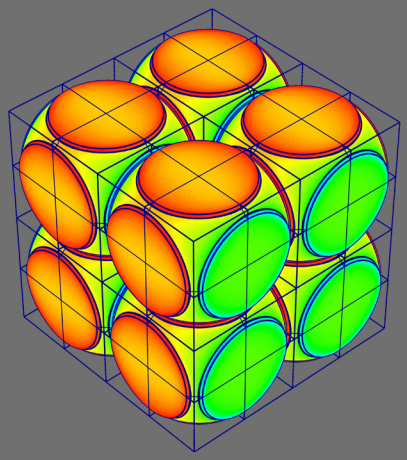
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Евстигнеев А.И., Одиноков В.И., Потянихин Д.А., Колошенко Ю.Б. Численное моделирование влияния внутриформенного высокого газового давления на затвердевание и охлаждение стальной отливки. Математическое моделирование и численные методы, 2025, № 4, с. 19–48.

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/388/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.217.58
15.11.2026 11:28:11

УДК 539.5, 621.74 DOI: 10.18698/2309-3684-2025-4-1948

Численное моделирование влияния внутриформенного высокого газового давления на затвердевание и охлаждение стальной отливки

© А. И. Евстигнеев, В. И. Одиноков,
Д.А. Потянихин, Ю. Б. Колошенко

ФГБОУ ВО «КнАГУ», Хабаровский край, Комсомольск-на-Амуре, 681013, Россия

Разработана численная схема и алгоритм расчета напряженно-деформированного состояния (НДС) отливки в процессе ее затвердевания в предварительно напряженной сферической металлической литейной форме, установленной в сферическую матрицу, подверженную тепловой нагрузке. В основу расчета положены уравнения линейной теории упругости, теплопроводности и апробированный численный метод. Рассматривается сборная литейная сферическая конструкция, ограниченная ортогональными семействами поверхностей. В качестве примера приводится задача по затвердеванию и охлаждению сферической стальной отливки в металлической форме, которая вмонтирована в матрицу. Результаты вычислений приведены в виде эпюр нормальных напряжений, перемещений и температур по сечению сферической конструкции. Дан анализ полученных расчетных результатов.

Ключевые слова: *сферическая литейная форма, матрица, напряженно-деформированное состояние, численное моделирование, напряжение, перемещение, сферическая стальная отливка, затвердевание, охлаждение*

Введение. Типичными представителями осесимметричных полых изделий, подверженных воздействию высокого газового давления пороховых газов, являются стволы артиллерийских орудий, в которых газовое давление может достигать 800-1100 МПа [1].

К качеству таких изделий предъявляются повышенные требования, особенно по наличию в них внутренних литейных дефектов в виде пузырей, раковин, пористости и пр.

Существенное влияние на качество таких отливок оказывает технология их изготовления, обеспечивающая залечивание указанных дефектов в процессе кристаллизации металла. Одним из способов литья, гарантирующим получение качественной плотной отливки является литье под давлением [2], способное обеспечить давление в камере прессования до 800 МПа [3], что является пределом возможностей данного процесса. Поэтому необходимо разрабатывать новые способы и технологии изготовления таких отливок, особенно за счет значительного увеличения создаваемого давления.

Процесс литья с кристаллизацией под высоким внутри форменным газовым давлении [4] является новым технологическим решени-

ем, при котором давление внутри формы может быть увеличено практически неограниченно, что требует проведения дальнейших широких научно-практических исследований, особенно путем математического моделирования процесса численными методами, в том числе и методом [5]. Величина создаваемого внутри форменного газового давления главным образом зависит только от стойкости самой литейной формы [4].

Используемый в настоящей работе численный метод позволяет определять при исследовании какого-либо процесса деформации, напряжения и перемещения по граням каждого элемента с одинаковой точностью, в отличие от классических конечно-элементных комплексов, которые построены на энергетических принципах, в зависимости от которых составляются матрицы «жесткости» или «податливости». Соответственно определяются из них перемещения или напряжения. Если имеет место матрица «жесткости», то напряжения вычисляются из закона Гука, а это значит, не все граничные условия по напряжениям можно будет удовлетворить. То же самое получаем и при использовании вариационного принципа начала Кастильяно (матрица податливости). При применении используемого в статье численного метода удовлетворяются все граничные условия и по перемещениям, и по напряжениям. Поэтому наблюдается очень быстрое насыщение (сходимость численных решений при разбиении исследуемой области на элементы). Ограниченность применения данного численного метода – рассматриваемая область должна быть описана системой ортогональных поверхностей. В этом случае имеем единую форму записи уравнений независимо от вида системы ортогональных координат. Область может иметь подобласти, описанные в разных системах ортогональных координат, а форма уравнений одна и та же. Это очень удобно при разработке численной схемы решения задачи. Все это продемонстрировано в монографии [5].

Исследование разработанного процесса литья с кристаллизацией отливки под высоким внутри форменным газовым давлении в настоящей работе решается как центральная осесимметричная задача о деформировании двуслойной толстостенной сферической оболочки, к внешней и внутренней границам которой приложено разное давление и температура. Процесс охлаждения рассматривается как несвязанный, т.е. протекающий по закону Дюамеля-Неймана [6, 7, 8].

Аналитический обзор литературы по расчету термоупругих напряжений в металлах в металлургических и литейных процессах приведен в [9].

Влияние всестороннего газового давления на затвердевание и свойства стальных отливок рассмотрено в экспериментальной работе [10].

В работе [11] приведено моделирование НДС отливки при кристаллизации с помощью созданной авторской программы и пакета ProCast.

Решение задачи по разработке математической модели теплонапряженного состояния и численного моделирования работы матрицы пресс-формы для отливки сплава АК9ч представлено в работе [12].

Полученные в работе [13] экспериментальные результаты необходимы для моделирования НДС реальных отливок, а разработанная модель на их основе позволяет предупредить дефекты усадочного происхождения при изготовлении стальных отливок.

Исследована возможность предотвращения возможных дефектов литья, выявленных посредством моделирования в программе ProCast [14].

Установление основных характеристик протекания процессов кристаллизации металла отливки путем компьютерного моделирования в программе LVM Flow представлено в [15].

Вопросы компьютерного моделирования и анализа усадочных дефектов и напряженно-деформированного состояния отливок рассмотрены в работах [16, 17, 18, 19].

Задачи о воздействии на сферически симметричные тела внутреннего давления и температурной нагрузки для термоупругих, термоупругопластических моделей твердого тела рассмотрены в работах [20-30].

В настоящей работе теоретически моделируется процесс затвердевания и охлаждения стальной отливки сферической формы в литейной форме согласно патенту [4] с применением известного широко апробированного численного метода [5].

При этом ставилась цель показать целесообразность и эффективность применения разработанного авторами способа получения отливок при воздействии высоких газовых давлений в процессе их кристаллизации путем численного решения сформулированной системы уравнений, которое может быть осуществлено с применением и других известных численных методов, что не является целью настоящей работы.

Инженерная постановка задачи. На рис. 1, а изображена схема ЛФ 1, представляющая собой металлическую разборную конструкцию сферической конфигурации, установленную в сферическую разборную матрицу 2, нагретую до определенной температуры (R — наружный радиус литейной формы; R_1 — внешний радиус конструкции разъемной матрицы; b_1 — толщина стенок конструкции в целом). После установки ЛФ матрицу охлаждают до комнатной температуры.

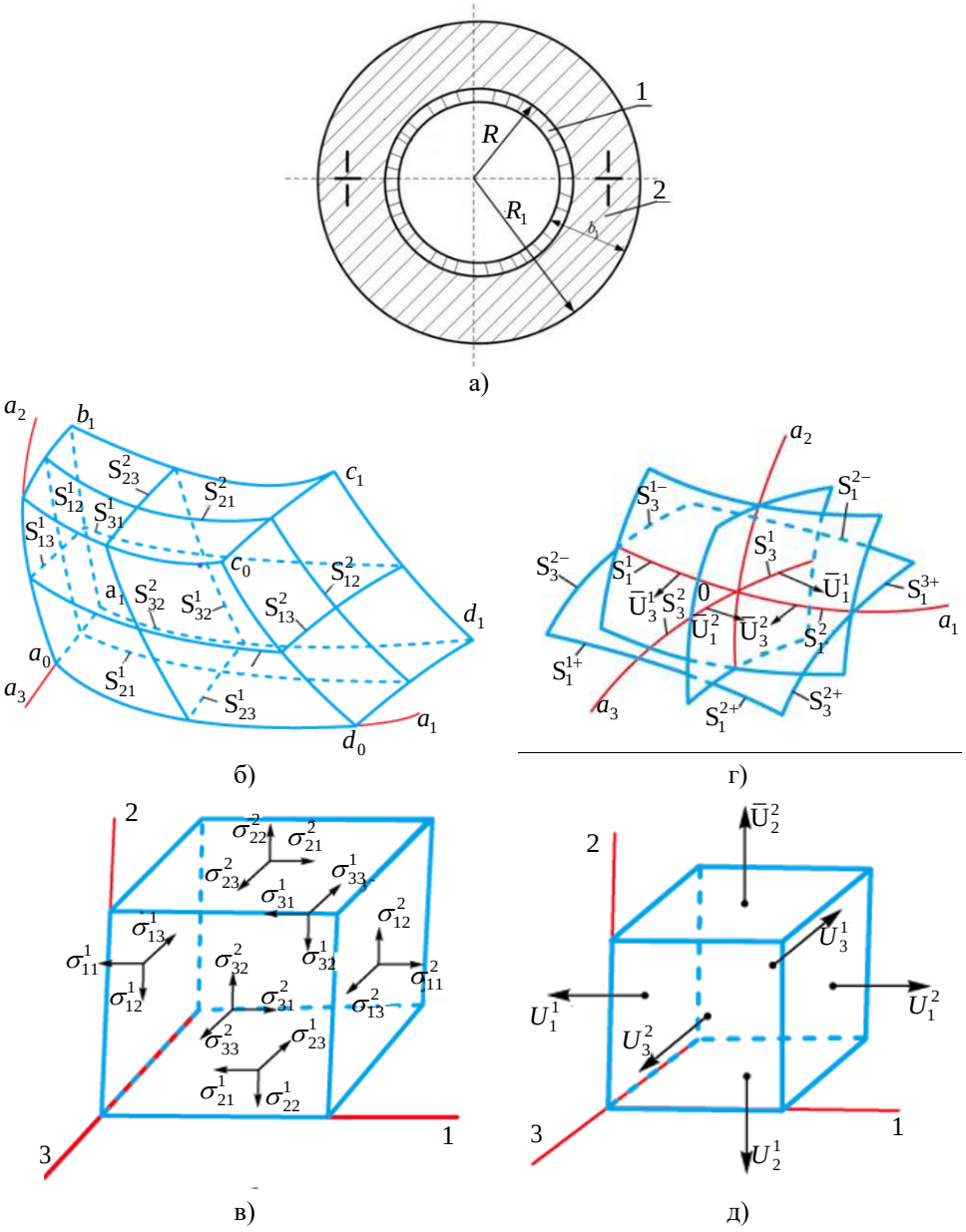


Рис. 1. Схема металлической разборной конструкции устройства (а);
1 – литейная форма; 2 – разъемная матрица; схема обозначения дуг сетки для расчета нормальных напряжений и перемещений в криволинейном элементе (б, г);
распределение напряжений (в);
распределение перемещений по граням элемента (д)

В результате охлаждения матрицы в ЛФ 1 реализуется напряженное состояние всестороннего сжатия. Затем в ЛФ 1 заливается жидкий металл, герметизируют ЛФ и впрыскивают в нее дозированное количество воспламеняющейся жидкости, которая, сгорая, созда-

ет в ЛФ внутри форменное газовое давление. Под этим давлением и происходит кристаллизация жидкого металла до требуемого значения толщины отливки сферической формы.

Математическая постановка задачи. В результате заливки жидкого металла в сборную металлическую конструкцию сферической формы будем иметь: I — область жидкого металла; II — область затвердевшего металла (корочка); III — литейная форма; IV — матрица.

