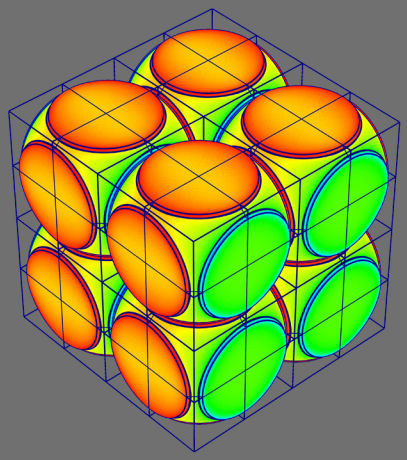
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Димитриенко Ю.И., Богданов И.О., Коряков М.Н.
Конечно-элементное моделирование потери устойчивости полимерных композитных конструкций в процессе отверждении.
Математическое моделирование и численные методы, 2025, № 4, с. 49–70.

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/389/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.216.68
25.11.2026 23:03:13

УДК 539.3 DOI: 10.18698/2309-3684-2025-4-4970

Конечно-элементное моделирование потери устойчивости полимерных композитных конструкций в процессе отверждения

© Ю.И. Димитриенко, И.О. Богданов, М.Н. Коряков

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Рассматривается задача моделирования потери устойчивости (коробления) конструкций из композиционных материалов в процессе их производства на этапе отверждения жидкого связующего. Приведены системы уравнений для задачи внутреннего тепломассопереноса при отверждении и вычисления технологических напряжений, определяющих так называемое основное (устойчивое) состояние конструкции. Сформулирована система уравнений линейной 3D теории устойчивости для варьированного (неустойчивого) состояния конструкции, представляющая из себя обобщенную задачу на собственные значения. Предложен численный алгоритм решения задачи потери устойчивости, на основе метода конечных элементов. Рассмотрено применение предложенной модели для анализа короблений в процессе отверждения композитной конструкции из тканевого эпоксидного стеклопластика. Предложенная модель и постановки задач реализована в программном комплексе Manipula/SMCM, разрабатываемом в НОЦ «СИМПЛЕКС» МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Ключевые слова: *полимерные композиты, отверждение, устойчивость, коробление, МКЭ, Manipula/SMCM*

Введение. Хорошо известно, что параметры технологических процессов изготовления (температурный режим, режим и способ создания давления) существенным образом влияют на качество создаваемых полимерных композитных конструкций. Вопросам моделирования технологических процессов изготовления посвящено значительно количество работ [1-11 и др.]. В настоящее время существуют коммерческие программные комплексы, такие как Ansys (модуль Ansys Composite Cure Simulation) [9], FiberSim [12], PAM-Composite [13], в которых реализована возможность решения задач этого класса. Основное внимание в этих программных комплексах направлено на прогнозирование возникновения технологических напряжений в композитах и расчет дисторсии (изменения геометрических размеров конструкции вследствие теплового деформирования и химической усадки при отверждении) [4-6]. Однако при изготовлении композитных конструкций существуют и другие особенности механического поведения конструкций, которые могут влиять на напряженно-деформированное поведение композитных конструкций на этапе их эксплуатации. К числу таких особенностей необходимо отнести эффект потери устойчивости тонкостенных композитных конструкций, обусловленное

термическими и усадочными процессами при отверждении. Этот эффект до сих пор остается пока мало изученным.

Потеря устойчивости конструкции при отверждении относится к задачам теории устойчивости, при которых определяется поиск собственных значений, при которых возникает неединственное решение, определяющее формы потери устойчивости конструкции [14-18]. Задачи устойчивости, относящиеся к композитным конструкциям, рассматривались во многих работах, укажем лишь некоторые [19-24]. В частности, в работе [24] была дана классификация задач термоустойчивости, которые определяют значение критических температур, вызывающих потерю устойчивости в зависимости от типа прикладываемых к системе нагрузок.

При решении задач термоустойчивости композитной конструкции при ее отверждении необходимо решать сопряженную задачу внутреннего тепломассопереноса и с учетом переменных свойств композита, меняющихся во времени из-за фазовых превращений.

Следует отметить, что обычно задачи устойчивости рассматриваются в приближении теории стержней, пластин и оболочек, что позволяет снизить требования к вычислительным ресурсам, однако в случае рассмотрения эффектов отверждения и неравномерного нагрева и неравномерных по толщине полей концентраций фаз в процессе отверждения связующего, двумерная постановка задачи является слишком грубым приближением. Поэтому в данной работе рассматривается общая трехмерная постановка задачи термоустойчивости при отверждении, которая основана на общей концепции 3-х мерных задач устойчивости, предложенной в [15-17,25].

Общая математическая модель термоустойчивости композитных конструкций при отверждении. На этапе отверждения композит представляет собой 4-х фазную систему, в которой имеется твердая f-фаза (наполнитель в виде волокон), жидкая l-фаза связующего, фильтрующегося в порах, твердая b-фаза отвержденного связующего (полимер в стеклообразном состоянии), а также газовая g-фаза, одновременно с жидкой фазой находящаяся в порах; l-фаза, b-фаза и g-фаза -образуют матрицу композита. Математическое моделирование такой 4-х фазной системы может быть осуществлено по аналогии с моделью 4-х фазного термодеструктирующего композита [26]. В этом случае математическая постановка задачи расчета термоустойчивости композитных конструкций при отверждении состоит из следующих 3-х сопряженных задач, решаемых последовательно:

– задачи внутреннего тепломассопереноса при отверждении;

– задачи термоупругости в основном (устойчивом) состоянии;

– задачи термоустойчивости в варьируемом (неустойчивом) состоянии – задачи на собственные значения.

Постановка задачи внутреннего тепломассопереноса при отверждении композитной конструкции – представляет собой систему уравнений изменения массы полимерной фазы, уравнения фильтрации газообразных продуктов в порах материала, уравнения теплопроводности, а также включает в себя определяющие соотношения в виде закона Фурье, закона Дарси и уравнения Менделеева-Клапейрона для газовой фазы:

$$
\begin{gathered}
\rho_l \frac{\partial \varphi_l}{\partial t} = -J, \\
\frac{\partial \rho_{\mathrm{g}} \varphi_{\mathrm{g}}}{\partial t} + \nabla \cdot \rho_{\mathrm{g}} \varphi_{\mathrm{g}} \mathbf{v}_{\mathrm{g}} = J\Gamma, \\
\rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{q} - c_g \rho_g \varphi_g \mathbf{v}_g \cdot \nabla \theta - J \varphi_b \Delta e^0, \\
\varphi_b = \left(\varphi_l^0 - \varphi_l\right) \frac{\rho_l}{\rho_b} \left(1 - \Gamma\right), \\
\rho c = \varphi_g c_g \rho_g + \varphi_l c_l \rho_l + \varphi_b c_b \rho_b + \varphi_f c_f \rho_f, \\
\mathbf{q} = -\boldsymbol{\Lambda} \cdot \nabla \theta, \;\; \rho_{\mathrm{g}} \varphi_{\mathrm{g}} \mathbf{v}_g = -\mathbf{K} \cdot \nabla p_g, \;\; p_g = \frac{R_g \theta \rho_g}{M_g}, \;\; \mathbf{x} \in V^{\circ};
\end{gathered}
\tag{1}
$$

где φ_m, φ_f — объёмные концентрации матрицы и волокон в композите ($\varphi_m + \varphi_f = 1$); φ_g, φ_l, φ_b — объемные концентрации газовой фазы, жидкой фазы связующего и отвержденной фазы полимера, соответственно ($\varphi_m = \varphi_g + \varphi_l + \varphi_b$); ρ_g, ρ_l, ρ_b — плотности газовой, жидкой и твердой фаз соответственно; c_g, c_l, c_b, c_f — теплоемкости при постоянном объеме для газовой, жидкой, твердой фаз и волокна соответственно; ρ и c — плотность и теплоемкость композита; $\mathbf{q}$ — вектор теплового потока; $\boldsymbol{\Lambda}$ — тензор теплопроводности композита; θ — температура композита; $\mathbf{v}_g$ — скорость газовой фазы; $\mathbf{K}$ — тензор газопроницаемости композита; R_g — газовая постоянная; M_g — молярная масса; Δe^0 — удельная теплота отверждения матрицы; J — массовая скорость отверждения матрицы; Γ — коэффициент газификации матрицы; ∇ — набла-оператор.

К системе (1) присоединяются следующие граничные и начальные условия:

$$
\begin{gathered}
\mathbf{x} \in \Sigma_p: \quad p_g = p_e, \quad \mathbf{x} \in \Sigma_v: \quad \mathbf{v}_g \cdot \mathbf{n} = 0; \\
\mathbf{x} \in \Sigma_\theta: \quad \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = \alpha_\theta (\theta - \theta_e); \quad \mathbf{x} \in \Sigma_q: \quad \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = 0; \\
t = 0: \quad \theta = \theta_0, \;\; \rho_g = \rho_g^0, \;\; \varphi_l = \varphi_l^0, \;\; \varphi_g = \varphi_g^0,
\end{gathered}
\tag{2}
$$

здесь α_θ — коэффициент теплообмена; θ_e — температура внешней среды; θ_0 — начальная температура, p_e — заданное внешнее давление, $\mathbf{n}$ — вектор нормали; Σ_p и Σ_θ — части поверхности, на которых задано давление и условия конвективного теплообмена, соответственно, Σ_v и Σ_q — части поверхности, на которых заданы условия герметичности и теплоизоляции, θ_0, ρ_g^0, φ_l^0, φ_g^0 — начальные значений функций.

