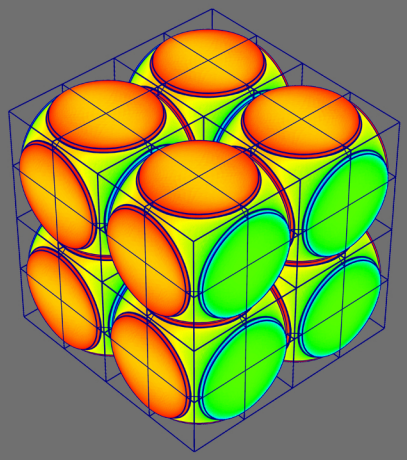
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Григорьев В.Г., Куракин В.В. Моделирование собственных колебаний пространственной гидроупругой конструкции методом конечных элементов на основе смешанного вариационного принципа. Математическое моделирование и численные методы, 2025, № 4, с. 4–18.

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/387/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.217.22
18.11.2026 12:59:47

УДК 534.131.2 DOI: 10.18698/2309-3684-2025-4-418

Моделирование собственных колебаний пространственной гидроупругой конструкции методом конечных элементов на основе смешанного вариационного принципа

© В.Г. Григорьев, В.В. Куракин

Московский авиационный институт, Москва, 125993, Россия

В данной работе рассмотрено применение метода конечных элементов на основе смешанного вариационного принципа для решения пространственной частотно-модальной задачи на примере полости с податливым дном. Выполнен краткий обзор литературы по тематике исследования. Изложена строгая математическая постановка задачи для описанной механической системы. Введен шестигранный конечный элемент среды, подробно изложен процесс численного интегрирования кинетической энергии объема жидкости с использованием квадратуры Гаусса-Лежандра. Введен четырехугольный конечный элемент свободной поверхности, подробно изложен процесс численного интегрирования потенциальной энергии волнообразования с использованием квадратуры Гаусса-Лежандра. Получено выражение для аналитического интегрирования потенциала сил контактного взаимодействия дна с жидкостью применительно к конечному элементу дна. Изложен процесс интегрирования слагаемых функционала полной механической энергии системы, обеспечивающих условия сопряжения введенных степеней свободы. Условие сопряжения смещения свободной поверхности и потенциала смещений объема жидкости проинтегрировано численно с использованием квадратуры Гаусса-Лежандра. Условие сопряжения изгибного перемещения упругого дна и потенциала смещений среды проинтегрировано аналитически. Приведено описание алгоритма численного решения частотно-модальной задачи. Предложены результаты расчетов для случая жесткого дна. Выполнен анализ сходимости конечно-элементных решений к аналитическим для разных вариантов разбиений конечно-элементной сеткой. Предложены результаты расчета для случая упругого дна. Выполнен анализ сходимости результатов решения для случая упругого дна к случаю жесткого дна при увеличении его толщины. Приведен анализ первой формы колебаний для случая упругого дна. Сделаны выводы о применимости реализованных алгоритмов к задачам машиностроения.

Ключевые слова: *собственные колебания, пространственная постановка, метод конечных элементов, смешанный вариационный принцип, гидроупругая конструкция, численное интегрирование, квадратура Гаусса-Лежандра.*

Введение. В литературе распространено моделирование собственных колебаний, устойчивости, статической деформации осесимметричных конструкций, содержащих жидкость, в связи с актуальностью данных задач в ракетно-космической технике [1 – 3]. Использование осевой симметрии позволяет провести решение в двумерной постановке [4 – 6], как в случае плоских задач гидроупруго-

сти [7]. Однако для некоторых отраслей машиностроения важное значение имеет моделирование гидроупругих конструкций именно в трехмерной постановке [8 – 10].

В данной работе рассматривается пространственная задача о собственных колебаниях неосесимметричной тонкостенной полости, заполненной жидкостью. Реализация вычислительных алгоритмов выполнена на языке программирования C++ в среде Microsoft Visual Studio Community. Исходные данные для расчетов подготовлены в среде табличного процессора Excel с использованием языка программирования Visual Basic for Application (VBA).