Использую уравнения линейной теории упругости, запишем в декартовой системе координат систему уравнений:

Область I:

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = -P; \quad \dot{\theta} = \bar{\alpha}_1 \Delta\theta . \tag{1}$$

Область II, III, IV:

$$\begin{gathered} \sigma_{ij,j} = 0; \ \sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij} = 2G_p\varepsilon_{ij}^*; \quad \varepsilon_{\text{ij}}^* = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\varepsilon\delta_{ij}; \\ \varepsilon = \varepsilon_{ii}; \varepsilon_{ii} = 3k_p\sigma + 3\alpha_p\left(\theta_n - \theta_p^*\right); \\ \varepsilon_{ij} = 0,5\left(U_{i,j} + U_{j,i}\right); \\ \dot{\theta} = \bar{a}_p\Delta\theta \end{gathered} \tag{2}$$

где σ_{ij} — компоненты тензора напряжений, U_i — перемещения; ε_{ij} — компоненты тензора упругих деформаций; σ — гидростатическое напряжение; $G_p(\theta)$ — модуль сдвига оболочки (p); $p = II, III, IV$; δ_{ij} — символ Кронекера; k_p — коэффициент объемного сжатия в области (p), α_p — коэффициент линейного расширения в области (p); γ — удельный вес разливаемого металла; $\bar{a}_p$ — коэффициент температуропроводности в области (p); $a_p = \dfrac{\lambda}{c\gamma}$; c — удельная теплоемкость; λ — коэффициент теплопроводности; θ_n — текущая температура; θ_p^* — начальная температура в области (p). В системе (2) используется суммирование по повторяющимся индексам.

В процессе охлаждения жидкого металла при условии, что температура металла $\theta_M \le \theta_K$ (θ_K — температура кристаллизации) определяется толщина затвердевшего слоя из решения уравнения межфазового перехода:

$$\frac{d\theta_1}{dn}\lambda_1 - \frac{d\theta_2}{dn}\lambda_2 = \frac{d\Delta}{d\tau}L\rho, \tag{3}$$

где θ_1 и θ_2 — соответственно температуры в твердой и жидкой фазах, λ_1 и λ_2 — коэффициенты теплопроводности в соответствующих фазах, Δ — толщина корочки; L — скрытая теплота плавления, ρ — плотность, n — нормаль к границе двух фаз; τ — время.

Время процесса кристаллизации τ^* разбивается на малые шаги $\Delta\tau_n$ (n — номер временного шага). На каждом временном шаге $\Delta\tau_n$ вычисляется изменение толщины твердой фазы Δ_n

$$\Delta = \sum_1^n \Delta_n \ .$$

При этом предполагается, что температура в твердой фазе по толщине Δ_n изменяется по линейному закону и градиент температуры в жидкой фазе равен нулю. С учетом этого, решение уравнение (3) дает следующую зависимость.

$$\Delta_n = C\sqrt{\tau}\ ,\ C = \sqrt{\frac{2\Delta\theta_1\lambda_1}{\rho L}}\ , \tag{4}$$

здесь $\Delta\theta_1$ — перепад температур в твердой фазе вблизи фронта кристаллизации.

Для решения уравнений теории упругости в системе (2) использовался численный метод [5], суть которого заключается в разбиении исследуемой области семействами ортогональных поверхностей на элементы. Для каждого элемента в принятой системе ортогональных координат (α_i, $i = 1,2,3$) в разностной форме записывается система уравнений (1), включающая средние значения напряжений и перемещений по граням элемента дуг, ограничивающие его объем (рис.1, б).

Перепишем уравнения равновесия и дифференциальные выражения ε_{ij} (2) в разностной форме в соответствии с работой [5]:

$$\begin{gathered} S_{ik}\Delta S_{ij}(\sigma_{ii}-\sigma_{jj}) + S_{ij}\Delta S_{ki}(\sigma_{ii}-\sigma_{kk}) + 0,5\Delta\sigma_{ii}S_{ij}S_{ki} + \\ +0,5\Delta\sigma_{ik}S_{ki}S_{kj} + 0,5\Delta\sigma_{ij}S_{ji}S_{jk} + (S_{ji}\Delta S_{jk} + 2S_{jk}\Delta S_{ji})\sigma_{ij} + \\ +(S_{ki}\Delta S_{kj} + 2S_{kj}\Delta S_{ki})\sigma_{ik} = 0; \\ i,\ j,k = 1,2,3; i \neq j \neq k; \end{gathered} \tag{5}$$

Здесь суммирование по индексам i, j, k отсутствует, а также внесены обозначения

$$\sigma_{ij} = 0,5(\sigma_{ij}^1 + \sigma_{ij}^2)\ ,\ \Delta\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^2 - \sigma_{ij}^1\ ,\ (i,j = 1,2,3)\ ,$$

где $\sigma_{ii}^d\,(i = 1,2,3;\ d = 1,2)$ — нормальное напряжение, действующее на криволинейной поверхности «d» элемента (m), нормалью к кото-

рой является касательная к координате α_i; $\sigma_{ij}^{d}\,(i \neq j)$ — касательное напряжение в направлении α_j по криволинейной поверхности «d» элемента (m).

Значения длин дуг элементов сетки S_{ik}^{j} вычисляются как среднее от значения длин дуг границы граней (ребер) (рис. 1, б), при этом введены обозначения

$$S_{ij} = S_{ij}^{1} + S_{ij}^{2},\ \Delta S_{ij} = S_{ij}^{2} - S_{ij}^{1}.$$

Для нормальных компонент тензора деформаций используем следующие формулы [5]:

$$\varepsilon_{ii} = \frac{2\Delta U_i}{S_{ji}} + \frac{2U_j}{S_{ji}} \cdot \frac{\Delta S_{ji}}{S_{ij}} + \frac{2U_k}{S_{ki}} \cdot \frac{\Delta S_{ki}}{S_{ik}}, \quad (i, j, k = 1, 2, 3;\ i \neq j \neq k) \tag{6}$$

где $U_i = U_i^1 + U_i^2$, $\Delta U_i = U_i^2 - U_i^1$.

Сдвиговые деформации $\varepsilon_{ij}\,(i \neq j)$ по элементу (m) определяются как среднее от значений ε_{ij} в узлах элемента (рис. 1, б)

$$(\varepsilon_{ij})_m = \frac{1}{8}\left(\varepsilon_{ij}^{a_0} + \varepsilon_{ij}^{b_0} + \varepsilon_{ij}^{c_0} + \varepsilon_{ij}^{d_0} + \varepsilon_{ij}^{a_1} + \varepsilon_{ij}^{b_1} + \varepsilon_{ij}^{c_1} + \varepsilon_{ij}^{d_1}\right). \tag{7}$$

Значения ε_{ij}^{0} в узле (рис. 1, в) согласно [5] имеет вид

$$\varepsilon_{ij}^{0} = \frac{2\Delta\bar{U}_j}{S_i} - 0{,}5\bar{U}_j \frac{S_j^{+} - S_j^{-}}{S_i S_j} + \frac{2\Delta\bar{U}_i}{S_j} - 0{,}5\bar{U}_i \frac{S_i^{+} - S_i^{-}}{S_i S_j}, \quad (i, j = 1, 2, 3;\ i \neq j) \tag{8}$$

где

$$S_i = S_i^1 + S_i^2;\ \Delta\bar{U}_i = \bar{U}_i^2 - \bar{U}_i^1;$$
$$S_i^{+} = S_i^{1+} + S_i^{2+};\ S_i^{-} = S_i^{1-} + S_i^{2-}.$$

значения $\bar{U}_i^j\,(j = 1, 2)$ вычисляются как средние от значений перемещений по граням элемента, примыкающих к данному ребру.

Справедливость полученных выражений (5), (6) и (8) показана в работе [5] на примере выделенного элемента в цилиндрической системе координат.

С учетом того, что

$$\sigma_{ii} - \sigma_{jj} = 2G_p(\varepsilon_{ii} - \varepsilon_{jj}),$$

для элемента (рис. 1, б) алгебраическую систему уравнений перепишем в виде

$$\begin{gathered} S_{ik}\Delta S_{ij}\,2G_p(\varepsilon_{ii}-\varepsilon_{jj})+S_{ij}\,2G_p\Delta S_{ki}(\varepsilon_{ii}-\varepsilon_{kk})+0,5\Delta\sigma_{ii}S_{ij}S_{ki}+ \\ +0,5\Delta\sigma_{ik}S_{ki}S_{kj}+0,5\Delta\sigma_{ij}S_{ji}S_{jk}+(S_{ji}\Delta S_{jk}+2S_{jk}\Delta S_{ji})\sigma_{ij}+ \\ +(S_{ki}\Delta S_{kj}+2S_{kj}\Delta S_{ki})\sigma_{ik}=0; \\ i,\,j,k=1,2,3;\ i\neq j\neq k. \end{gathered} \tag{9}$$

$$\sigma_{11}-\sigma_{22}=2G_p(\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22})\,, \tag{10}$$

$$\begin{gathered} \sigma_{11}-\sigma_{33}=2G_p(\varepsilon_{11}-\varepsilon_{33}); \\ \sigma_{ij}=2G_p\varepsilon_{ij};\ i,j=1,2;\ i\neq j; \end{gathered} \tag{11}$$

$$\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33}-3k_p\sigma-3\alpha_p(\theta-\theta_p^*)=0\,. \tag{12}$$

Для осесимметричных задач имеем

$$\sigma_{31}=\sigma_{32}=0;\ \varepsilon_{13}=\varepsilon_{23}=0;\ u_3=0.$$

Тогда система уравнений (5) и выражения ε_{12} примут вид

$$\begin{gathered} S_{13}\Delta S_{12}(\sigma_{11}-\sigma_{22})+S_{12}\Delta S_{13}(\sigma_{11}-\sigma_{33})+0,5\Delta\sigma_{11}S_{12}S_{13}+ \\ +0,5\Delta\sigma_{12}S_{21}S_{23}+(S_{21}\Delta S_{23}+2S_{23}\Delta S_{21})\sigma_{21}=0; \\ S_{21}\Delta S_{23}(\sigma_{22}-\sigma_{33})+S_{23}\Delta S_{21}(\sigma_{22}-\sigma_{11})+0,5\Delta\sigma_{22}S_{23}S_{21}+ \\ +0,5\Delta\sigma_{21}S_{12}S_{13}+(S_{12}\Delta S_{13}+2S_{13}\Delta S_{12})\sigma_{21}=0. \end{gathered} \tag{13}$$

$$\begin{gathered} \sigma_{11}-\sigma_{22}=2G_p(\varepsilon_{11}-\varepsilon_{33}); \\ \sigma_{22}-\sigma_{33}=2G_p(\varepsilon_{22}-\varepsilon_{33}). \end{gathered} \tag{14}$$

$$\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33}=3k_p\sigma+3\alpha_p(\theta_n-\theta_p^*). \tag{15}$$

$$\begin{gathered} \varepsilon_{11}=\frac{2\Delta U_1}{S_{21}}+\frac{2U_2}{S_{21}}\cdot\frac{\Delta S_{21}}{S_{12}};\quad \varepsilon_{22}=\frac{2\Delta U_2}{S_{32}}+\frac{2U_1}{S_{12}}\cdot\frac{\Delta S_{12}}{S_{21}}; \\ \varepsilon_{22}=\frac{2U_1}{S_{31}}\cdot\frac{\Delta S_{13}}{S_{31}}+\frac{2U_2}{S_{23}}\cdot\frac{\Delta S_{23}}{S_{32}}. \end{gathered} \tag{16}$$

Здесь

$$U_i=U_i^1+U_i^2;\ \Delta U_i=U_i^2-U_i^1\ (i=1,2)\,.$$

Уравнения (13) – (16) записаны с учетом того, что

$$\frac{\partial U_1}{\partial x_3}=0\,;\ \frac{\partial\sigma_{3i}}{\partial x_3}=0\,;\ i=1,2,3\,.$$

Для тел вращения имеет место

$$\Delta S_{31}=0;\ \Delta S_{32}=0;\ \frac{\Delta\bar{U}_1}{S_3}=0;\ \frac{\Delta\bar{U}_2}{S_3}=0;\ U_3=0.$$

на поверхности $x_1x_3: S_1^+ - S_1^- = 0;$ на поверхности $x_2x_3: S_2^+ - S_2^- = 0$ сдвиговые значения $\varepsilon_{ij}\,(i\neq j)$ запишутся для узла (0) в виде

$$\varepsilon_{12}^0=\frac{2\Delta\bar{U}_2}{S_1}-0,5\bar{U}_2\frac{S_2^+-S_2^-}{S_1S_2}+\frac{2\Delta\bar{U}_1}{S_2}-0,5\bar{U}_1\frac{S_1^+-S_1^-}{S_1S_2},\qquad(17)$$

где

$$S_i=S_i^1+S_i^2;\ \Delta\bar{U}_i=\bar{U}_{i2}^2-\bar{U}_{i1}^1;\ S_i^+=S_i^{1+}+S_i^{2+};\ S_i^-=S_i^{1-}+S_i^{2-}.$$

значения $\bar{U}_i$ вычисляются как средние от значения U_i по граням элемента.