Массовая скорость отверждения J, входящая в систему (1), выбирается в соответствии с моделью Камаль-Сурур [27]:

$$J = J_1 + J_2;$$
$$J_1 = J_{10}\exp\left(-\frac{E_{1A}}{R\theta}\right)\tilde{f}_1(\varphi_b);\ \ J_2 = J_{20}\exp\left(-\frac{E_{2A}}{R\theta}\right)\tilde{f}_2(\varphi_b); \qquad (3)$$
$$\tilde{f}_1(\varphi_b) = (\varphi_b^* - \varphi_b)^n;\ \ \tilde{f}_2(\varphi_b) = \varphi_b^m(\varphi_b^* - \varphi_b)^n,$$

где J_{10}, J_{20} — предэкспоненциальные множители, E_{1A}, E_{2A} — энергии активации процесса отверждения, n — порядок реакции процесса отверждения, m — параметр автокаталитичности.

Постановка задачи термоупругости в основном (устойчивом) состоянии - это квазистатическая задача линейной термоупругости для определения технологических напряжений, она имеет следующий вид:

$$\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}^0 = 0,$$
$$\boldsymbol{\sigma}^0 = {}^4\mathbf{C}\cdot\cdot\left(\boldsymbol{\varepsilon}^0 - \lambda\boldsymbol{\varepsilon}^{\circ 0}\right),\ \boldsymbol{\varepsilon}^0 = \frac{1}{2}\left(\nabla\otimes\mathbf{u}^0 + \nabla\otimes\mathbf{u}^{0T}\right),\ \mathbf{x}\in V^\circ; \qquad (4)$$
$$\mathbf{x}\in\Sigma_p : \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}^0 = \lambda_1 p_e\mathbf{n}, \qquad \mathbf{x}\in\Sigma_p : \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}^0 = 0, \quad \mathbf{x}\in\Sigma_u :\ \mathbf{u}^0 = 0\ ,$$

где обозначены параметры в основном состоянии: $\boldsymbol{\sigma}^0$ — тензор напряжений; $\boldsymbol{\varepsilon}^0$ — тензор малых деформаций; $\boldsymbol{\varepsilon}^{\circ 0}$ — тензор тепловых деформаций; $\mathbf{u}^0$ — вектор перемещений; а также: ${}^4\mathbf{C}$ — тензор 4-го ранга модулей упругости; λ — параметр тепловой части задачи, λ_1 — параметр механической части задачи, V° — недеформируемая область конструкции, Σ_p — часть поверхности конструкции, на которой задано давление, Σ_p — часть поверхности, свободная от нагрузок, Σ_u — часть поверхности с жестким закреплением.

Введем поле $\mathbf{c}_i(\mathbf{x})$ — базисов криволинейной ортотропии тканевого композиционного материала в конструкции. Компоненты C_{ijkl}

тензора модулей упругости $^4\mathbf{C}$ в этом базисе $\mathbf{c}_i(\mathbf{x})$ вычисляются стандартным образом [15], как обратные к компонентам тензора упругих податливостей Π_{ijkl}:

$$C_{ijkl} = (\Pi_{ijkl}^{-1}), \tag{5}$$

а компоненты Π_{ijkl} вычисляются через технические упругие константы тканевого КМ

$$\Pi_{\alpha\alpha\alpha\alpha} = \frac{1}{E_\alpha},\ \Pi_{\alpha\alpha\beta\beta} = -\frac{\nu_{\alpha\beta}}{E_\alpha},\ \Pi_{\alpha\beta\alpha\beta} = \frac{1}{4G_{\alpha\beta}}, \tag{6}$$

здесь E_α, $\nu_{\alpha\beta}$, $G_{\alpha\beta}$ — технические характеристики композита (модули упругости, коэффициенты Пуассона, модули сдвига), являющиеся переменными функциями концентраций фаз

$$\begin{gathered} E_1 = E_1^0 \hat{a}_{\theta 1},\ \ E_3 = E_3^0 \hat{a}_{\theta 1},\ \ E_2 = E_2^0 \hat{a}_{\theta 2}, \\ G_{13} = G_{13}^0 \hat{a}_{\theta 1},\ \ G_{23} = G_{23}^0 \hat{a}_{\theta 2},\ \ G_{12} = G_{12}^0 \hat{a}_{\theta 2}, \\ \nu_{32} = \nu_{32}^0,\ \ \nu_{12} = \nu_{12}^0,\ \ \nu_{23} = \nu_{23}^0. \end{gathered} \tag{7}$$

где E_α^0, $\nu_{\alpha\beta}^0$, $G_{\alpha\beta}^0$ — значения упругих констант композита при 293 К при полном отверждении матрицы. Эти константы могут быть вычислены предварительно на основе решения задачи микроанализа на ячейке периодичности (ЯП) [28] на основе информации о модулях упругости полимерной фазы и нитей. Функции $\hat{a}_{\theta 1}$ и $\hat{a}_{\theta 2}$ описывают изменение упругих свойств композита при отверждении матрицы и вычисляются по формулам:

$$\hat{a}_{\theta\alpha} = a_{\theta\alpha} / a_{\theta\alpha}(\infty),\ \alpha = 1, 2, \tag{8}$$

где

$$a_{\theta 1} = \frac{\tilde{a}_2}{1 + \vartheta_m^2 \left(\dfrac{\varphi_f \tilde{a}_2}{m_E \tilde{a}_1} - 1 \right)};\ a_{\theta 2} = \tilde{a}_1; \tag{9}$$

а функции $\tilde{a}_1$, $\tilde{a}_2$ и $\tilde{a}_f$ имеют следующий вид:

$$\tilde{a}_1 = \left(\frac{1-S_p}{m_p} + \frac{S_b}{a^{(0)}\left(S_p^2 - S_b^2\right) + m_p\left(1-S_p^2\right)} + \frac{S_p - S_b}{a^{(0)}S_p^2 + m_p\left(1-S_p^2\right)} \right)^{-1},$$

$$\tilde{a}_2 = \tilde{a}_f \left(1 + tg^2\Phi \frac{\tilde{a}_f \varphi_f}{\tilde{a}_1 m_E} \right)^{-1}, \quad \tilde{a}_f = a_f^{(0)}. \tag{10}$$

Здесь введены обозначения: $m_E = E_l / E_f$ — отношение модулей упругости «жидкой» (аморфной) фазы матрицы и волокон при нормальной температуре $\theta_0 = 293\,K$, $m_p = E_b / E_l$ — отношение модулей упругости полимерной и «жидкой» фазы матрицы при температуре $\theta_0 = 293\,K$; Φ — угол разориентации моноволокон в нити тканевого композита [26], $\vartheta_m = \sin\vartheta_{\max}$, $\vartheta_{\max}$ — максимальный угол искривления нитей в ткани композита.

Входящие в выражения (10) функции $a_f^{(0)}$ и $a^{(0)}$ описывают обратимые изменения упругих свойств полимерной фазы и волокна при нагреве и могут быть вычислены по следующим формулам:

$$a_f^{(0)} = \exp\left(-a_f \Delta\hat{\theta}\right),$$

$$a^{(0)} = \exp\left(-a\Delta\hat{\theta}\right), \tag{11}$$

$$\Delta\hat{\theta} = \Delta\theta + P\int_0^t \exp\left(-Q\left(t-\tau\right)\right)\Delta\theta\left(\tau\right)d\tau, \ \Delta\theta = \theta - \theta_0,$$

где a, a_f, P и Q — константы модели.

Функции S_b и S_p, описывают необратимые изменения свойств матрицы при отверждении и определены с помощью следующих формул:

$$S_p = \left(\frac{1-\varphi_f-\varphi_b}{1-\varphi_f} \right)^{1/3}, \ S_b = \left(\frac{\varphi_g}{1-\varphi_f} \right)^{1/3}. \tag{12}$$

В формулах (10) обозначены также $a_{\theta\alpha}(\infty)$ — значения функций $a_{\theta\alpha}$ при полном завершении процесса отверждения матрицы.

Компоненты тензора $\boldsymbol{\varepsilon}^{\circ 0}$ тепловых деформаций тканевого КМ в базисе $\mathbf{c}_i(\mathbf{x})$ вычисляются по следующей формуле [26]:

$$\varepsilon_{\alpha}^{\circ 0} = (\alpha_f \varphi_f A_\alpha + \alpha_l \varphi_l \Omega_\alpha)(\theta - \theta_0) + \alpha_b \Omega_\alpha \int_0^t [\theta(t) - \theta(\tau)] \dot{\varphi}_b d\tau - \beta_b \varphi_b \Omega_\alpha, \quad \alpha = 1,2,3, \tag{13}$$

где $\alpha_f, \alpha_l, \alpha_b$ — коэффициенты теплового расширения фаз, β_b — коэффициент химической усадки матрицы, а структурные функции A_α и Ω_α вычисляются по формулам из [26].