Математическая постановка задачи. На рис. 1 изображена полость формы прямоугольного параллелепипеда, частично заполненная жидкостью, и прямоугольная система координат. Введены обозначения геометрических многообразий: Q — объем жидкости, U — объем упругого дна, Σ — свободная поверхность жидкости, γ — смачиваемая поверхность дна. Боковые стенки полости жесткие, их поведение не рассматривается.

Введены обозначения степеней свободы, относительно которых проводится решение: φ — потенциал смещений точек объема жидкости, δ — нормальное смещение точек свободной поверхности жидкости, ω — изгибное перемещение срединной поверхности упругого дна, θ_x и θ_y — углы поворота нормали к срединной поверхности упругого дна относительно координатных осей.

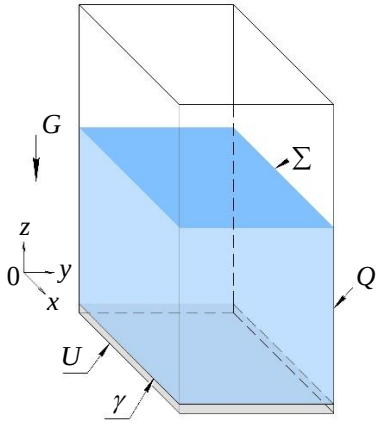


Рис.1. Конструкция с обозначениями рассматриваемых многообразий в декартовой системе координат

Полагается, что жидкость идеальная, несжимаемая, а ее движение подчиняется гипотезе сплошности. Движение жидкости потенциально, как было отмечено при введении степеней свободы. Принимается, что масса жидкости значительно больше массы упругого дна, а толщина дна постоянна и достаточно мала, чтобы принять совпаде-

ние срединной и смоченной поверхности при описании движения конструкции. Механическая система находится в однородном гравитационном поле интенсивности $\bar{G}$, ортогональном поверхности $\sum$ в невозмущенном состоянии. Дно шарнирно закреплено по своей границе.

В работах [5, 11, 12] подробно описано применение вариационного принципа смешанного типа к решению задач гидроупругости. В данной работе применение этого принципа основано на следующем выражении функционала Лагранжа:

$$L = T_Q + T_\Sigma + T_\gamma - V_\Sigma - V_U - V_G, \tag{1}$$

где T_Q — кинетическая энергия объема жидкости, T_Σ и T_γ — кинематические условия связи степени свободы φ со степенями свободы δ и w соответственно, V_Σ — потенциальная энергия волнообразования на свободной поверхности, V_U — потенциальная энергия деформации упругого дна, V_G — потенциал сил контактного взаимодействия смачиваемой поверхности дна с жидкостью.

Выражения для описанных слагаемых приведены в работах [5, 11]:

$$T_Q = -\frac{1}{2}\int_Q \rho(\nabla\dot{\varphi})^2 dQ, \tag{2}$$

$$T_\Sigma = \int_\Sigma \rho\dot{\varphi}\dot{\delta} d\Sigma, \tag{3}$$

$$T_\gamma = \int_\gamma \rho\dot{\varphi}(\dot{\bar{w}}\cdot\dot{\bar{n}}_\gamma) d\gamma, \tag{4}$$

$$V_\Sigma = \frac{1}{2}\int_\Sigma \rho G\delta^2 d\Sigma, \tag{5}$$

$$V_G = -\frac{1}{2}\int_\gamma \left(P_g \bar{u}\left(\frac{\partial\bar{r}}{\partial\alpha_1}\times\frac{\partial\bar{u}}{\partial\alpha_2} - \frac{\partial\bar{r}}{\partial\alpha_2}\times\frac{\partial\bar{u}}{\partial\alpha_1}\right) + \rho\left(\bar{G}\cdot\bar{u}\right)\left(\bar{u}\cdot\left(\frac{\partial\bar{r}}{\partial\alpha_1}\times\frac{\partial\bar{r}}{\partial\alpha_2}\right)\right)\right) d\gamma, \tag{6}$$

где ρ — плотность жидкости, $\bar{n}_\gamma$ — векторное поле внешних нормалей к поверхности γ, P_g — скалярное поле гидростатического давления на поверхность γ, $\bar{u}$ — векторное поле перемещений точек поверхности γ, α_1 и α_2 — размерные координаты на поверхности γ, $\bar{r}$ — векторное поле радиус-векторов точек на поверхности γ.