В нашем случае, имеем одномерную задачу. Рассмотрим меридианное сечение (рис.2), I – I — ось вращения, R — наружный радиус литейной формы; $R_{отл}$ – внешний радиус отливки; $h_1 = S$ — толщина затвердевшей корочки отливки; h_2 — толщина стенки литейной формы; h_3 — толщина стенки матрицы; S_1 — поверхность контакта жидкого и затвердевшего твердого металла; S_2 — поверхность контакта затвердевшего металла и литейной формы; S_3 — поверхность контакта литейной формы и матрицы; S_4 — свободная поверхность матрицы; S_5, S_6 — поверхности вырезанной части шаровой конструкции.

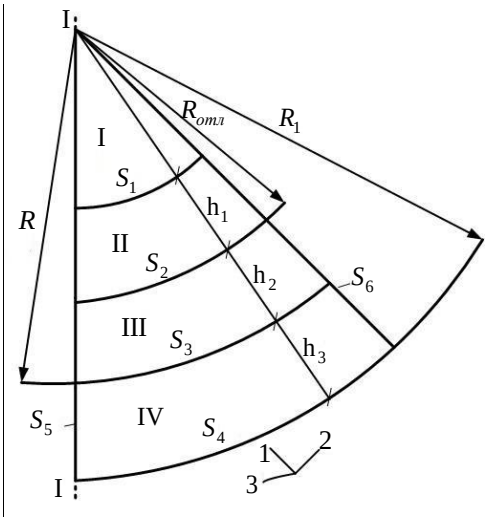


Рис. 2. Расчетная схема (часть шарового сегмента) конструкции:
$R_1 = R + h_3;\ R_{отл} = R - h_2;\ b_1 = h_2 + h_3.$

Для одномерной осесимметричной задачи в ортогональной системе координат (α_1, α_2) имеем

$$\sigma_{ij} = 0;\ i \neq j;\ u_i = 0;\ i = 2,3;\ \sigma_{22} = \sigma_{33};$$

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33};\ \varepsilon_{ij} = 0;\ i \neq j.$$

Тогда имеем систему уравнений

$$\Delta S_{12} 2G_p(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}) + 0,5\Delta\sigma_{11} S_{12} = 0; \tag{18}$$

$$\sigma_{11} - \sigma_{22} = 2G_p(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}); \tag{19}$$

$$\sigma = (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})/3; \tag{20}$$

$$\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = 3k_p\sigma + 3\alpha_p(\theta_n - \theta_p^*); \tag{21}$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{\Delta u_1}{\Delta R};\ \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \frac{u_1}{2R_C}; \tag{22}$$

где R_C — расстояние до центра тяжести элемента.

Для решения уравнения теплопроводности используется численный метод, описанный в работе [5]. В соответствии с данным методом, для каждого внутреннего k-го элемента записывается тепловой баланс, из которого выводится уравнение теплопроводности в разностном виде и строится итерационная процедура

$$\theta_k = \frac{\theta_k^* + t_{12}\theta_1^+ + t_{11}\theta_1^- + t_{21}\theta_2^- + t_{32}\theta_3^+ + t_{31}\theta_3^-}{1 + t_{12} + t_{11} + t_{22} + t_{21} + t_{32} + t_{31}}. \tag{23}$$

Здесь

$$t_{11} = \frac{2(\lambda_k + \lambda_1^-)}{S_{21} + S_{21}^-} F_1^1 \cdot A;\ \ t_{12} = \frac{2(\lambda_k + \lambda_1^+)}{S_{21} + S_{21}^+} F_1^2 \cdot A;$$

$$t_{21} = \frac{2(\lambda_k + \lambda_1^-)}{S_{12} + S_{12}^-} F_2^1 \cdot A;\ \ t_{22} = \frac{2(\lambda_k + \lambda_2^+)}{S_{12} + S_{12}^+} F_2^2 \cdot A;$$

$$t_{31} = \frac{2(\lambda_k + \lambda_3^+)}{S_{13} + S_{13}^-} F_3^1 \cdot A;\ \ t_{32} = \frac{2(\lambda_k + \lambda_1^+)}{S_{23} + S_{23}^-} F_3^2 \cdot A; \tag{24}$$

$$A = \frac{\Delta\tau}{c_k\gamma_k V_k};\ V_k = \frac{S_{12} \cdot S_{13} \cdot S_{21}}{8};\ F_i^j = S_{ik}^j \cdot S_{ip}^j;\ (i \neq k \neq p);$$

$$S_{ij} = S_{ij}^1 + S_{ij}^2;\ S_{ij}^+ = S_{ij}^{1+} + S_{ij}^{2+};\ S_{ij}^- = S_{ij}^{1-} + S_{ij}^{2-};\ (i,k,p = 1,2,3;\ j = 1)$$

где θ_k^* — средняя температура в k-ом элементе в начале временного шага $\Delta\tau_m$; c_k, γ_k, V_k — соответственно удельная теплоемкость, удельный вес и объем k-го элемента; λ_k, θ_k — соответственно зна-

чения коэффициента теплопроводности и температура в k-ом элементе в конце временного шага $\Delta\tau_m$; λ_i^-, θ_i^- — соответственно коэффициент теплопроводности и температура в элементе, следующим за элементом k по координате α_1 в отрицательную сторону; λ_i^+, θ_i^+ — аналогичные параметры в положительном направлении; S_{ij}^p — среднее значение от дуг ребер элементов. Так, например $S_{12}^1 = 0,5(|a_0 b_0| + |a_1 b_1|)$, тогда $S_{21} = S_{31}$ и $S_{pi} = S_{ji}(p \neq j \neq i)$ (рис.1, б).

Выражение (24) может рассматриваться как система уравнений, $k = 1,\ldots,n$, где n — число элементов, на которые разбита область.

Положим, что c_k, γ_k, $V_k = const$.

В такой постановке имеем одномерную задачу. На рис. 1, б представлена расчетная схема (часть шарового слоя) с учетом осевой симметрии (I-I — ось вращения). Тогда система (23) будет линейная и может быть решена итерационным методом. В работе [5] доказывается сходимость итерационной процедуры (23).

Для нашей одномерной задачи выражение (23) имеет вид:

$$\theta_k = \frac{\theta_k^* + t_{12}\theta_1^+ + t_{11}\theta_1^-}{1 + t_{12} + t_{11}}. \tag{25}$$

Граничные условия:

$$\begin{gathered}
\sigma_{12} = \sigma_{23} = \sigma_{13} = 0;\ u_2 = u_3 = 0;\ \sigma_{22} = \sigma_{33};\ \varepsilon_{12} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{13} = 0; \\
\sigma_{11}\big|_{S_4} = 0;\ \sigma_{11}\big|_{S_1} = -P_1; \\
\theta_I^* = \theta_k;\ \theta_{II}^* = 20^0 C;\ \theta\big|_{S_4} = 20^0 C; \\
\theta_{III}^* = \theta_M;\ q_i = 0; i = 2,3;
\end{gathered} \tag{26}$$

где температура θ_M может варьироваться; q_i, $i = 5,6$ — тепловой поток по поверхностям S_5, S_6.

Переход к эквивалентной системе уравнений. Разобьем исследуемую область на N частей по координате α_1 (рис. 2) от $\alpha_1 = 0$ до $\alpha_1 = \alpha_1^*$. Тогда будем иметь N элементов.

Количество неизвестных: $u_1\{N+1\}$; $\sigma_{11}\{N-1\}$; $\sigma_{22}\{N\}$; $\sigma_{22}^1 = \sigma_{22}^2$; $\sigma\{N\}$; то есть имеем 4N неизвестных и 4N уравнений в численном виде (18), (19), (20), (21)

Разобьем все неизвестные на две группы (множества): независимые и зависимые.

Примем за независимые переменные $X = \left\{\sigma;\ u_1'\big|_{S_3}\right\}$, всего $(N+1)$ независимых переменных. Построим последовательность по определению зависимых переменных и новую (эквивалентную) систему уравнений.

Выразим из уравнения (21) u_i^2 с учетом (22)

$$u_1^2 = u_1^1 + A_1, \tag{27}$$

где A_1 — оператор, не содержащий u_1^2. Следуем по области от $\alpha_1 = 0$ до $\alpha_1 = \alpha_1^*$.

Рассмотрим уравнения (18), выразим из них σ_{11}^1

$$\sigma_{11}^1 = \sigma_{11}^2 + A_2, \tag{28}$$

где A_2 — оператор, не содержащий σ_{11}^1.

Данные рекуррентные выражения будем удовлетворять от $\alpha_1 = \alpha_1^*$ до $\alpha_1 = 0$.

На поверхности S_3 имеет место уравнение

$$F_1 = \sigma_{11}^1\big|_{S_3} - \sigma_{11}^* = 0, \tag{29}$$

где σ_{11}^* — задана граничными условиями (26).

Из уравнений (19) определяем $\sigma_{22}(\sigma_{22}^1 = \sigma_{22}^2)$ по каждому элементу

$$\sigma_{22} = \sigma_{11} - 2G(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}). \tag{30}$$

Следующая группа уравнений

$$F_2 = \frac{1}{3}\left(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}\right) - \sigma = 0 \tag{31}$$

по каждому элементу.

Таким образом, имеем одно уравнение (29) и N уравнений (31). Всего (N+1) уравнений равное числу независимых переменных. Число неизвестных уменьшилось в несколько раз.

Коэффициенты и свободные члены новой линейной эквивалентной системы уравнений можно найти с помощью следующей процедуры:

Пусть эквивалентная система уравнений имеет вид:

$$\bar{F}_i = \alpha_{ij} x_j + b_i = 0,\ i, j = 1, ..., n.$$

Если положить все неизвестные равными нулю $x_i = 0$, $i = 1,...,n$, то, пробегая вышеприведенную последовательность, и, насчитывая $\bar{F}_i$ по формулам, найдем свободные члены новой системы

$$\bar{F}_i^0 = b_i,\ i = 1,...,n.$$

Далее находим коэффициенты α_{ij}. Для этого положим $x_k = 1$, $x_i = 0$, $(i \neq k;\ i = 1,...,n)$. Опять, пробегая вышеуказанную последовательность, находим $\bar{F}_i^k$ и α_{ik} по формуле

$$\alpha_{ik} = \frac{\bar{F}_i^k - \bar{F}_i^0}{1},\ i = 1,...,n.$$

Таким образом, определяется вся матрица α_{ik} новой эквивалентной системы. Решение этой системы осуществляется по стандартной программе методом Гаусса.

Алгоритм численного решения задачи

1 Время охлаждения τ^* разбивается на конечное число шагов: $\tau^* = \sum \Delta\tau_n$, n — номер временного шага.

2 Исследуемая область разбивается на конечное число ортогональных элементов.

3 Задаются начальные и граничные условия по элементам, образующих рассматриваемую область, и значения констант физико-механических свойств материалов.

4 Вычисляются длины дуг элементов $S_{ik}^j (i,k = 1,2;\ i \neq k;\ j = 1,2)$.

5 Определяется поле температур на временном шаге $\Delta\tau_n$ численным решением уравнения теплопроводности (25) при наличии начальных и граничных условий на данном временном шаге.

6 Если температура в области (I) у поверхности S_1 $\theta\big|_{S_1} \leq \theta_K$, то вычисляется толщина закристаллизовавшейся корочки Δ_n по формуле (4) и следует переход к пункту п. 4.

7 Решается система уравнений (18), (19), (20), (21) с учетом разностных аналогов и разработанной выше методики. Определяются поля напряжений σ_{11}, σ_{22} и перемещений u_1.

8. Производится шаг по времени. Если $\sum \Delta\tau_n < \tau^*$, то выполняется операция п. 4. Если $\sum \Delta\tau_n < \tau^*$ — процесс вычисления закончен.

Результаты численного решения задачи. Примем исходные геометрически параметры: $R = 50$ мм, $h_2 = 10$ мм, $h_3 = 40$ мм.