Решение задачи (4) линейно зависит от параметров λ_1 и λ, введем еще один параметр $\lambda_2 = \lambda_1 / \lambda$, тогда общее решение задачи (4) можно представить в виде

$$\boldsymbol{\sigma}^0 = \lambda(\boldsymbol{\sigma}_1^0 + \lambda_2 \boldsymbol{\sigma}_2^0), \tag{14}$$

где $\boldsymbol{\sigma}_1^0$ — решение задачи (4) при $\lambda = 1$ и $\lambda_1 = 0$ (это задача о чисто тепловом воздействии на конструкцию), а $\boldsymbol{\sigma}_2^0$ — решение задачи (4) при $\lambda = 0$ и $\lambda_1 = 1$ (это задача о чисто механическом воздействии на конструкцию – задача о расчете технологических напряжений в конструкции при отверждении).

Постановка задачи термоустойчивости в варьируемом состоянии может быть записана в виде:

$$\begin{gathered}
\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} - \lambda(\boldsymbol{\sigma}_1^0 + \lambda_2 \boldsymbol{\sigma}_2^0) \cdot\cdot \left(\mathbf{B} \cdot {}^3\mathbf{e}\right) = 0, \\
\boldsymbol{\sigma} = {}^4\mathbf{C} \cdot\cdot \boldsymbol{\varepsilon},\ \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}\left(\nabla \otimes \mathbf{w} + \nabla \otimes \mathbf{w}^T\right), \\
\mathbf{B} = \nabla \otimes \boldsymbol{\omega},\ \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\,{}^3\mathbf{e} \cdot\cdot \Omega,\ \Omega = \frac{1}{2}\left(\nabla \otimes \mathbf{w} - \nabla \otimes \mathbf{w}^T\right); \\
\mathbf{n} \cdot \left(\boldsymbol{\sigma} - \lambda(\boldsymbol{\sigma}_1^0 + \lambda_2 \boldsymbol{\sigma}_2^0) \cdot {}^3\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\omega}\right)\Big|_{\Sigma_\sigma + \Sigma_p} = 0,\ \mathbf{w}\big|_{\Sigma_u} = 0,
\end{gathered} \tag{15}$$

где обозначены функции в варьируемом состоянии: $\boldsymbol{\sigma}$ — тензор напряжений; $\boldsymbol{\varepsilon}$ — тензор малых деформаций; $\mathbf{w}$ — вектор перемещений в варьированном состоянии; ${}^3\mathbf{e}$ — тензор Леви-Чивиты.

Алгоритм решения общей задачи термоустойчивости состоит в следующем. Задается циклограмма нагрева-охлаждения композитной конструкции – функция $\theta_e(\mathrm{t})$, $0 \le t \le t_{\max}$. Вначале решается задача тепломассопереноса (1) на некотором фиксированном промежутке времени $0 \le t \le t_1$, где $t_1 \le t_{\max}$ для некоторого значения температуры $\theta_e(\mathrm{t}_1)$, в результате определяются переменные поля концентрации фаз φ_g, φ_l, φ_b, температуры θ_e и давления газовой фазы в порах на этом промежутке времени $0 \le t \le t_1$. Затем вычисляется тепловая деформация $\boldsymbol{\varepsilon}^{\circ 0}$ на этом же промежутке времени и решается задача (4) в

основном состоянии при $\lambda = 1$ и $\lambda_1 = 0$. В результате находим решение $\boldsymbol{\sigma}_1^0$ этой задачи на $0 \le t \le t_1$. При значениях $\lambda = 0$ и $\lambda_1 = 1$ находим еще одно решение – $\boldsymbol{\sigma}_2^0$ задачи (4).

Подставляя поля тензоров напряжений $\boldsymbol{\sigma}_1^0$ и $\boldsymbol{\sigma}_2^0$ в задачу (15), вычисляем систему собственных значений λ и соответствующих им собственных функций $\mathbf{w}$ (собственных форм) для набора некоторых значений параметра λ_2.

После определения собственного значения λ находим критическое значение температуры потери устойчивости конструкции

$$\theta_e^* = \lambda(\theta_e - \theta_0) + \theta_0 \tag{16}$$

- для выбранного значения времени t_1. Пробегая все значения времени t_1 на промежутке $0 \le t \le t_{\max}$, находим собственные и критические значения температуры $\theta_e^*(\mathrm{t}_1)$ на всем рассматриваемом промежутке времени для выбранных значений параметра λ_2.

Вариационная и численная постановки задачи. В данной работе ограничимся описанием численного алгоритма решения задачи устойчивости (15). Для ее решения будем использовать метод конечных элементов [29-30], поэтому предварительно сформулируем вариационную постановку.

Введем кинематически допустимое поле $\boldsymbol{\Psi}^0 = \delta\mathbf{w}$, где $\delta\mathbf{w}$ — вариация вектора перемещений $\mathbf{w}$, понимаемая как разность двух кинематически допустимых полей. Данное поле должно удовлетворять нулевому граничному условию на части поверхности Σ_w области V. Умножая скалярно первое уравнение из системы (15) на $\boldsymbol{\Psi}^0$ и интегрируя полученное выражение по области V, с учетом теоремы Гаусса-Остроградского получаем вариационное уравнение для задачи термоустойчивости:

$$\int_V \left({}^4\mathbf{C} \cdot\cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) + \boldsymbol{\sigma}^0 \cdot \Omega(\mathbf{w}) \right) \cdot\cdot \delta\nabla \otimes \mathbf{w}^T dV. \tag{17}$$

Соотношение (17) представляет собой задачу на собственные значения, в которой требуется найти собственные значения λ и отвечающие им собственные функции $\mathbf{w}$. Наибольший интерес представляет наименьшее собственное значение $\lambda_{\min}$, поскольку ему соответствует критическая температура θ_e^*, приводящая к первой форме потери устойчивости. Всем остальным значениям λ будут отвечать другие формы потери устойчивости конструкции.

Применяя алгоритм метода конечных элементов для постановки задачи (17) получаем искомую обобщенную задачу на собственные значения в форме, ее локальная формулировка имеет вид:

$$\underset{12\times12}{[K]}\underset{12}{\{w\}} = \lambda \underset{12\times12}{[S]}\underset{12}{\{w\}}, \tag{18}$$

где введены обозначения:

$$\underset{12\times12}{[K]} = \int_V \underset{12\times6}{[B_1]^T}\underset{6\times6}{[C]}\underset{6\times12}{[B_1]}dV,\ \underset{12\times12}{[S]} = \frac{1}{2}\int_V \underset{12\times9}{[B_2]^T}\underset{9\times9}{\left[\tilde{\Sigma}_2^0\right]}\underset{9\times12}{[B_2]}dV,$$

$$\underset{9\times9}{\left[\tilde{\Sigma}_2^0\right]} = \frac{1}{2}\left(\underset{9\times9}{\left[\sigma_\lambda^0\right]}\underset{9\times9}{[T']} + \underset{9\times9}{[T']}\underset{9\times9}{\left[\sigma_\lambda^0\right]}\right),\ \underset{9\times9}{[T']} = \underset{9\times9}{[T]} - \underset{9\times9}{[E]}.$$

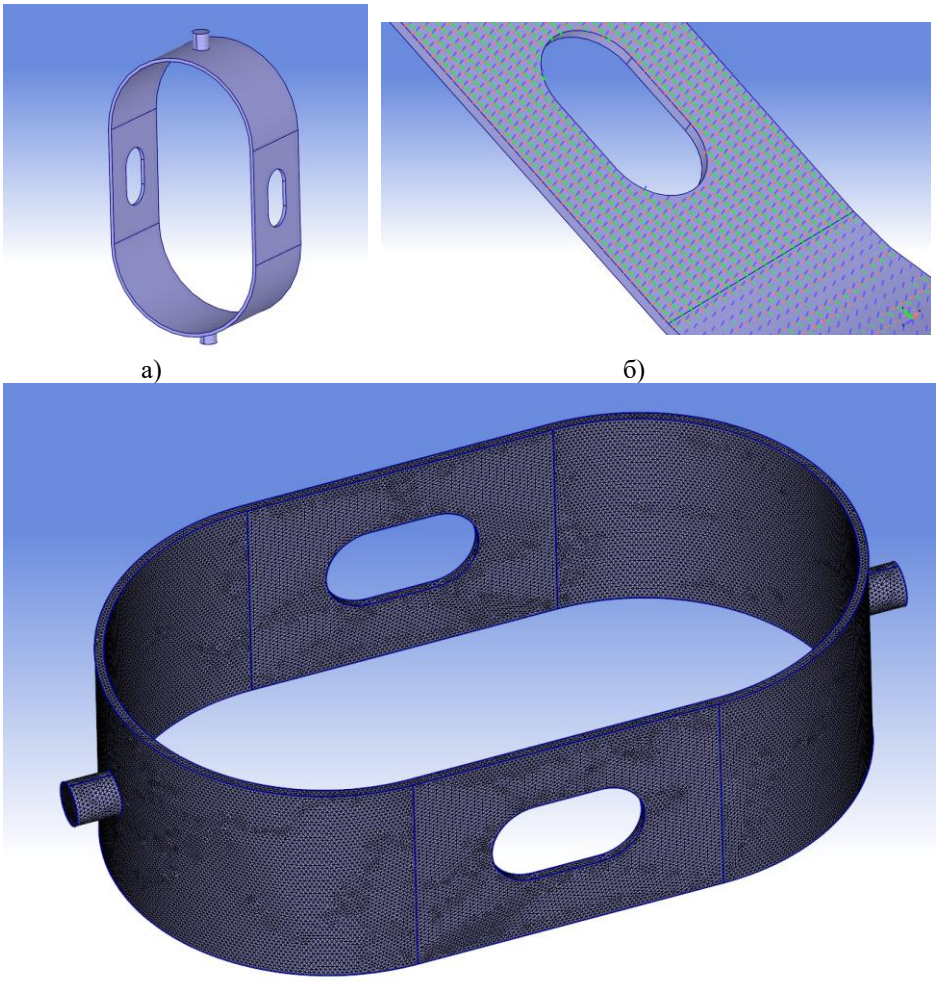
Здесь $\underset{9\times9}{[T]}$ — матрица транспонирования,