Выражение для V_U не приведено, т.к. интегрирование потенциальной энергии деформации дна не будет описано в данной работе, соответствующая этому слагаемому матрица жесткости получена в [13].

Как было отмечено ранее, граница дна закреплена шарнирно:

$$w(\bar{r})\big|_{\bar{r}\in\partial\gamma} = 0\,. \tag{7}$$

В работе [12] приведено выражение для функционала Гамильтона, эквивалентное следующему:

$$\psi = \int_0^t L dt\,. \tag{8}$$

Условие стационарности гамильтониана (7) с граничным условием (8) представляет собой замкнутую постановку задачи Штурма-Лиувилля относительно введенных степеней свободы.

Далее приведено подробное описание интегрирования каждого из представленных слагаемых для введенных топологий конечных элементов.

Интегрирование кинетической энергии объема жидкости. Континуальная область Q представлена совокупностью шестигранных восьмиузловых конечных элементов, поэтому интегрирование, как и в случае других геометрических многообразий, проведено для конечного элемента. В общем виде элемент может иметь форму произвольного выпуклого шестигранника, как представлено на рис. 2. Для данной топологии конечного элемента применяется переход к нормализованным изопараметрическим координатам. Преобразование координат имеет вид:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_8 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 & z_6 & z_7 & z_8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1-\xi)(1-\eta)(1-\vartheta) \\ (1-\xi)(1+\eta)(1-\vartheta) \\ (1+\xi)(1+\eta)(1-\vartheta) \\ (1+\xi)(1-\eta)(1-\vartheta) \\ (1-\xi)(1-\eta)(1+\vartheta) \\ (1-\xi)(1+\eta)(1+\vartheta) \\ (1+\xi)(1+\eta)(1+\vartheta) \\ (1+\xi)(1-\eta)(1+\vartheta) \end{pmatrix}, \tag{9}$$

где номера 1, 2, … 8 соответствуют локальным номерам узлов конечного элемента.

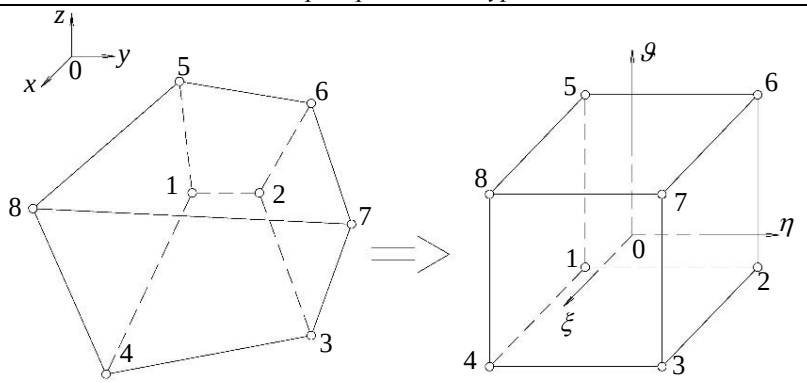


Рис.2. Схема перехода к нормализованным координатам для шестигранного конечного элемента

В ходе преобразований получен вектор, позволяющий лаконично осуществить запись промежуточных результатов:

$$\overline{J}_{coord}\left(a\right)=\begin{pmatrix} J_{1a}+J_{1a\vartheta}\vartheta+J_{1a\eta}\eta+J_{1a\vartheta\eta}\vartheta\eta \\ J_{2a}+J_{2a\vartheta}\vartheta+J_{2a\xi}\xi+J_{2a\vartheta\xi}\vartheta\xi \\ J_{3a}+J_{3a\eta}\eta+J_{3a\xi}\xi+J_{3a\vartheta\xi}\eta\xi \end{pmatrix}, \tag{10}$$