Физические параметры разливаемой стали: $\theta > 1000°C$ $\left(\theta_м* = 1550°C\right)$: $G = 1000$ кг/мм^2 (по табличным данным [25]); $\alpha = 12 \cdot 10^{-6}$ град$^{-1}$; $\lambda = 0,0298$ Вт/(мм$\cdot^0$ С); (скрытая теплота плавления); $C = 444$ Дж/(кг$\cdot$С); $\gamma = 7,80 \cdot 10^{-6}$ кг/мм^3; $\theta_К = 1450^0 C$.

Физические свойства металлической формы и матрицы такие же, что и физические параметры разливаемой стали, но

$$G = 8400 - 3,75(\theta - 20), \theta < 500^0 C;$$
$$G = 6600 - 0,02(\theta - 500)^2, 500 \le \theta < 1000^0 C; \quad (32)$$
$$G = 1000, 1000 \le \theta < 1450^0 C$$

Заданные временные интервалы $\Delta\tau_n$ составляли: 0,01; 0,02; 0,03; 0,04; 0,05; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 6; 6; 6.

Чтобы лучше осмыслить влияние предварительного напряженного состояния ЛФ приведем последовательный анализ охлаждения стали в металлической литейной форме. На рис. 3 – 8 приведены эпюры σ_{11}, σ_{22} и u_1, температуры (θ) для ненапряженной ЛФ и охватывающей ее матрицы при начальной температуре $\theta_{II}^* = \theta_{III}^* = 20\ ^0C$ при $P = 0$ и $P = 1000$ МПа.

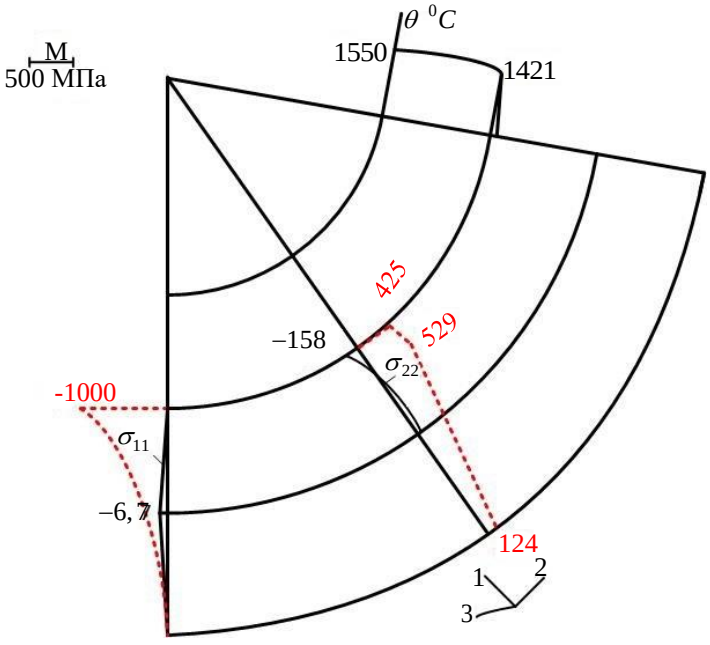


Рис. 3. Эпюра нормальных напряжений σ_{11}, σ_{22}, перемещений u_1 и температуры θ при $P = 0$; $\theta = 20\ ^0C$ (сплошная линия); $P = 1000$ МПа; $\theta = 20\ ^0C$ (пунктирная линия); $S = 0$; $\tau = 0,01$ с; где S – толщина затвердевшей корочки металла, мм; τ – время охлаждения, с.

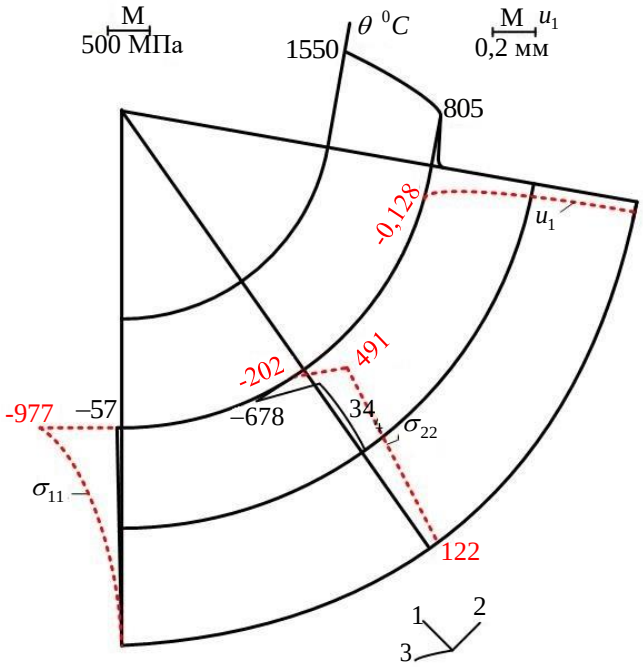


Рис. 4. Эпюра нормальных напряжений σ_{11}, σ_{22}, перемещений u_1 и температуры θ при $P=0$; $\theta=20\ ^0C$ (сплошная линия);
$P=1000$ МПа; $\theta=20\ ^0C$ (пунктирная линия); $S=0,19$; $\tau=0,06$ с

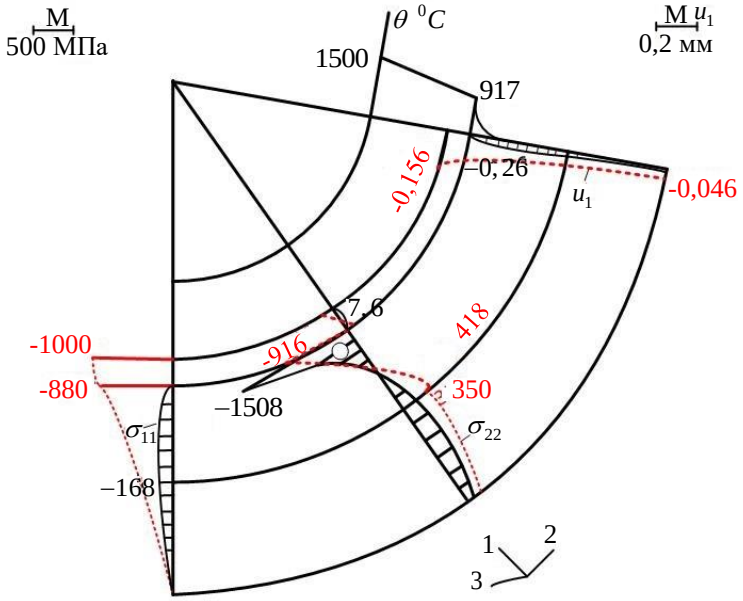


Рис. 5. Эпюра нормальных напряжений σ_{11}, σ_{22}, перемещений u_1 и температуры θ при $P=0$; $\theta=20\ ^0C$ (сплошная линия);
$P=1000$ МПа; $\theta=20\ ^0C$ (пунктирная линия); $S=1,9$; $\tau=0,45$ с

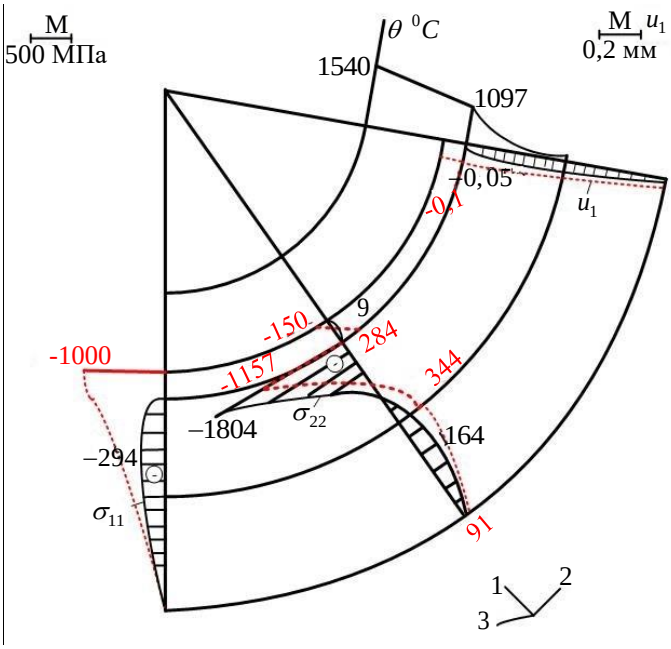


Рис. 6. Эпюра нормальных напряжений σ_{11}, σ_{22}, перемещений u_1 и температуры θ при $P=0$; $\theta=20\ ^0C$ (сплошная линия);
$P=1000$ МПа; $\theta=20\ ^0C$ (пунктирная линия); $S=2,85$; $\tau=1,65$ с

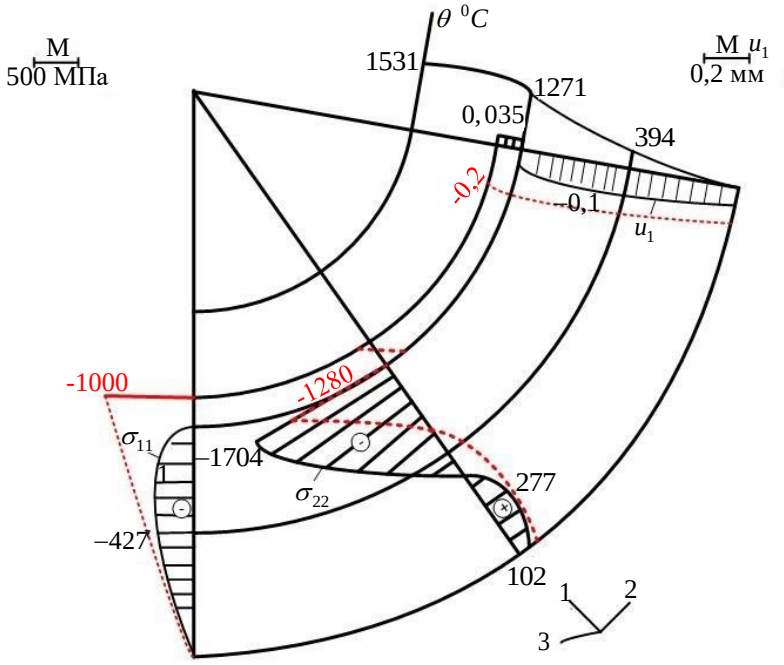


Рис. 7. Эпюра нормальных напряжений σ_{11}, σ_{22}, перемещений u_1 и температуры θ при $P=0$; $\theta=20\ ^0C$ (сплошная линия);
$P=1000$ МПа; $\theta=20\ ^0C$ (пунктирная линия); $S=5,3$; $\tau=7,65$ с

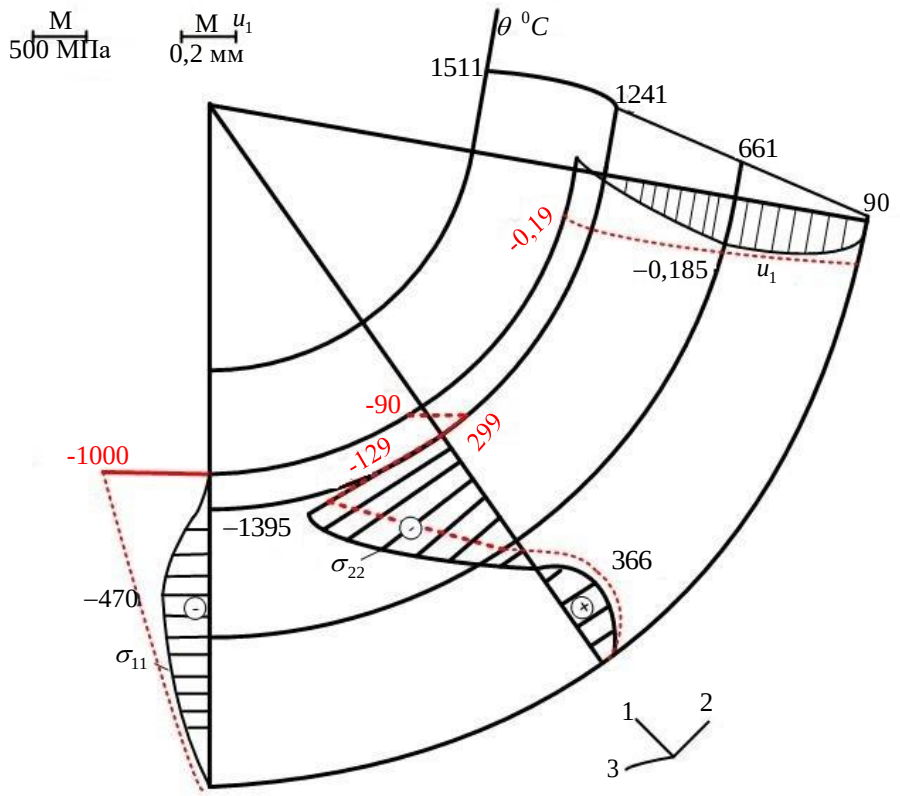


Рис. 8. Эпюра нормальных напряжений σ_{11}, σ_{22}, перемещений u_1 и температуры θ при $P=0$; $\theta=20\ ^0C$ (сплошная линия);
$P=1000$ МПа; $\theta=20\ ^0C$ (пунктирная линия); $S=22,6$; $\tau=8,27$ с

Как было установлено в предыдущих работах [26, 27, 28, 29], при заливке жидкого металла в ЛФ имеют место в начальный момент времени значительные сжимающие напряжения в приконтактных слоях ЛФ с жидким металлом. В тоже время газовое внутреннее давление в ЛФ распирает как ЛФ, так и охватывающую ее матрицу. Следовательно, возникающие в ЛФ сжимающие напряжения, положительно влияют на стойкость ЛФ. Все это хорошо прослеживается на рис. 3 – 8, где сплошными линиями обозначены эпюры при $P=0$, пунктирными при внутреннем газовом давлении $P=1000$ МПа.