$$\underset{6\times12}{[B_1]} = \underset{6\times3}{[L_1]}\underset{3\times12}{[N]} \text{ и } \underset{9\times12}{[B_2]} = \underset{9\times3}{[L_2]}\underset{3\times12}{[N]}$$

— матрицы производных функций формы, $\underset{3\times12}{[N]}$ — функции формы, $\underset{6\times3}{[L_1]}$, $\underset{9\times3}{[L_2]}$ матрицы дифференциальных операторов, $\underset{12}{\{w\}}$ — координатный столбец неизвестных функций $\mathbf{w}$ в узлах КЭ , а $\underset{9\times9}{\left[\sigma_\lambda^0\right]}$ — матрица, составленная из компонент тензора $\boldsymbol{\sigma}_\lambda^0(1) = \boldsymbol{\sigma}_1^0 + \lambda_2\boldsymbol{\sigma}_2^0$.

Предложенная математическая модель и численный конечно-элементный алгоритм решения всех задач были реализованы в качестве отдельных модулей программного комплекса Manipula/SMCM, разрабатываемого в Научно-образовательном центре «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов» (НОЦ «СИМПЛЕКС») МГТУ им.Н.Э.Баумана и на кафедре «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана [31].

Результаты численного моделирования. Рассмотрим результаты моделирования потери устойчивости (коробления) в процессе отверждения композитного элемента конструкции из тканевого эпоксидного стеклопластика, приведенного при рис. 1, а. На рис. 1, б приведены используемые для расчетов оси криволинейной ортотропии.



а) б)

в)

Рис. 1. Модель композитного элемента конструкции, для которого проводилось численное моделирование: а — общий вид; б — локальные базисы криволинейной ортотропии; в — конечно-элементная сетка

Основные свойства композиционного материала приведены в таблице 1.

Начальные условия в задаче внутреннего тепломассопереноса имели вид:

- давление $p_0 = 0{,}1$ МПа;
- температура $\theta_0 = 293$ К.

Граничные условия в задачах (1), (2) и (4):

- давление $p_e = 0{,}1$ МПа;
- коэффициент конвективного теплообмена $\alpha_\theta = 20$ $\text{Вт}/\left(\text{м}^2 \cdot \text{К}\right)$

и температура θ_e внешней среды, изменяющаяся в соответствии с заданным на рис. 2, б технологическим циклом нагрева-охлаждения.

Время моделирования составляло 17 400 с, количество шагов по времени задавалось равным 100. Использовалась тетраэдральная конечно-элементная сетка (рис. 1, в) с параметрами: количество улов – 136 006, количество конечных элементов – 656 834, количество граничных элементов – 114 120.

На рис. 3 показаны распределения полей температуры и объемной концентрации твердого полимера в различные моменты времени, полученные в результате решения задачи (1) внутреннего тепломассопереноса при отверждении связующего композита.

Таблица 1

Основные свойства тканевого эпоксидного стеклопластика

Характеристика	Значение
Концентрация волокон φ_f	0,6
Начальная пористость, φ_g^0	0,01
Доля нитей (основа)	0,5
Угол искривления нити $\vartheta_{\max}$, град.	5
Угол разориентации моноволокон Ф, град.	2
m_p	100
m_E	10^{-3}

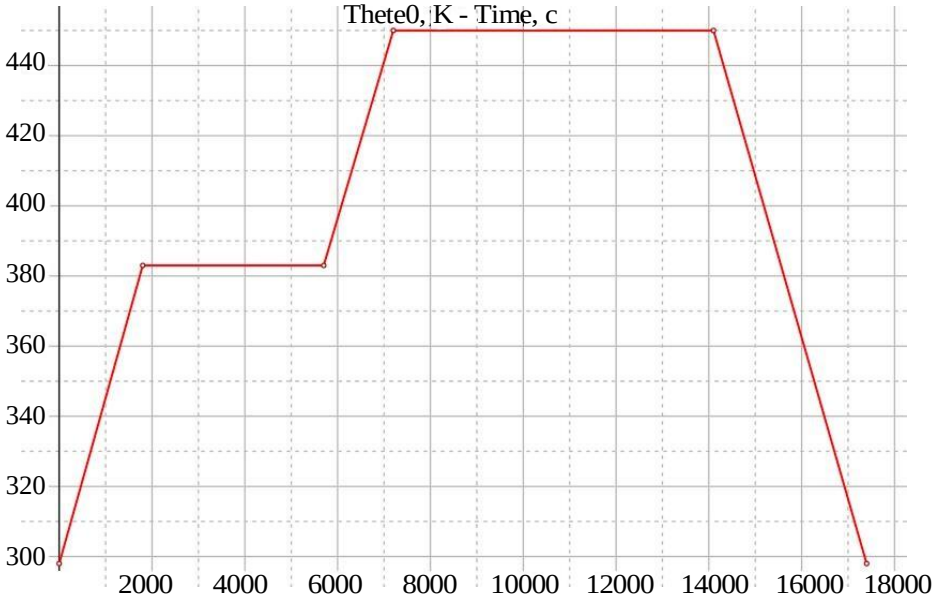
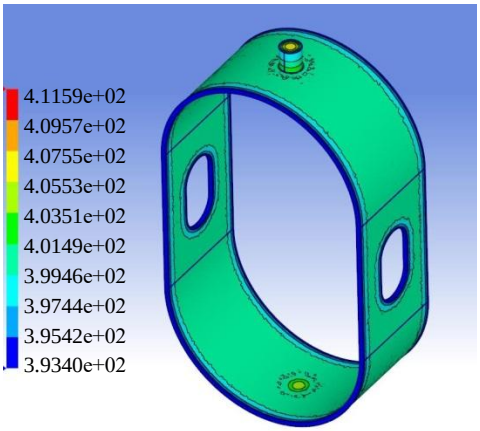
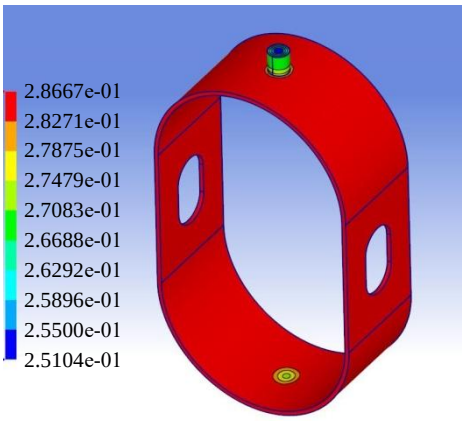
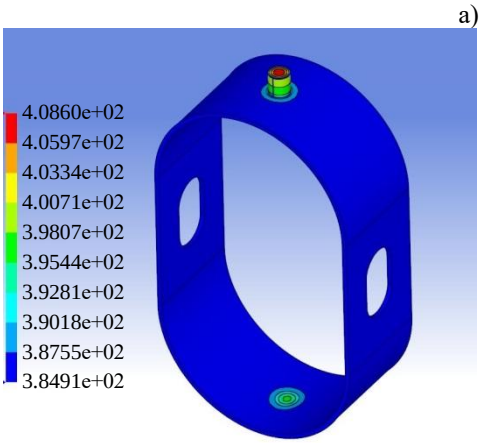


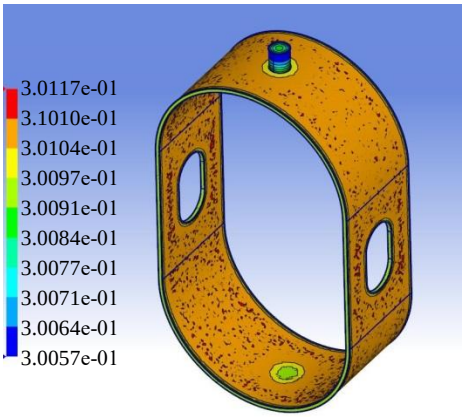
Рис. 2. График изменения температуры внешней среды $\theta_e(t)$


