shock-wave loading

© A.V. Attetkov, A.V. Kotovich, E.V. Pilyavskaya

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

This paper is considered the problem of stationary shock wave propagation in a two-phase porous material — an incompressible viscoplastic medium containing spherical pores with a surface coating (an incompressible viscous fluid). A hierarchy of simplified analogs of the basic mathematical model for temperature field formation in a shock-compressed porous material is developed. It is shown that the use of simplified analogs of the basic model significantly reduces computational costs during numerical experiments. Conditions are determined under which, if satisfied, the simplified analogs of the basic mathematical model enable the temperature field of a two-phase porous material to be accurately identified under shock-wave loading.

Keywords*: shock wave, three-phase porous material, interphase heat exchange, melting, temperature field*

REFERENCES

[1] Al'tshuler L.V. Application of shock waves in high pressure physics. *Physics-Uspekhi*, 1965, vol. 85, no. 2, pp. 197−258.

[2] Zeldovich Ya.B., Raiser Yu.P. *Fizika udarnyh voln i vysotemperaturnyh gidrodinamicheskih yavlenij* [Physics of shock waves and high-temperature hydrodynamic phenomena]. Moscow, Nauka Publ., 1966, 686 p.

[3] Hermann V. Opredelyayushchie uravneniya uplotnyayushchihsya poristyh materialov [Constitutive equations of compacted porous materials]. *Problemy teorii plastichnosti. Sbornik perevodov* [Problems of the theory of plasticity. Collection of translations], 1976, vol.7, pp.178−216.

[4] Nikolaevskij V.N. *Mekhanika poristyh i treshchinovatyh sred* [Mechanics of porous and fractured media]. Moscow, Nedra Publ., 1984, 232 p.

[5] Nesterenko V.F. *Impul'snoe nagruzhenie geterogennyh materialov* [Pulse loading of heterogeneous materials]. Novosibirsk, Nauka Publ., 1992, 197 p.

[6] Kiselev S.P., Ruev A.P., Trunev A.P., Fomin V.M., Shavaliev M.Sh. *Udarno-volnovye processy v dvuhkomponentnyh i dvuhfaznyh sredah* [Shock-wave processes in two-component and two-phase media]. Novosibirsk, Nauka Publ., 1992, 261 p.

[7] Fortov V.E., Al'tshuler L.V., Trunin R.F., Funtikova A.I. *Udarnye volny i ekstremal'nye sostoyaniya veshchestva* [Shock waves and extreme states of matter].Moscow, Nauka Publ., 2000, 425 p.

[8] Orlenko L.P. *Fizika vzryva. V 2 tomah. T. 1* [Physics of explosion. In 2 volumes. Volume 1]. Moscow, FIZMATLIT, 2002, 832 p.

[9] Kanel' G.I., Fortov V.E., Razorenov S.V. Shock waves in condensed-state physics. *Physics-Uspekhi*, 2007, vol. 50, no. 8, pp. 771−791.

[10] Carroll M.M., Holt A.C. Static and dynamic pore-collapse relations for ductile porous materials. *Journal of Applied Physics*, 1972, vol. 43, iss. 4, pp. 1626 −1636.

[11] Butcher B.M., Carroll M.M., Holt A.C. Shock-wave compaction of porous aluminum. *Journal of Applied Physics*, 1974, vol. 45, iss. 9, pp. 3864 −3875.

[12] Cowin S.C. Thermodynamics model for porous materials with vacuous pores. *Journal of Applied Physics*, 1972, vol. 43, iss. 6, pp. 2495 −2497.

[13] Dunin S.Z., Surkov V.V. Dynamics of the closing of pores at the shock wave front. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1979, vol. 43, no. 3, pp. 550–558.

[14] Dunin S.Z., Surkov V.V. Effekty dissipacii energii i vliyanie plavle-niya na udarnoe szhatie poristyh tel [Effects of energy dissipation and the influence of melting on shock compression of porous bodies]. *Journal of Applied Mechanics and Technical*, 1982, no. 1, pp. 131−142.

[15] Attetkov A.V., Vlasova L.N., Selivanov V.V., Solov'ev V.S. Vliyanie neravnovesnogo razogreva na povedenie poristogo veshchestva pri udarnom szhatii [The influence of nonequilibrium heating on the behavior of a porous substance under shock compression*]. Journal of Applied Mechanics and Technical*, 1984, no. 6, pp.120−127.

[16] Carroll M.M., Kim R.N., Nesterenko V.F. The effect of temperature on viscoplactic pore collapse. *Journal of Applied Physics*, 1986, vol. 59, iss. 6, pp. 1962 −1967.