На рис. 9 – 14 приведены эпюры σ_{11}, σ_{22} и температуры θ при $P=1000$ МПа; $\theta^*_{III}=20^0C$; $\theta^*_{IV}=20^0C$ (сплошные линии); $\theta^*_{IV}=200^0C$ (пунктирные линии). На рис. 9 показано фактическое влияние предварительного нагрева при заданном внутреннем давлении $P=1000$ МПа.

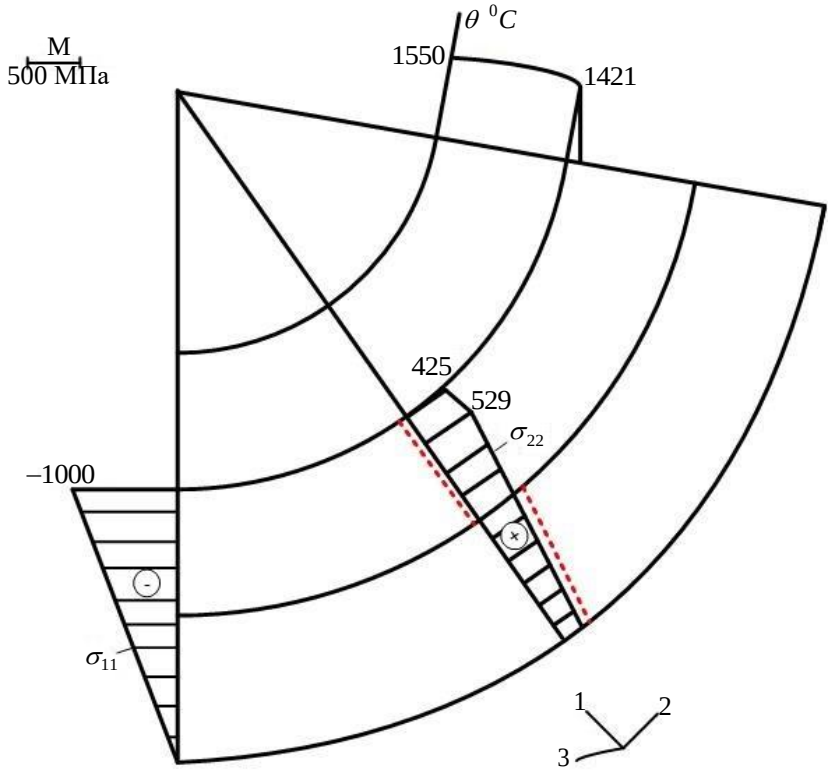


Рис. 9. Эпюра нормальных напряжений σ_{11}, σ_{22}, перемещений u_1 и температуры θ при $P = 1000$ МПа; $\theta = 20\ ^0C$ (сплошная линия); (пунктирная линия); $S = 0$; $\tau = 0,01$ с

По мере охлаждения (рис. 10 – 14) довольно значительно изменяются значения σ_{22} в ЛФ (область III). Без предварительного сжатия напряжения в ЛФ за счет резких температурных перепадов, вызывающих сжимающие напряжения в контактных слоях ЛФ, изменят знак σ_{22}, переходя от растягивающих (рис. 10) в сжимающие (рис. 11 – 14). Предварительное сжатие ЛФ еще больше усиливают сжимающие напряжения. При этом вся область ЛФ находится в зоне напряжений сжатия (всестороннее сжатие). Интересно отметить, что в ненапряженном состоянии ЛФ появляющаяся на поверхности S_2 закристаллизовавшаяся корочка имеет положительные значения σ_{22} (рис. 10 – 14), возрастающие по мере охлаждения ЛФ. При предварительном напряженном состоянии ЛФ это явление быстро исчезает уже с $\tau = 1$ с.

В приграничном слое ЛФ появляются большие сжимающие напряжения. Это объясняется тем, что большие значения температур в этом слое провоцируют увеличение его объема, которому препятствуют холодные периферийные слои и кривизна ЛФ.

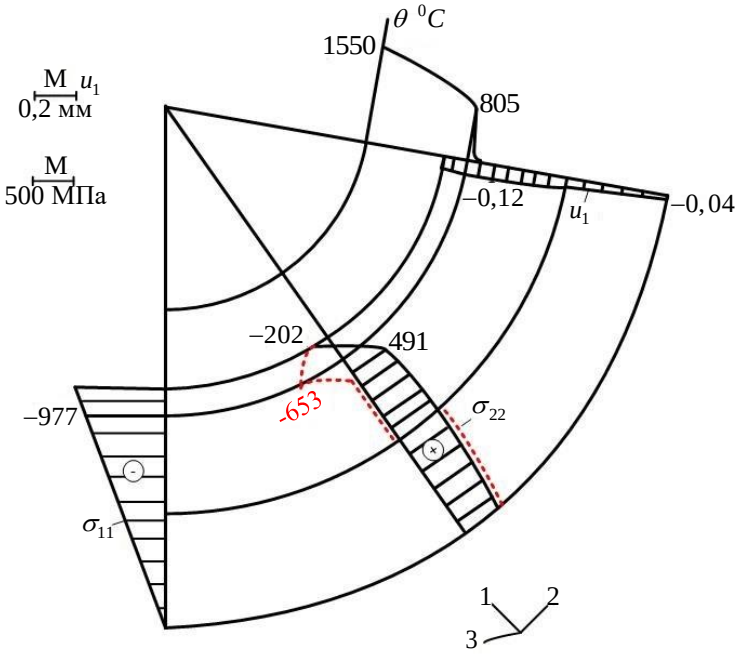


Рис. 10. Эпюра нормальных напряжений σ_{11}, σ_{22}, перемещений u_1 и температуры θ при $P = 1000$ МПа; $\theta = 20\ ^0C$ (сплошная линия); $\theta = 200\ ^0C$ (пунктирная линия); $S = 0{,}17$; $\tau = 0{,}06$ с

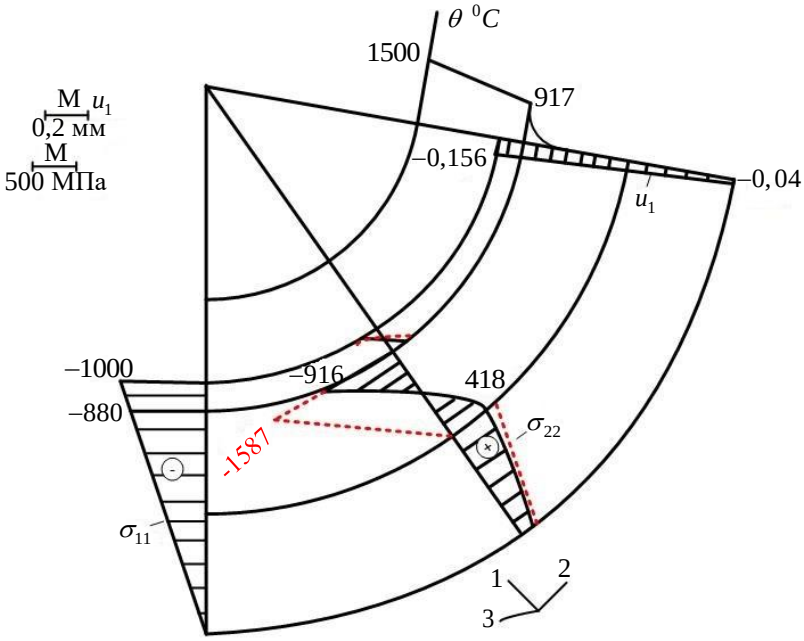


Рис. 11. Эпюра нормальных напряжений σ_{11}, σ_{22}, перемещений u_1 и температуры θ при $P = 1000$ МПа; $\theta = 20\ ^0C$ (сплошная линия); $\theta = 200\ ^0C$ (пунктирная линия); $S = 1{,}34$; $\tau = 0{,}45$ с

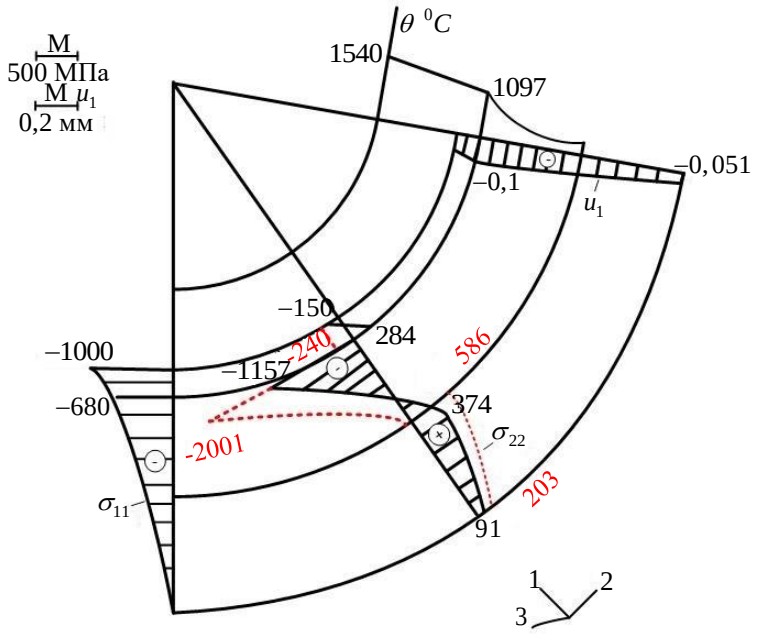


Рис. 12. Эпюра нормальных напряжений σ_{11}, σ_{22}, перемещений u_1 и температуры θ при $P = 1000$ МПа; $\theta = 20\ ^0C$ (сплошная линия); $\theta = 200\ ^0C$ (пунктирная линия); $S = 2,86$; $\tau = 1,65$ с

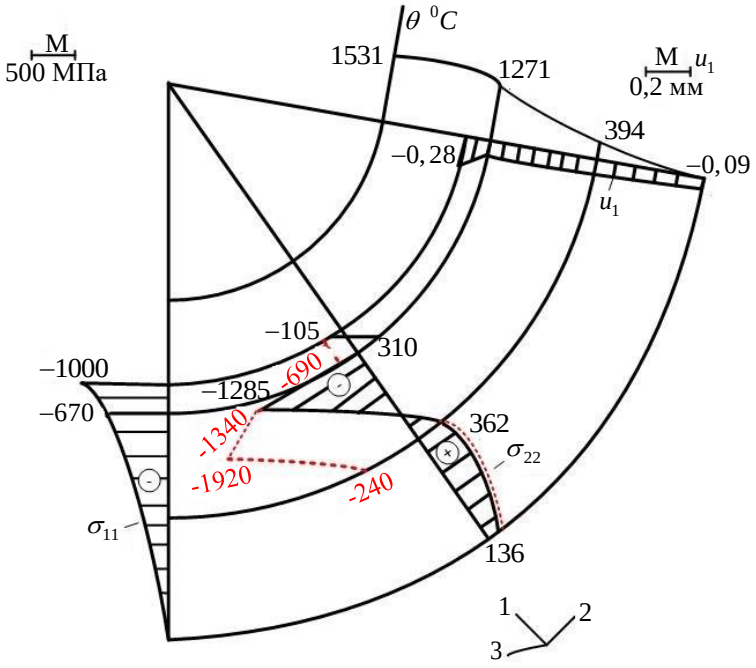


Рис. 13. Эпюра нормальных напряжений σ_{11}, σ_{22}, перемещений u_1 и температуры θ при $P = 1000$ МПа; $\theta = 20\ ^0C$ (сплошная линия); $\theta = 200\ ^0C$ (пунктирная линия); $S = 5,3$; $\tau = 7,56$ с