4.1159e+02
4.0957e+02
4.0755e+02
4.0553e+02
4.0351e+02
4.0149e+02
3.9946e+02
3.9744e+02
3.9542e+02
3.9340e+02

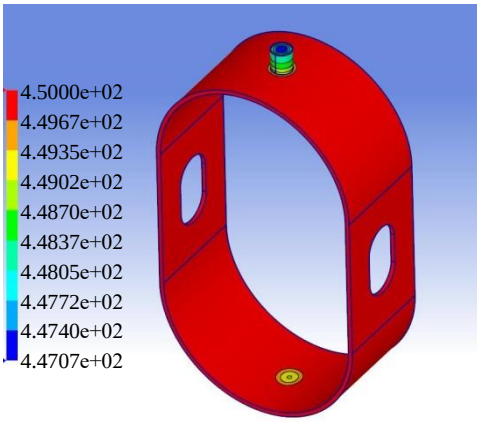

2.8667e-01
2.8271e-01
2.7875e-01
2.7479e-01
2.7083e-01
2.6688e-01
2.6292e-01
2.5896e-01
2.5500e-01
2.5104e-01

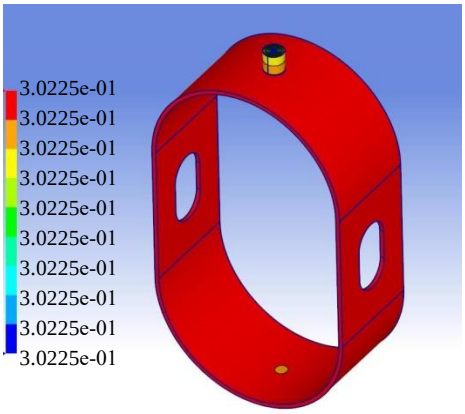
а)


4.0860e+02
4.0597e+02
4.0334e+02
4.0071e+02
3.9807e+02
3.9544e+02
3.9281e+02
3.9018e+02
3.8755e+02
3.8491e+02

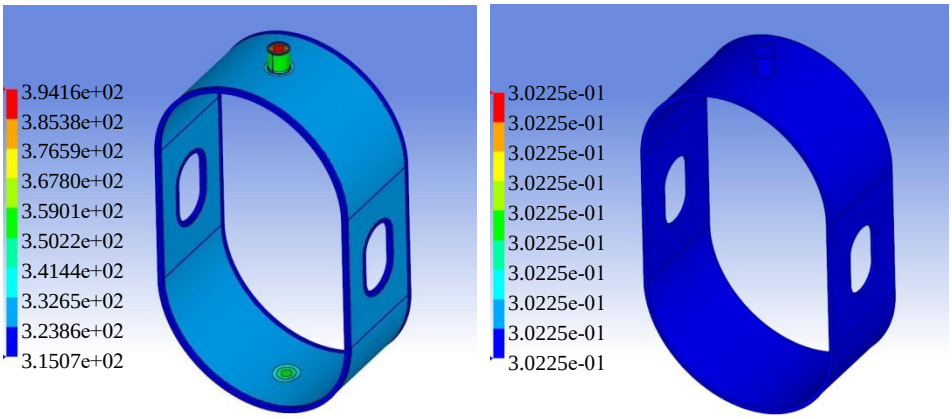

3.0117e-01
3.1010e-01
3.0104e-01
3.0097e-01
3.0091e-01
3.0084e-01
3.0077e-01
3.0071e-01
3.0064e-01
3.0057e-01

б)


4.5000e+02
4.4967e+02
4.4935e+02
4.4902e+02
4.4870e+02
4.4837e+02
4.4805e+02
4.4772e+02
4.4740e+02
4.4707e+02


3.0225e-01
3.0225e-01
3.0225e-01
3.0225e-01
3.0225e-01
3.0225e-01
3.0225e-01
3.0225e-01
3.0225e-01
3.0225e-01

в)



г)

Рис. 2. Распределения температуры (слева) и объемной концентрации твердого полимера (справа), полученные в результате решения задачи отверждения: а — 3 480 с; б — 5 220 с; в — 13 920 с; г — 17 400 с

В задаче устойчивости рассчитывались 3 собственных значения для 10 моментов времени t. В таблице 2 приведены рассчитанные собственные значения для рассматриваемых моментов времени, а на рис. 4 показаны графики зависимости собственных значений λ от времени t. На рис. 5, 6 и 7 представлены поля компоненты w_1 собственного вектора перемещений, отвечающие трем формам потери устойчивости для 4-х различных моментов времени t_k.

Таблица 2

Рассчитанные собственные значения λ для различных моментов времени t

Режим	Время t, с	Собственное значение $\lambda_{(1)}$	Собственное значение $\lambda_{(2)}$	Собственное значение $\lambda_{(3)}$
Нагрев	0	160955,2	341229,1	347512,9
	1740	2,8013	2,8371	3,7145
383 К	3480	0,1511	0,1600	0,1840
	5220	0,1336	0,1411	0,1557
Нагрев	6960	0,1405	0,1485	0,1650
450 К	8700	0,1505	0,1589	0,1790
	10440	0,1519	0,1604	0,1811
	12180	0,1521	0,1606	0,1814
	13920	0,1521	0,1607	0,1814
Остывание	15660	0,1383	0,1461	0,1621
	17400	0,1192	0,1260	0,1363

Собственное значение

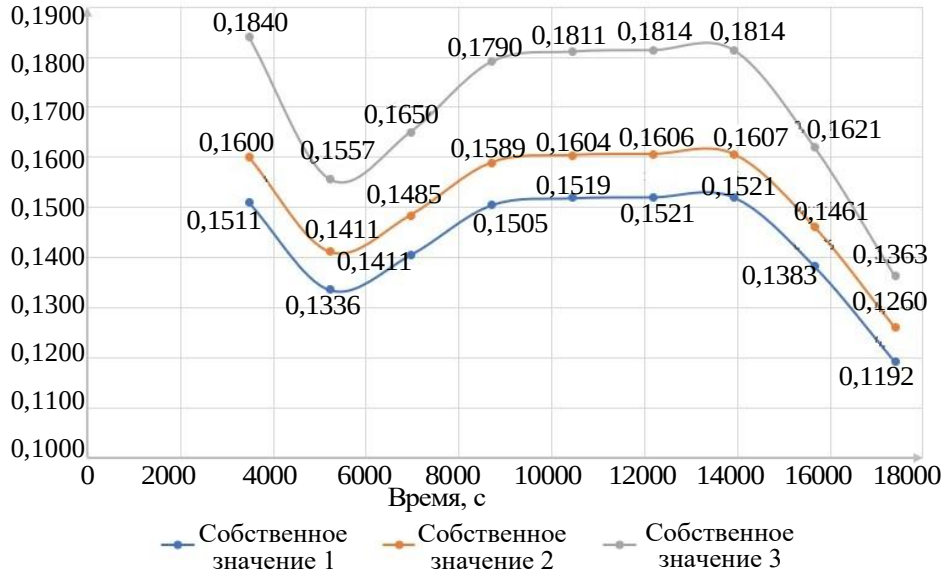
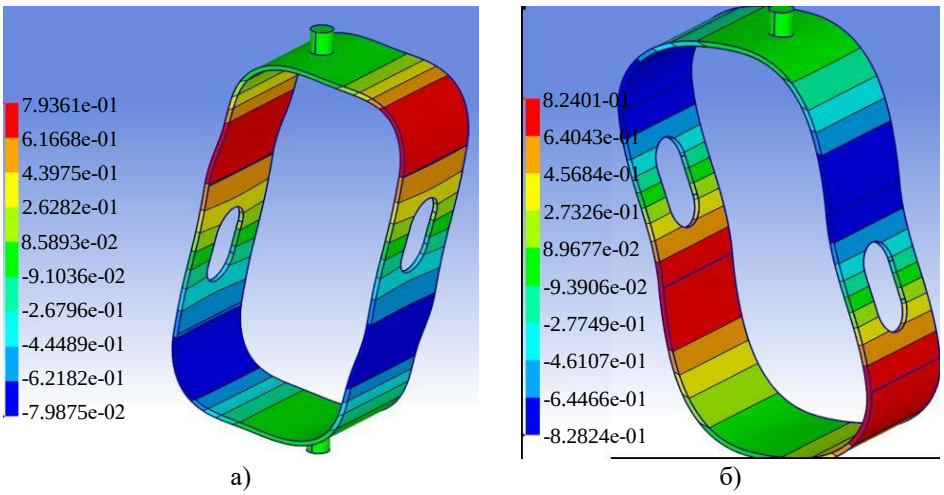
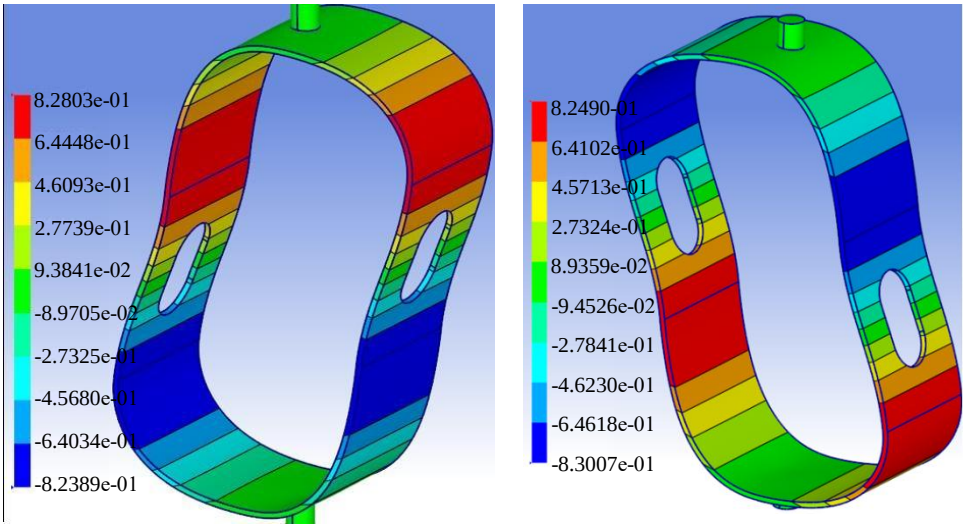