[17] Attetkov A.V., Solov'ev V.S. Heterogeneous explosive decomposition in a weak shock wave. *Combustion, Explosion and Shock Waves*, 1987, vol. 23, iss. 4, pp. 482−491.

[18] Kiselev S.P., Fomin V.M. O modeli poristogo materiala s uchetom plastich-eskoj zony, voznikayushchej v okrestnosti pory [On the model of a porous material taking into account the plastic zone that appears in the vicinity of the pore]. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physic*, 1993, vol. 34, no. 6, pp. 125−133.

[19] Sadyrin A.I. Utochnennaya model' plasticheskogo deformirovaniya poristoj sredy [Refined model of plastic deformation of a porous medium]. *Soviet Journal of Chemical Physics*, 1995, vol. 14, no. 2−3, pp. 136−142.

[20] Attetkov A.V., Volkov I.K., Pilyavskaya E.V. Specific features of the process of shock wave propagation in a two-phase porous material. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Natural Science*, 2013, no. 2, pp. 112−121.

[21] Khasainov B.A., Attetkov A.V., Borisov A.A. Shock-wave initiation of porous energetic materials and viscoplastic model of hotspots. *Khimicheskaya fizika* [Russian Journal of Physical Chemistry], 1996, vol. 15, no. 7, pp. 53–125.

[22] Bonnet D.L., Butler P.B. Hot-spot ignition of condensed phase energetic materials. *Journal of Propulsion and Power*, 1996, vol. 12, no. 4, pp. 680−690.

[23] Khasainov B.A., Ermolaev B.S., Presles H.-M., Vidal P. On the effect of grain size on shock sensitivity of heterogeneous high explosives. *Shock Waves*, 1997, vol. 7, no. 2, pp. 89−105.

[24] Yang K., Dong L., Wu Ya. Viscous shear flow and heating of impact-extruded composite energetic materials. *International Journal of Mechanical Scinces*, 2023, vol. 258, no. 3, art. 108588.

[25] Attetkov A.V., Kotovich A.V., Pilyavskaya E.V. Viscoplastic model of hot spots in a two-phase porous material under shock-wave loading. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*, 2025, vol. 61, no. 3, pp. 89 −99.

[26] Attetkov A.V., Golovina T.V., Ermolaev B.S. Mathematical simulation of mesoscopic processes of heat dissipation and heat transfer in two-phase porous material subjected to shock compression. *Journal of Heat Transfer Research*, 2008, vol. 39, no. 6, pp. 479−487.

[27] Kiselev S.P., Kiselev V.P. O mekhanizme sverhglubokogo pronikaniya chastic v metallicheskuyu pregradu [On the mechanism of ultra-deep penetration of particles into a metal barrier]. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2000, vol. 41, no. 2, pp. 37−46.

[28] Attetkov A.V., Kotovich A.V., Pilyavskaya E.V. Mathematical modeling of temperature field under the phase transformation in a shock-compressed porouse material. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2025, vol. 46, no. 2, pp. 3−18.

[29] Nigmatulin R.I. *Dinamika mnogofaznyh sred. CH. 1.* [Dynamics of multiphase media. Part 1.]. Moscow, Nauka Publ., 1987, 464 p.

[30] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. *Matematicheskie modeli mekhaniki i elektrodinamiki sploshnoj sredy* [Mathematical models of mechanics and electrodynamics of a continuous medium]. Moscow, BMSTU Publ., 2008, 512 p.

[31] Pudovkin M.A., Volkov I.K. *Kraevye zadachi matematicheskoj teorii teploprovodnosti v prilozhenii k raschetam temperaturnyh polej v neftyanyh plastah pri zavodnenii* [Boundary value problems of the mathematical theory of thermal conductivity as applied to calculations of temperature fields in oil reservoirs during waterflooding]. Kazan, Kazan University Press, 1978, 188 p.

Attetkov A.V., Cand. Sc. (Eng.), Associate Professor, Department of Applied Mathematics at the Bauman Moscow State Technical University. e-mail: attetkov@bmstu.ru

Kotovich A.V., Cand. Sc. (Eng.), Associate Professor, Department of Applied Mathematics at the Bauman Moscow State Technical University. e-mail: kkot@bmstu.ru

Pilyavskaya E.V., Cand. Sc. (Phys. — Math.), Assistant, Department of Applied Mathematics at the Bauman Moscow State Technical University. e-mail: e.pilyavskaya@mail.ru