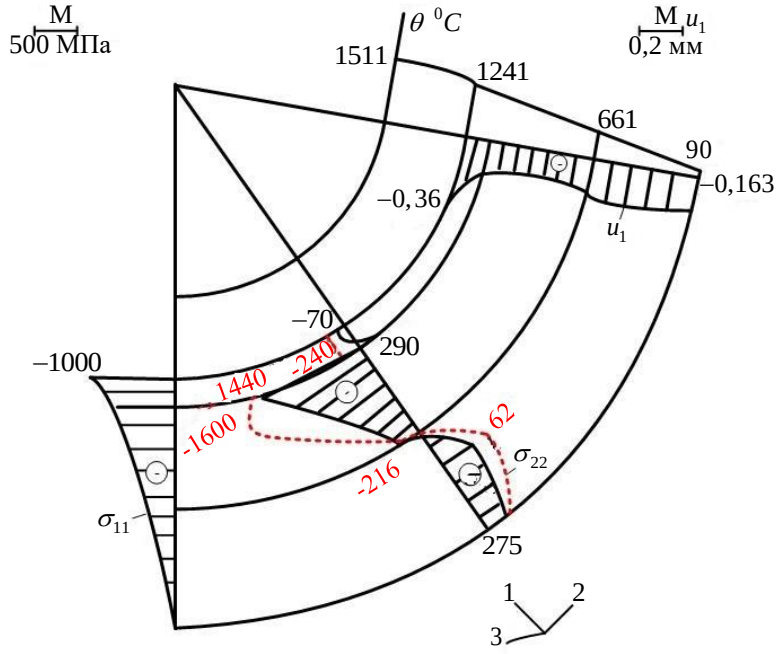


Рис. 14. Эпюра нормальных напряжений σ_{11}, σ_{22}, перемещений u_1 и температуры θ при $P=1000$ МПа; $\theta=20\ ^0C$ (сплошная линия); $\theta=200\ ^0C$ (пунктирная линия); $S=8,27$; $\tau=22,6$ с

Закристаллизовавшиеся слои металла, примыкающие к ЛФ, охлаждаясь, уменьшаются в объеме, чему препятствует большое внутреннее давление и кривизна ЛФ.

Приведенные результаты показывают, что при внутреннем газовом давлении $P=1000$ МПа и предварительном напряженном состоянии ЛФ (охлаждение сжимающей матрицы от $\theta=200\ ^0C$), вся область ЛФ (область II) находится в состоянии всестороннего сжатия в процессе кристаллизации жидкого металла $0\le\tau\le22,6$ с. Толщина закристаллизовавшейся корочки при этом $S=22,6$ мм. Дальнейшее охлаждение и кристаллизация металла ведет к выравниванию полей температур как в ЛФ, так и в матрице, а следовательно, и падению эффекта от предварительного сжатия ЛФ.

На рис. 15 – 20 показаны результаты расчета кристаллизации металла в ЛФ при внутреннем газовом давлении $P=2000$ МПа и охлаждении матрицы, охватывающей ЛФ, $\theta=200\ ^0C$.

Эпюры σ_{11}, σ_{22}, u_1 показаны сплошными линиями при $\theta=20\ ^0C$. Для сравнения – пунктирными линиями показаны эпюры σ_{22} при $P=2000$ МПа и $\theta=200\ ^0C$. В начальный момент напряжения σ_{22} (при $P=2000$ МПа, $\theta=200\ ^0C$) имеют положительны значения в области ЛФ, но уже при $\tau>2$ сек. практически вся область II

(ЛФ) находится в состоянии всестороннего сжатия, хотя нужно отметить, что охватывающая ЛФ матрица находится по напряжениям σ_{22} в состоянии растяжения, и довольно значительном (рис. 20).

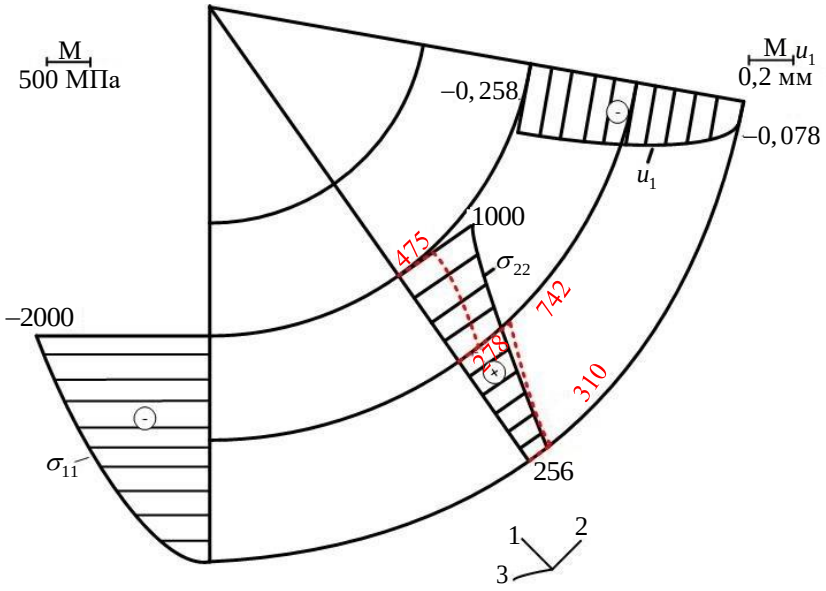


Рис. 15. Эпюра нормальных напряжений σ_{11}, σ_{22}, перемещений u_1 и температуры θ при $P = 2000$ МПа; $\theta = 20\ ^0C$ (сплошная линия); $\theta = 200\ ^0C$ (пунктирная линия); $S = 0$; $\tau = 0,01$ с

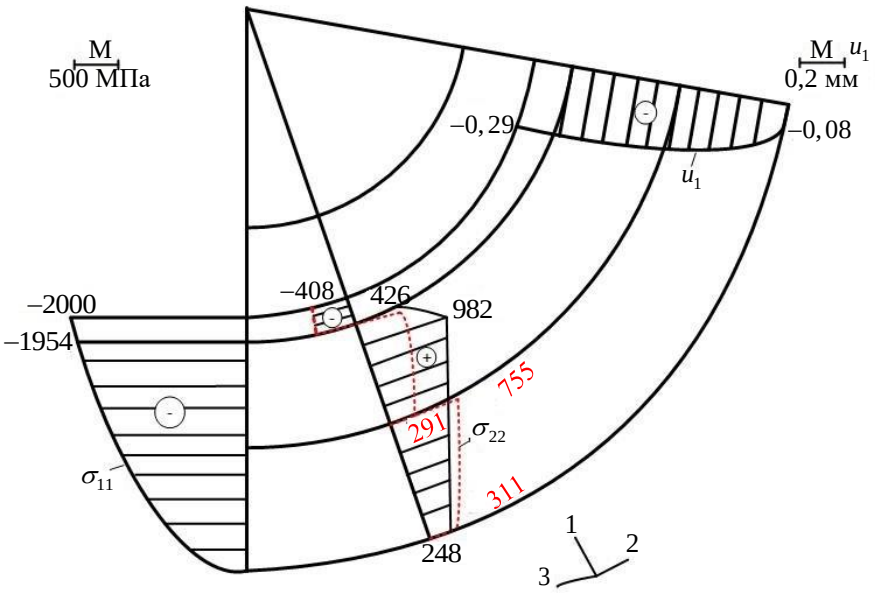


Рис. 16. Эпюра нормальных напряжений σ_{11}, σ_{22}, перемещений u_1 и температуры θ при $P = 2000$ МПа; $\theta = 20\ ^0C$ (сплошная линия); $\theta = 200\ ^0C$ (пунктирная линия); $S = 0,19$; $\tau = 0,06$ с

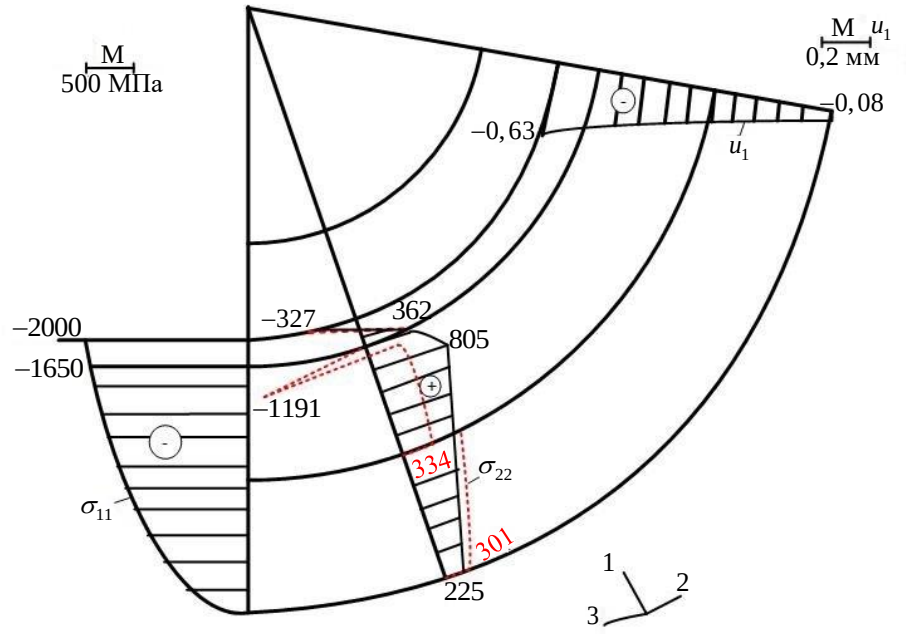


Рис. 17. Эпюра нормальных напряжений σ_{11}, σ_{22}, перемещений u_1 и температуры θ при $P = 2000$ МПа; $\theta = 20\ ^0C$ (сплошная линия); $\theta = 200\ ^0C$ (пунктирная линия); $S = 1,3$; $\tau = 0,45$ с

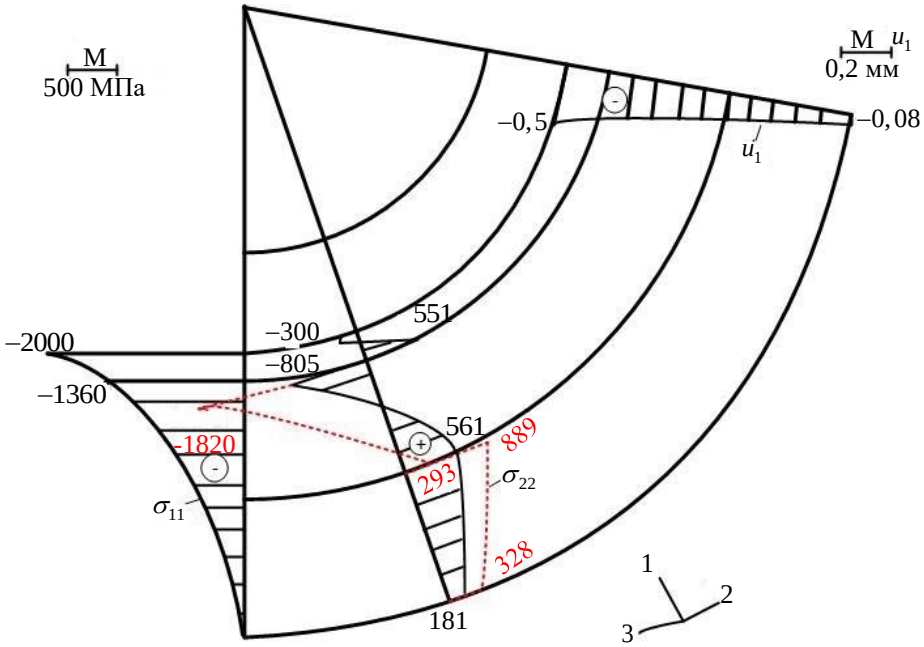


Рис. 18. Эпюра нормальных напряжений σ_{11}, σ_{22}, перемещений u_1 и температуры θ при $P = 2000$ МПа; $\theta = 20\ ^0C$ (сплошная линия); $\theta = 200\ ^0C$ (пунктирная линия); $S = 2,8$; $\tau = 1,65$ с