Рис. 4. Графики зависимости собственных значений $\lambda_{(j)}$ от времени t

Практический интерес представляет исследование первой формы $\lambda_{(1)}$ потери устойчивости. Из анализа полученных результатов видно, что для данного случая первое собственное значение, для которого выполняется условие $\left|\lambda_{(1)}(t)\right|<1,\ t\in\left[0,\mathrm{t}_{\max}\right]$, отвечает моменту времени $t^{*}=3480$ с и равно $\lambda^{*}_{(1)}=0{,}1511$. Для всех последующих моментов времени собственные значения меньше 1 и, следовательно, имеет место также потеря устойчивости конструкции, вызывающая ее коробление.

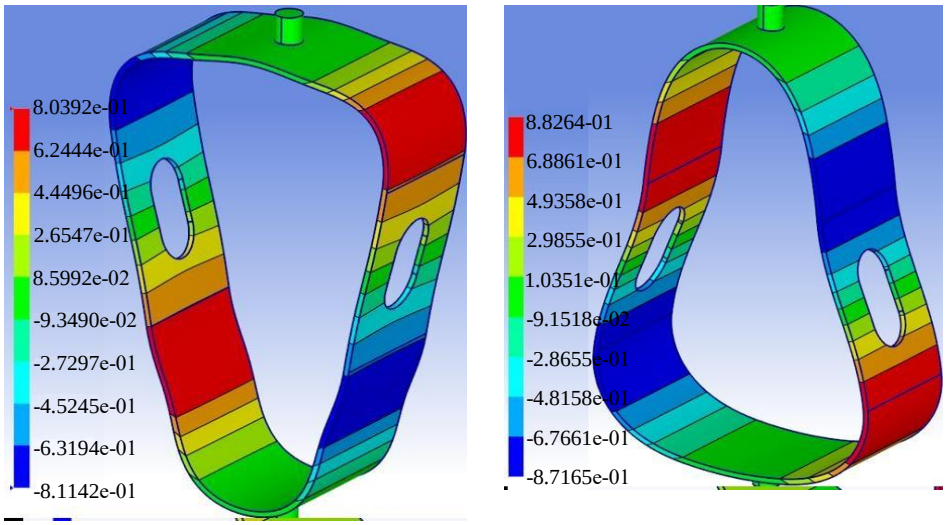


а) б)

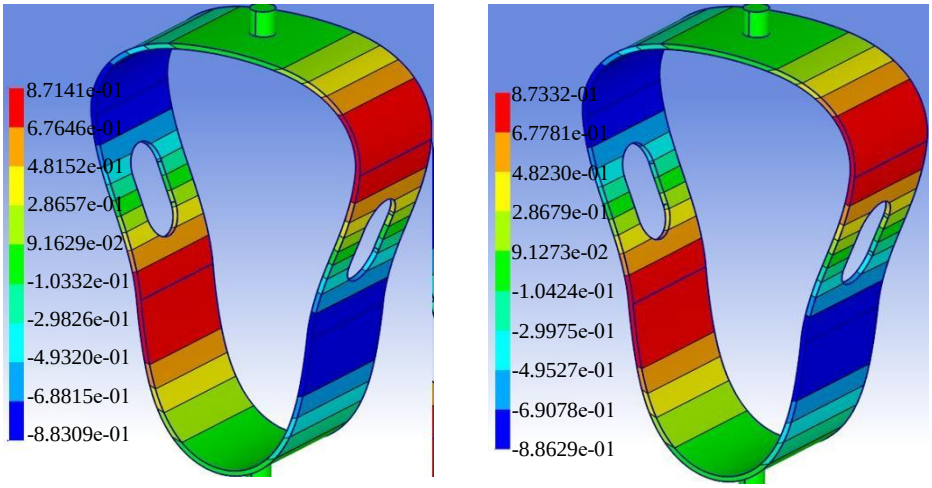


в) г)

Рис. 5. Поля компоненты ω_1, отвечающие первой собственной форме потери устойчивости композитной конструкции для различных моментов времени ее отверждения: а — 1 740; б — 5 220 с; в — 15 660 с; г — 17 400 с

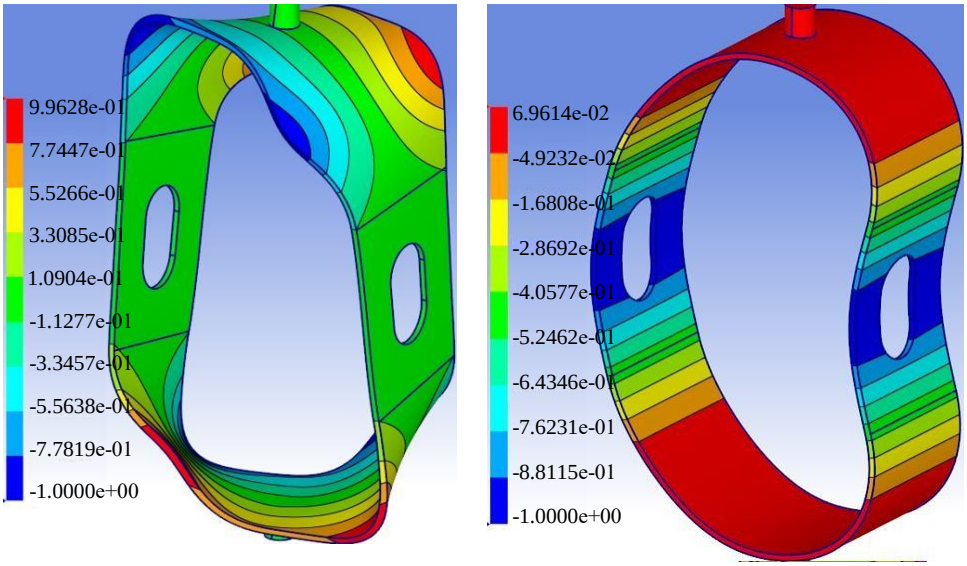


а) б)

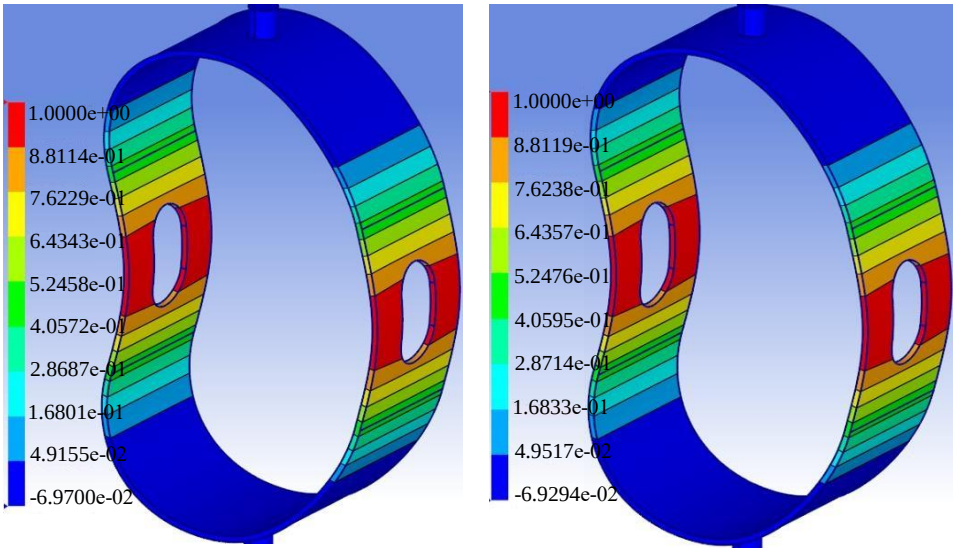


в) г)

Рис. 6. Поля компоненты ω_1, отвечающие второй собственной форме потери устойчивости композитной конструкции для различных моментов времени ее отверждения: а — 1 740; б — 5 220 с; в — 15 660 с; г — 17 400 с



а) б)



в) г)

Рис. 7. Поля компоненты ω_1, отвечающие третьей собственной форме потери устойчивости композитной конструкции для различных моментов времени ее отверждения: а — 1 740; б — 5 220 с; в — 15 660 с; г — 17 400 с

Первая собственная форма потери устойчивости является скашиванием для всех моментов времени (рисунок 5), вторая форма потери устойчивости – представляет собой несимметричное сжатие конструкции (рисунок 6), а третья форма – является изгибно-крутильной (рисунок 7). В различные моменты времени первые две формы сохраняют свой тип, а третья форма изменяется во времени: в начальные моменты времени (при нагреве) конструкция теряет устойчивость по крутильной форме, а при охлаждении – по изгибной форме.