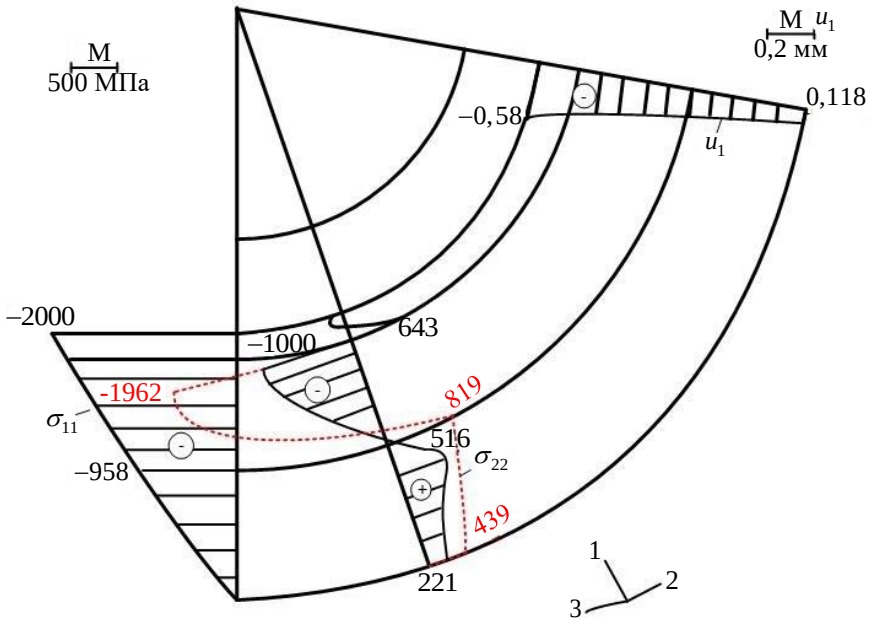


Рис. 19. Эпюра нормальных напряжений σ_{11}, σ_{22}, перемещений u_1 и температуры θ при $P = 2000$ МПа; $\theta = 20\ ^0C$ (сплошная линия); $\theta = 200\ ^0C$ (пунктирная линия); $S = 5,3$; $\tau = 7,56$ с

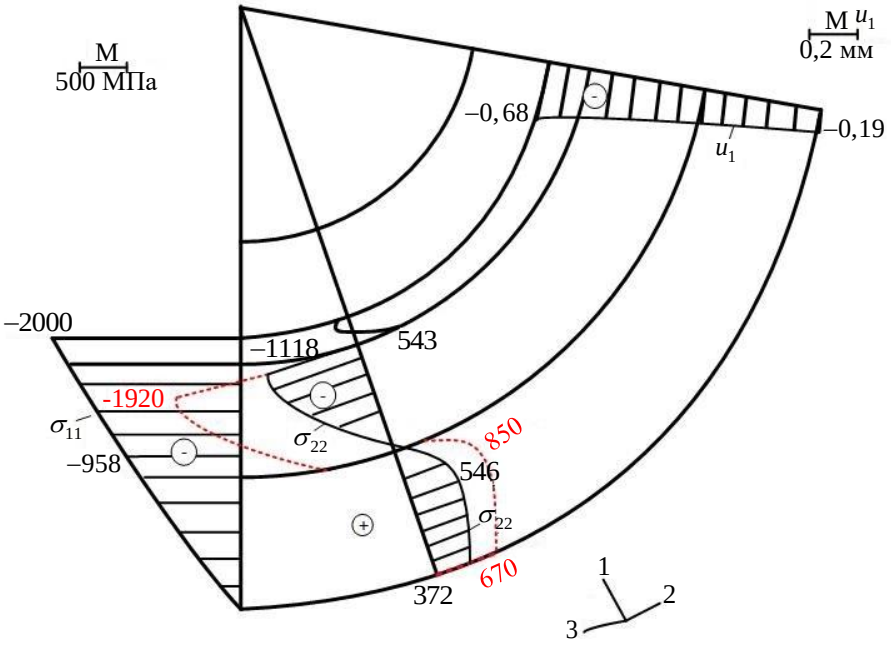


Рис. 20. Эпюра нормальных напряжений σ_{11}, σ_{22}, перемещений u_1 и температуры θ при $P = 2000$ МПа; $\theta = 20\ ^0C$ (сплошная линия); $\theta = 200\ ^0C$ (пунктирная линия); $S = 8,27$; $\tau = 22,56$ с

Газовое давление целесообразно включать не сразу после заливки, а по истечении примерно 8 с., тогда в ЛФ не будет растягивающих напряжений σ_{22} (рис. 19).

По полученным результатам можно полагать, что под действием газового давления (1000 – 2000 МПа) можно получать качественные сферические отливки толщиной до 10 мм.

Таким образом, предложен новый подход к использованию воздействия газового давления на формирующуюся стальную отливку взамен механического прессования, который представляет новые возможности и конкурентоспособные технологии получения одно- и многослойных полых отливок под газовым давлением, новизна которых подтверждена полученными авторами патентами на изобретения.

Заключение.

1 Разработана пространственная математическая модель расчета НДС сферической отливки в процессе ее затвердевания в предварительно напряженной металлической литейной форме, установленной в сферическую матрицу, подверженную тепловой нагрузке.

2 Приведен пример расчета по затвердеванию и охлаждению сферической стальной отливки в металлической форме. Показано, что возникающие в ЛФ сжимающие напряжения положительно влияют на стойкость ЛФ. При внутреннем газовом давлении $P = 1000$ МПа и предварительном напряженном состоянии ЛФ (охлаждение сжимающей матрицы от $\theta = 200^0 C$) вся область ЛФ (область II) находится в состоянии всестороннего сжатия в процессе затвердевания жидкого металла ($0 \le \tau \le 22,6$ с). Дальнейшее охлаждение и затвердевание отливки ведет к выравниванию полей температур как в ЛФ так и в матрице, следовательно, к падению эффекта от предварительного сжатия ЛФ.

3 Газовое давление целесообразно включить через 8 сек. после заливки, когда в ЛФ не будет растягивающих напряжений σ_{22}. Под действием газового давления 1000 – 2000 МПа можно получать качественные стальные сферические отливки толщиной до 10 мм.

4 Результаты вычислительных расчетов по разработанной методологии моделирования позволит значительно сократить объем экспериментальных исследований по доработке и доводке технологии литья сферических отливок под высоким внутриформенным газовым давлением.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №24-29-00214, https://rscf.ru/project/24-29-00214/

ЛИТЕРАТУРА

[1] Руденко В.Л., Баранов В.Л., Сорокатый А.В. Связанная термодинамиче-

ская модель обжатия трубчатого крешерного элемента при выстреле. *Известия Российской академии ракетных и артиллерийских наук*, 2012, № 3(73), с. 25–30.

[2] Белопухова А.К. *Литье под давлением*. Москва, Машиностроение, 1975, 400 с.

[3] Беккер М.Б. *Литье под давлением*. Москва, Машиностроение, 1990, 400 с.

[4] Пат. 2841324 Российская Федерация, МПК B22C 9/18 B22D 7/06, B22D 15/00. *Способ подготовки металлической литейной формы к заливке металлом* / А.И. Евстигнеев, В.И. Одиноков, Э.А. Дмитриев, и др.; заявитель Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Комсомольский-на-Амуре государственный университет»; заявл. 12.11.2024; опубл. 06.06.2025.

[5] Одиноков В.И., Каплунов Б.Г., Песков А.В., Баков А.В. *Математическое моделирование сложных технологических процессов*. Москва, Наука, 2008. с. 178.

[6] Боли Б., Уэйнер Дж. *Теория температурных напряжений*. Москва, Мир, 1964, 512 с.

[7] Карслоу Г., Егер Д. *Теплопроводность твердых тел*. Москва, Наука, 1964, 489 с.

[8] Лыков А.В. *Теория теплопроводности*. Москва, Высшая школа, 1967, 600 с.

[9] Ратников П.Э. Анализ методов расчета термоупругих напряжений в термически массивных стальных заготовках при нагреве (аналитический обзор). *Литье и металлургия*, 2005, № 1, с. 31–34.

[10] Лившиц В.Б., Кушнир А.П., Мамедова И.Ю., Зябнева О.А. Влияние всестороннего газового давления на затвердевание и свойства стальных отливок. *Литейное производство*, 2021, № 5, с. 21–23.

[11] Монастырский В.П., Александрович А.И., Монастырский А.В., Соловьев М.Б., Тихомиров М.Д. Моделирование напряженно-деформированного состояния отливки при кристаллизации. *Литейное производство*, 2007, № 9, с. 29-36.

[12] Березин Д.Т. Численное моделирование теплонапряженного состояния в системе «отливка – матрица пресс-формы» для литья под давлением алюминиевых сплавов. *Технология легких сплавов*, 2023, № 3, с. 48-59.

[13] Ольховик Е.О., Десницкий В.В., Молчанюк Р.А. Экспериментальное исследование силового взаимодействия между отливкой и формой в период затвердевания металла. *Литьё и металлургия*, 2006, № 4 (40), с. 101-104.

[14] Дуюнова В.А., Молодцов С.В., Леонов А.А., Трапезников А. В. Применение методов компьютерного моделирования при изготовлении контурной отливки. *Труды ВИАМ*, 2019, № 11(83), с. 3-11.

[15] Чучунова С.Ю., Петров Б.И., Макеев К.А., Оборин Л.А. Компьютерное моделирование процесса формирования литой заготовки. *Актуальные проблемы авиации и космонавтики*, 2022, Т.1, с. 552-555.

[16] Огородникова О. М., Пигина Е. В., Мартыненко С.В. Компьютерное моделирование горячих трещин в литых деталях. *Литейное производство*, 2007, № 2, с. 27-30.

[17] Смелов В. Г., Вдовин Р. А., Агаповичев А.В. Использование систем численного моделирования для исследования технологического процесса литья лопаток в заготовительном производстве. *Вестник СГАУ*, 2015, № 3-2, с. 391-399.

[18] Илюхин В.Д. Компьютерное моделирование рассредоточения деформаций в методе борьбы с горячими трещинами. *Литейное производство*, 2021, №

3, с. 29-34.

[19] Монастырский А.В., Власов Ю.Б. POLIGONSOFT для литейного производства. *Литьё и металлургия*, 2022, № 3, с. 40-47.

[20] Kozin R.G., Shevchenko K.N. Stress state of a thick spherical shell enclosing a heat-releasing sphere. *Soviet Applied Mechanics*, 1971, vol. 7, no. 7, pp. 19–23.

[21] Gamer U. On the elastic-plastic deformation of a sphere subjected to as spherically symmetrical temperature field. *Journal of Thermal Stresses*, 1988, vol. 11, № 3, pp. 159–173.

[22] Миронов Д.Н., Гончаренко В.П., Чигарева Ю.А., Чигарев В.А. Решение стационарной задачи термоупругости и термопластичности в приближении эффективной модели для тела сферической формы. *Теоретическая и прикладная механика: международный научно-технический сборник*, 2016, № 31, с. 185–195.

[23] Артемов М. А., Барановский Е. С., Верлин А. А., Семка Э. В. Задача о толстостенной сферической оболочке. *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don)*, 2021, Т. 21, № 1, с. 22–31.

[24] Номбре С. Б., Полянский Д. Д., Сторожев С. В., Чан Б. Л. Х. Учет параметрической неопределенности в модели температурных воздействий на внутреннюю поверхность упругого полого шара. *Журнал теоретической и прикладной механики*, 2023, № 2(83), с. 56–66.

[25] Евстигнеев А.И., Одиноков В.И., Дмитриев Э.А., Чернышова Д.В., Евстигнеева А.А., Иванкова Е.П. О трещиностойкости керамической оболочковой формы по выплавляемым моделям при затвердевании в ней шарообразной стальной отливки. *Литейное производство*, 2022, № 9, с. 17-21

[26] Евстигнеев А.И., Дмитриев Э.А., Чернышова Д.В., Одиноков В.И. и др. Моделирование внешнего силового воздействия на стойкость оболочковой формы при заливки в нее стали. *Математическое моделирование*, 2022, № 5(34), с. 61-72.

[27] Одиноков В.И., Дмитриев Э.А., Евстигнеев А.И., Свиридов А.В. *Математическое моделирование процессов получения отливок в керамические оболочковые формы*. Москва, Инновационное машиностроение, 2020, с. 256.

[28] Одиноков В.И., Дмитриев Э.А., Евстигнеев А.И., Потянихин Д.А., Квашнин А.Е. Математическое моделирование процесса деформации металла на литейно-ковочном модуле с измененным приводом боковых бойков. *Математическое моделирование и численные методы*, 2021, № 3, с. 3–23.

[29] Одиноков В.И., Евстигнеев А.И., Дмитриев Э.А., Колошенко Ю.Б., Евстигнеева А.А., Петров В.В. Моделирование стойкости литейных оболочечных форм, находящихся под действием внешней силовой и тепловой нагрузки. *Математическое моделирование и численные методы*, 2024, № 4, с. 31–51.

[30] Введенский Б.А. *Большая советская энциклопедия*. Том 28, 2-е издание. Москва, Советская энциклопедия, 1954, 624 с.

Статья поступила в редакцию 31.07.2025

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Евстигнеев А.И., Одиноков В.И., Потянихин Д.А., Колошенко Ю.Б. Численное моделирование влияния внутриформенного высокого газового давления на затвердевание и охлаждение стальной отливки. *Математическое моделирование и численные методы,* 2025, № 4, с. 19–48.

Евстигнеев Алексей Иванович — д-р техн. наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Комсомольский-на-Амуре государственный университет. e-mail: diss@knastu.ru

Одиноков Валерий Иванович — д-р техн. наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Комсомольский-на-Амуре государственный университет. e-mail: 79122718858@yandex.ru

Потянихин Дмитрий Андреевич — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Авиастроение», Комсомольский-на-Амуре государственный университет. e-mail: 79122718858@yandex.ru

Колошенко Юлия Борисовна — старший преподаватель, Комсомольский-на-Амуре государственный университет. e-mail: koloschenko2011@yandex.ru

Numerical modeling of the effect of high gas pressure inside the mold on the solidification and cooling of a steel casting

© A. I. Evstigneev, V. I. Odinokov, D.A. Potyanikhin, Yu. B. Koloshenko

Komsomolsk-on-Amur State University, Khabarovsk Territory,
Komsomolsk-on-Amur, 681013, Russia

A numerical scheme and algorithm for calculating the stress-strain state (SSS) of a casting during its solidification in a spherical metal casting mold installed in a spherical die subjected to thermal stress have been developed. The calculation is based on the equations of linear elasticity theory, thermal conductivity, and an approved numerical method. A composite spherical casting structure bounded by orthogonal families of surfaces is considered. An example is the problem of solidification and cooling of a spherical steel casting in a metal mold, which is mounted in a matrix. The calculation results are presented in the form of diagrams of normal stresses, displacements, and temperatures along the cross-section of the spherical structure. The analysis of the obtained calculation results is given.

***Keywords**: spherical casting mold, die, stress-strain state, numerical modeling, stress, displacement, spherical steel casting, solidification, cooling*

REFERENCES

[1] Rudenko V.L., Baranov V.L., Sorokatyj A.V. Svyazannaya termodinamicheskaya model' obzhatiya trubchatogo kreshernogo elementa pri vystrele [Coupled thermodynamic model of compression of a tubular crusher element during firing]. *Izvestiya Rossijskoj akademii raketnyh i artillerijskih nauk* [News of the Russian Academy of Missile and Artillery Sciences], 2012, no. 3(73), pp. 25–30.

[2] Belopuhova A.K. *Lit'e pod davleniem* [Casting under pressure].Moscow, Mashinostroyeniye Publ., 1975, 400 p.

[3] Bekker M.B. *Lit'e pod davleniem [Casting under pressure].Moscow, Mashinostroyeniye Publ.,* 1990, 400 p.

[4] Pat. 2841324 C1 Russian Federation, IPC B22C 9/18, B22D 7/06, B22D 15/00.

Method for preparing a metal casting mold for pouring metal/ A.I. Evstigneev, V.I. Odinokov, E.A. Dmitriev et al. Applicant: Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «Komsomolsk-on-Amur State University»; appl. 12.11.2024; publ. 06.06.2025.

[5] Odinokov V.I., Kaplunov B.G., Peskov A.V., Bakov A.V. *Matematicheskoe modelirovanie slozhnyh tekhnologicheskih processov* [Mathematical modeling of complex technological processes]. Moscow, Nauka Publ., 2008, 178 p.

[6] Boli B., Uejner Dzh. *Teoriya temperaturnyh napryazhenij* [Theory of thermal stress]. Moscow, Mir Publ., 1964, 512 p.

[7] Karslou G., Eger D. *Teploprovodnost' tverdyh tel* [Thermal conductivity of solids]. Moscow, Nauka Publ., 1964, 489 p.

[8] Lykov A. V. *Teoriya teploprovodnosti* [Thermal conduction theory]. Moscow, JSC «Vysshaya Shkola», 1967, 600 p.

[9] Ratnikov P.E. Analiz metodov rascheta termouprugih napryazhenij v termicheski massivnyh stal'nyh zagotovkah pri nagreve (analiticheskij obzor) [Analysis of methods for calculating thermoelastic stresses in thermally massive steel workpieces during heating (analytical review)]. *Foundry production and metallurgy*, 2005, no. 1, pp. 31–34.

[10] Livshits V.B., Kushnir A.P., Mamedova I.Yu., Zyabneva O.A. An effect of the omnidirectional gas pressure on solidification and properties of steel castings. *Foundry. Technology and equipment*, 2021, no. 5, pp. 21–23.

[11] Monastyrskiy V.P., Alexandrovich A.I., Monastyrskiy A.V., Soloviev M.B., Tikhomirov M.D. Development of casting technology for large-size gas-turbine engine blades for power installations using the 'POLYGON* and procast systems. *Foundry. Technology and equipment*, 2007, no. 9, pp. 29-36.

[12] Berezin D.T. Numerical simulation of the heat-stressed state in the "casting - die mold" system for die casting of aluminum alloys. *Technology of light alloys*, 2023, no. 3, pp. 48-59.

[13] Olkhovik E.O., Desnitskiy V.V., Molchanyuk R.A. Eksperimental'noe issledovanie silovogo vzaimodejstviya mezhdu otlivkoj i formoj v period zatverdevaniya metalla [Experimental study of the force interaction between the casting and the mold during the solidification of the metal]. *Foundry production and metallurgy*, 2006, no. 4 (40), pp. 101-104.

[14] Duyunova V.A., Molodtsov S.V., Leonov A.A., Trapeznikov A.V. Application of computer modeling methods in the manufacture of complex-contoured shaped casting. *Proceedings of VIAM*, 2019, no. 11(83), pp. 3-11.

[15] Чучунова С.Ю., Петров Б.И., Макеев К.А., Оборин Л.А. Komp'yuternoe modelirovanie processa formirovaniya litoj zagotovki [Computer modeling of the process of forming a cast billet]. *Aktual'nye problemy aviacii i kosmonavtiki* [Current problems of aviation and astronautics], 2022, vol.1, pp. 552-555.

[16] Ogorodnikova O.M., Pigina E.V., Martynenko S.V. Computer simulation of hot cracks in cast parts. *Foundry. Technology and equipment*, 2007, no. 2, pp. 27-30.

[17] Smelov V.G., Vdovin R.A., Agapovichev A.V. spol'zovanie sistem chislennogo modelirovaniya dlya issledovaniya tekhnologicheskogo processa lit'ya lopatok v zagotovitel'nom proizvodstve [Using numerical modeling systems to study the technological process of casting blades in blank production]. *Vestnik SGAU* [Bulletin of SSAU], 2015, no. 3-2, pp. 391-399.

[18] Ilyukhin V.D., Monastyrskiy A.V. Computer simulation of deformation dispersion in the hot crack control method. *Foundry. Technology and equipment*, 2021, no. 3, pp. 29-34.

[19] Monastyrskiy A.V., Vlasov Yu.B. POLIGONSOFT for foundry. *Foundry production and metallurgy*, 2022, no. 3, pp. 40-47.

[20] Kozin R. G., Shevchenko K. N. Stress state of a thick spherical shell enclosing a heat-releasing sphere. *Soviet Applied Mechanics*, 1971, vol. 7, no. 7, pp. 19–23.

[21] Gamer U. On the elastic-plastic deformation of a sphere subjected to as spherically symmetrical temperature field. *Journal of Thermal Stresses*, 1988, vol. 11, № 3, pp. 159–173.

[22] Mironov D. N., Goncharenko V. P., CHigareva YU. A., CHigarev V. A. Reshenie stacionarnoj zadachi termouprugosti i termoplastichnosti v pribli-zhenii effektivnoj modeli dlya tela sfericheskoj formy [Solution of the stationary problem of thermoelasticity and thermoplasticity in the approximation of an effective model for a spherical body]. *Teoreticheskaya i prikladnaya mekhanika: mezhdunarodnyj nauchno-tekhnicheskij sborni* [Theoretical and applied mechanics: international scientific and technical collection], 2016, no. 31, pp. 185–195.

[23] Artemov M.A., Baranovskiy E.S., Verlin A.A., Semka E.V. Thick-walled spherical shell problem. *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don)*, 2021, vol. 21, no. 1, pp. 22–31.

[24] Nombre S.B., Polyanskiy D.D., Storozhev S.V., Chan B.L.H. Taking into account parametric uncertainty in the model of temperature effects on the inner surface of an elastic hollow ball. *Journal of theoretical and applied mechanics*, 2023, no. 2(83), pp. 56–66.

[25] Evstigneev A.I., Odinokov V.I., Dmitriev E.A., Chernyshova D.V., Evstigneeva A.A., Ivankova E.P. on the crack resistance of a ceramic shell mold according to the smelted models when a spherical steel casting solidifies in it. *Foundry. Technology and equipment*, 2022, no. 9, pp. 17-21

[26] Evstigneev A.I., Dmitriev E.A., Chernyshova D.V., Odinokov V.I., et al. Modeling of external force action on a shell mold for pouring steel. *Mathematical modeling*, 2022, no. 5(34), pp. 61-72.

[27] Odinokov V.I., Dmitriev E.A., Evstigneev A.I., Sviridov A.V. *Matematicheskoe modelirovanie processov polucheniya otlivok v keramicheskie obolochkovye formy* [Mathematical modeling of processes for obtaining castings in ceramic shell molds]. Moscow, Limited Liability Company «Innovative Mashinostroenie» Publishers, 2020, pp. 256.

[28] Odinokov V. I., Dmitriyev E. A. , Evstigneev A. I. , Potianikhin D. A. , Kvashnin A. E. Mathematical modeling of the metal deformation process on a casting and forging module with a modified drive of the side strikers. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2021, no. 3, pp. 3–23.

[29] Odinokov V. I., Evstigneev A. I., Dmitriyev E. A., Koloshenko Y. B., Evstigneeva A. A., Petrov V. V. Modeling the durability of casting shell molds under external force and thermal loads. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2024, no. 4, pp. 31–51.

[30] Vvedensky B.A. *Great Soviet Encyclopedia*. Vol. 28, 2nd edition. Moscow, Great Soviet Encyclopedia, 1954, 624 p.

Evstigneev A.I., Dr. Sci. (Eng.), Professor, Chief Researcher, Komsomolsk-na-Amure State University. e-mail: diss@knastu.ru

Odinokov V.I., Dr. Sci. (Eng.), Professor, Chief Researcher, Komsomolsk-na-Amure State University. e-mail: 79122718858@yandex.ru

Potyanikhin D.A., Cand. Sc. (Phys. — Math.), Associate Professor at the Department of Aircraft Engineering, Komsomolsk-na-Amure State University. e-mail: potyanikhin@mail.ru

Koloshenko Yu.B., Senior Lecturer, Komsomolsk-na-Amure State University. e-mail: koloschenko2011@yandex.ru