Выводы. В работе предложена постановка задачи о расчете потери устойчивости (коробления) конструкций из композиционных материалов в процессе отверждения жидкого связующего по заданному технологическому циклу изготовления. Постановка задачи состоит из 3-х последовательно решаемых: задачи внутреннего тепломассопереноса в конструкции при отверждении, задачи линейной теории упругости с переменными свойствами – для вычисления технологических напряжений и деформаций при отверждении и непосредственно задачи устойчивости как задачи на собственные значения. Задача устойчивости рассматривалась в рамках точной 3-х мерной постановки. Применен метод конечных элементов для численного решения всех 3 задач. В качестве примера получены результаты численного моделирования коробления элемента конструкции из тканевого эпоксидного стеклопластика в процессе отверждения связующего. Предложенная

модель и постановки задач реализованы в программном комплексе Manipula/SMCM, разрабатываемом в НОЦ «СИМПЛЕКС» МГТУ им. Н.Э. Баумана.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Болотин В.В., Воронцов А.Н., Мурзаханов Р.Х. Анализ технологических напряжений в намоточных изделиях из композитов на протяжении всего процесса изготовления. *Механика композитных материалов*, 1980, № 3, с. 500-508.

[2] Dimitrienko Yu.I. Thermomechanical behaviour of composite materials and structures under high temperatures: 2. Structures. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing,* 1997, vol. 28, iss. 5, pp. 463–471.

[3] Bernath A. Numerical prediction of curing and process-induced distortion of composite structures. Thesis for: Doctor of Engineering. KIT Scientific Publishing, 2020, 294 p. DOI:10.5445/IR/1000105945

[4] Shokrieh M., Shahri S.M.K. Modeling residual stresses in composite materials. *Residual stresses in composite materials*, 2021, pp. 193-213.

[5] Ahmadi F. *Study of process induced stresses and deformations in thermoplastic matrix composites*. Master Dissertation. University of Toulouse III Paul Sabatier, 2023, 120 p.

[6] Patil A.S. *Analysis of process induced shape deformations and residual stresses in composite parts during cure*. Dissertation or thesis. Indianapolis, Indiana, Purdue University ProQuest, 2019, 61 p.

[7] Bosi F., Schlothauer A., Pellegrino S. Cure-induced deformation of ultra-thin composite laminates. *2018 AIAA/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*, 2018, 10 p.

[8] Benavente M. Viscoelastic distortion during manufacturing and post-curing of thermoset composites: characterization and modeling. Dissertation or thesis. Programme: Genie mecanique, 2017, 143 p. URL: https://publications.polymtl.ca/2886/

[9] Patil A., Moheimani R., Shakhfeh T., Dalir H. Analysis of Spring-in for Composite Plates Using ANSYS Composite Cure Simulation. *Proceedings of the American Society for Composites — Thirty-Fourth Technical Conference*, 2019, 15 p. DOI: https://doi.org/10.12783/asc34/31307

[10] Carolyne A., Fernlund G. Spring-in and warpage of angled composite laminates, *Composites Science and Technology*, 2002, vol. 62, no. 14, pp. 1895-1912.

[11] Parlevliet P. P., Bersee H. E., Beukers A. Residual stresses in thermoplastic composites–a study of the literature. Part III: Effects of thermal residual stresses. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 2007, vol. 38, no. 6, pp. 1581-1596.

[12] URL: https://plm.sw.siemens.com/en-US/nx/products/fibersim-composites/

[13] URL: https://www.esi-russia.ru/products/pam-composite

[14] Вольмир А.С. *Устойчивость деформируемых систем*. Москва, Наука, 1967, 964 с.

[15] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. Т. 4. Основы механики твердых сред*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013, 624 с.

[16] Димитриенко Ю.И. Обобщенная трехмерная теория устойчивости упругих тел. Часть 1: конечные деформации. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия естественные науки*, 2013, № 4, с.79–95.

[17] Димитриенко Ю.И. Обобщенная трехмерная теория устойчивости упругих тел. Часть 2: малые деформации. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия естественные науки*, 2014, № 1, с. 17–26.

[18] Ванько В.И. *Очерки по теории устойчивости элементов конструкций*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014, 220 с.

[19] Гумерова Х.С. Модель потери устойчивости термочувствительной оболочки вращения, полученной путем намотки. *Вестник технологического университета*, 2019, т. 22, № 4, с. 122-124.

[20] Нестеров В.А., Никишев А.А. Анализ устойчивости и жесткости композитной сетчатой конической оболочки с закрепленным малым основанием. *Сибирский аэрокосмический журнал*, 2025, т. 26, № 1, с. 94-106.

[21] Сагдатуллин М.К. Устойчивость составной оболочечной конструкции. *Вестник технологического университета*, 2022, т. 25, № 4, с. 111-114.

[22] Соломонов Ю.С., Георгиевский В.П., Недбай А.Я., Андрюшин В.А. *Прикладные задачи механики композитных цилиндрических оболочек*. Москва, Физматлит, 2014, 408 с.

[23] Федоренко А.Н., Федулов Б.Н., Ломакин Е.В. Задача потери устойчивости тонкостенных конструкций из композиционных материалов, свойства которых зависят от типа нагружения. *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*, 2019, № 3, с. 104-111.

[24] Димитриенко Ю.И., Богданов И.О., Юрин Ю.В., Маремшаова А.А., Анохин Д. Конечно-элементное моделирование нестационарной термоустойчивости композитных конструкций. *Математическое моделирование и численные методы,* 2024, № 1, с. 38–54.

[25] Dimitrienko Yu.I., Bogdanov I.O. Mathematical and numerical models of buckling of three-dimensional structures taking into account the thermal effect. *Journal of Physics Conference Series*, 2020, 1990, vol. 1, art. 012056.

[26] Димитриенко Ю.И. *Механика композиционных материалов при высоких температурах*. Москва, Физмалит, 2018, 447 с.

[27] Kamal M. R., Sourour S. Kinematics and Thermal Characterization of Thermoset Cure. *Polymer Engineering Science*, 1973, vol. 13, pp. 59–64.

[28] Димитриенко Ю. И., Юрин Ю. В., Сборщиков С. В. *Многомасштабное моделирование упругопластических композиционных материалов*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2024, 228 с.

[29] Зенкевич О. *Метод конечных элементов в технике*. Москва, Мир, 1975, 541 с.

[30] Сегерлинд Л. *Применение метода конечных элементов*: Пер. с англ. Москва, Мир, 1979, 392 с.

[31] Димитриенко Ю.И**.,** Юрин Ю.В., Богданов И.О., Сборщиков С.В., Каримов С.Б., Коряков М.Н., Гумиргалиев Т.Р., Маремшаова А.А., Яхновский А.Д., Захаров А.А., Богод Д.А., Крючков Г.М., Анохин Д.С. Программный комплекс Manipula/SMCM 4.0 для конечно-элементного многомасштабного (микро-мезо-макро) моделирования композиционных материалов, композитных конструкций и технологии их изготовления, с пре-постпроцессингом и возможностью моделирования на высокопроизводительных вычислительных системах. *Свидетельство государственной регистрации*

программ для электронных вычислительных машин (программ для ЭВМ) Россия № 2025695820 дата поступления 05.12.2025, дата госрегистрации Программ для ЭВМ 15.12.2025

Статья поступила в редакцию 15.12.2025

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Димитриенко Ю.И., Богданов И.О., Коряков М.Н. Конечно-элементное моделирование потери устойчивости полимерных композитных конструкций в процессе отверждении. *Математическое моделирование и численные методы*, 2025, № 4, с. 49–70.

Димитриенко Юрий Иванович — д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, директор Научно-образовательного центра «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: dimit.bmstu@mail.ru

Богданов Илья Олегович — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, старший научный сотрудник Научно-образовательного центра «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов» МГТУ им. Н.Э. Баумана.e-mail: biofamily_7394@mail.ru

Коряков Михаил Николаевич — ведущий инженер Научно-образовательного центра «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: mkoryakov@bmstu.ru

Finite element modeling of polymer composite structures buckling during the curing process

© Yu.I. Dimitrienko, I.O. Bogdanov, M.N. Koryakov

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

A structural multiscale model composite materials with thermal decomposition at high temperatures is proposed, which allows predicting the thermoelastic properties of the composite based on the properties of the initial components - the matrix phases and the monofilament phases. The model takes into account the kinetics of phase transformations in the matrix and monofilaments occurring in them at high temperatures, which allows describing the effects of the dependence of the composite properties not only on temperature, but also on the heating rate and heating history. The proposed model consists of 4 structural levels, the lower level contains the matrix and monofilament phases, and the upper level contains the periodicity cell formed by the monofilament threads and the matrix surrounding them. For each structural level, a periodicity cell is introduced. For the lower levels, approximate analytical solutions of problems on periodicity cells, proposed earlier in the works of Yu. I. Dimitrienko, are used, and for the periodicity cell of the upper level, a 3D finite element solution of the local problem is constructed. A multiscale model of thermally degradable composites is implemented in the Manipula/SMCM software package developed at the SIMPLEX Research and Education Center of Bauman Moscow State Technical

University. A numerical example of calculating the elastic properties of a fabric glass epoxy composite when heated to high temperatures is given.

***Keywords**: thermal degradation, composites, periodicity cell, FEM, high temperatures, Manipula/SMCM*

REFERENCES

[1] Bolotin V.V., Vorontsov A.N., Murzakhanov R.Kh. Analysis of technological stresses in wound composite products throughout the entire manufacturing process. *Mechanics of Composite Materials*, 1980, no. 3, pp. 500-508.

[2] Dimitrienko Yu.I. Thermomechanical behaviour of composite materials and structures under high temperatures: 2. Structures. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 1997, vol. 28, iss. 5, pp. 463–471.

[3] Bernath A. Numerical prediction of curing and process-induced distortion of composite structures. Thesis for: Doctor of Engineering. KIT Scientific Publishing, 2020, 294 p. DOI:10.5445/IR/1000105945

[4] Shokrieh M., Shahri S.M.K. Modeling residual stresses in composite materials. *Residual stresses in composite materials*, 2021, pp. 193-213.

[5] Ahmadi F. *Study of process induced stresses and deformations in thermoplastic matrix composites*. Master Dissertation. University of Toulouse III Paul Sabatier, 2023, 120 p.

[6] Patil A.S. *Analysis of process induced shape deformations and residual stresses in composite parts during cure*. Dissertation or thesis. Indianapolis, Indiana, Purdue University ProQuest, 2019, 61 p.

[7] Bosi F., Schlothauer A., Pellegrino S. Cure-induced deformation of ultra-thin composite laminates. *2018 AIAA/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*, 2018, 10 p.

[8] Benavente M. Viscoelastic distortion during manufacturing and post-curing of thermoset composites: characterization and modeling. Dissertation or thesis. Programme: Genie mecanique, 2017, 143 p. URL: https://publications.polymtl.ca/2886/

[9] Patil A., Moheimani R., Shakhfeh T., Dalir H. Analysis of Spring-in for Composite Plates Using ANSYS Composite Cure Simulation. *Proceedings of the American Society for Composites — Thirty-Fourth Technical Conference*, 2019, 15 p. DOI: https://doi.org/10.12783/asc34/31307

[10] Carolyne A., Fernlund G. Spring-in and warpage of angled composite laminates, *Composites Science and Technology*, 2002, vol. 62, no. 14, pp. 1895-1912.

[11] Parlevliet P. P., Bersee H. E., Beukers A. Residual stresses in thermoplastic composites–a study of the literature. Part III: Effects of thermal residual stresses. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 2007, vol. 38, no. 6, pp. 1581-1596.

[12] URL: https://plm.sw.siemens.com/en-US/nx/products/fibersim-composites/

[13] URL: https://www.esi-russia.ru/products/pam-composite

[14] Vol'mir A.S. *Ustoychivost' deformiruemykh system [Stability of deformable systems]*. Moscow, Nauka Publ., 1967, 964 p.

[15] Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika sploshnoy sredy. Tom 4. Osnovy mekhaniki tverdogo tela* [Continuum Mechanics. Vol. 4. Fundamentals of solid mechanics]. Moscow, BMSTU Publ., 2013, 624 p.

[16] Dimitrienko Yu.I. Generalized three-dimensional theory of elastic bodies stability. Part 1. Theory of shell stability. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Natural Science*, 2014, iss. 2, pp. 77–89.

[17] Dimitrienko Yu.I. Generalized three-dimensional theory of elastic bodies stability. Part 2. Small deformations. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Natural Science*, 2014, iss. 1, pp.17-26.

[18] Van'ko V.I. *Ocherki po teorii ustojchivosti ehlementov konstrukcij* [Sketches according to the theory of stability of elements of designs.]. Moscow, BMSTU Publ., 2014, 220 p.

[19] Gumerova Kh.S. Instability model of a temperature-sensitive rotational shells obtained by windng. *Vestnik tekhnologicheskogo universiteta* [Bulletin of the Technological University], 2019, vol. 22, no. 4, pp. 122-124.

[20] Nesterov V.A., Nikishev A.A. Buckling and stiffness analysis of a composite anisogrid conical shell with a fixed small base. *Siberian aerospace journal*, 2025, vol. 26, no. 1, pp. 94-106.

[21] Sagdatullin M.K. Stability of compound shell structure. *Vestnik tekhnologicheskogo universiteta* [Bulletin of the Technological University], 2022, vol. 25, no. 4, pp. 111-114.

[22] Solomonov YU.S., Georgievskij V.P., Nedbaj A.YA., Andryushin V.A. *Prikladnye zadachi mekhaniki kompozitnyh cilindricheskih obolochek* [Applied problems in the mechanics of composite cylindrical shells]. Moscow, FIZMATLIT Publ., 2014, 408 p.

[23] Fedorenko A.N., Fedulov B.N., Lomakin E.V. Buckling problem of composite thin-walled structures with properties dependent on loading types. *PNRPU mechanics bulletin*, 2019, no. 3, pp. 104-111.

[24] Dimitrienko Y. I. Bogdanov I. O. , Yurin Y. V., Maremshaova A. A. , Anokhin D. S. Finite element modeling of non-stationary thermal buckling of composite structures *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2024, no. 1, pp. 38–54.

[25] Dimitrienko Yu.I., Bogdanov I.O. Mathematical and numerical models of buckling of three-dimensional structures taking into account the thermal effect. *Journal of Physics Conference Series*, 2020, 1990, vol. 1, art. 012056.

[26] Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika kompozicionnyh materialov pri vysokih temperaturah* [Mechanics of composite materials at high temperatures]. Moscow, FIZMATLIT Publ., 2018, 447 p.

[27] Kamal M. R., Sourour S. Kinematics and Thermal Characterization of Thermoset Cure. *Polymer Engineering Science*, 1973, vol. 13, pp. 59–64.

[28] Dimitrienko Yu. I., Yurin Yu. V., Sborshchikov S. V. *Mnogomasshtabnoe modelirovanie uprugoplasticheskih kompozicionnyh materialov* [Multiscale modeling of elastic-plastic composite materials]. Moscow, Izd-vo MGTU im. N.E. Baumana [Bauman Moscow State Technical University Publishing House], 2024, 228 p.

[29] Zenkevich O. *Metod konechnyh elementov v tekhnike* [The finite element method in engineering]. Moscow, Mir Publ., 1975, 541 p.

[30] Segerlind L. *Primenenie metoda konechnyh elementov: Perevod s anglijskogo* [Application of the finite element method: Translated from English] Moscow, Mir Publ., 1979, 392 p.

[31] Dimitrienko Yu.I., Yurin Yu.V., Bogdanov I.O., Sborshchikov S.V., Karimov S.B., Koryakov M.N., Gumirgaliev T.R., Maremshaova A.A., Yakhnovsky A.D., Zakharov A.A., Bogod D.A., Kryuchkov G.M., Anokhin D.S. Manipula/SMCM 4.0 software package for finite-element multiscale (micro-meso-macro) modeling

of composite materials, composite structures and their manufacturing technology, with pre- and post-processing and the possibility of modeling on high-performance computing systems. Certificate of state registration of computer programs (software) Russia No. 2025695820, filing date 05.12.2025, date of state registration of computer programs 15.12.2025.

Dimitrienko Yu. I., Dr. Sci. (Phys. — Math.), Professor, Head of Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University, Director of Research and Education Center Scientific and Educational Centre of Supercomputer Engineering Modeling and Software Packages (Simplex), Bauman Moscow State Technical University. e-mail: dimit.bmtstu@mail.ru

Bogdanov I.O., Cand. Sc. (Phys. — Math.), Associate Professor, Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: biofamily_7394@mail.ru

Koryakov M.N., Lead Engineer of the Research and Education Center Scientific and Educational Centre of Supercomputer Engineering Modeling and Software Packages (Simplex), Bauman Moscow State Technical University. e-mail: mkoryakov@bmstu.ru