где a — соответствующая координата или степень свободы; ξ, η, ϑ — нормализованные координаты, вспомогательные функции имеют вид:

$$\begin{pmatrix} J_{1a} \\ J_{1a\vartheta} \\ J_{1a\eta} \\ J_{1a\vartheta\eta} \\ J_{2a} \\ J_{2a\vartheta} \\ J_{2a\xi} \\ J_{2a\vartheta\xi} \\ J_{3a} \\ J_{3a\eta} \\ J_{3a\xi} \\ J_{3a\eta\xi} \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Тогда матрица Якоби представляется следующим образом:

$$J=\left(\overline{J}_{coord}\left(x\right)\quad\overline{J}_{coord}\left(y\right)\quad\overline{J}_{coord}\left(z\right)\right). \tag{12}$$

Градиент потенциала смещений имеет вид:

$$\nabla\varphi = J^{-1}\cdot \overline{J}_{coord}\left(\varphi\right). \tag{13}$$

После дифференцирования градиента потенциала смещений по времени представляется возможным найти интеграл кинетической энергии с помощью формул (2) и (13):

$$T_Q = -\frac{\rho}{2}\int\limits_{-1}^{1} d\xi \int\limits_{-1}^{1} d\eta \int\limits_{-1}^{1} (\nabla\dot{\varphi})^2 \left|\det J\right| dv. \tag{14}$$

Интегрирование проводится численно путем применения квадратуры Гаусса-Лежандра [14] с двумя точками по каждой нормализованной координате:

$$T_Q = -\frac{\rho}{2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2} H_i H_j H_k \left((\nabla\dot{\varphi})^2 \left|\det J\right|\right)\Big|_{(\xi;\eta;\vartheta)=(\xi_0;\eta_0;\vartheta_0)}, \tag{15}$$

где ξ_0, η_0, ϑ_0 — координаты точки Гаусса (соответствующей i, j, k), $H_i = H_j = H_k = 1$ — весовые коэффициенты.

Интегрирование потенциальной энергии волнообразования на свободной поверхности. Поверхность $\sum$ представлена совокупностью четырехугольных четырехузловых конечных элементов, в общем виде элемент может иметь форму произвольного выпуклого четырехугольника. Порядок интегрирования аналогичен представленному в предыдущем пункте, преобразование координат имеет вид

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (1-\xi)(1-\eta) \\ (1-\xi)(1+\eta) \\ (1+\xi)(1+\eta) \\ (1+\xi)(1-\eta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{4} x_i f_i \\ \sum\limits_{i=1}^{4} y_i f_i \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Матрица Якоби имеет вид

$$J = \begin{pmatrix} J_{x1}\eta + J_{x2} & J_{y1}\eta + J_{y2} \\ J_{x1}\xi + J_{x3} & J_{y1}\xi + J_{y3} \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Вспомогательные функции (аналогично для y):

$$\begin{pmatrix} J_{x1} \\ J_{x2} \\ J_{x3} \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}. \tag{18}$$

По аналогии с предыдущим пунктом, координаты изопараметрические, поэтому подынтегральное выражение принимает вид:

$$\delta^2 = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} f_i f_j \delta_i \delta_j \,. \tag{19}$$

С помощью формул (5) и (19) получаем выражение для численного интегрирования:

$$V_\Sigma = \frac{\rho G}{2}\int_{-1}^{1} d\xi \int_{-1}^{1} \delta^2 \left|\det J\right| d\eta = \frac{\rho G}{2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} H_i H_j \left(\delta^2 \left|\det J\right|\right)\Big|_{(\xi;\eta)=(\xi_0;\eta_0)} . \tag{20}$$

Интегрирование кинематических условий связи степеней свободы. Условие сопряжения координат на поверхности Σ может быть получено путем использования преобразования координат предыдущего пункта:

$$\varphi\delta = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} f_i f_j \delta_i \delta_j \,. \tag{21}$$

Выполнив дифференцирование по времени, из формул (3) и (21) можно получить окончательное выражение:

$$T_\Sigma = \rho\int_{-1}^{1} d\xi \int_{-1}^{1} \dot{\varphi}\dot{\delta}\left|\det J\right| d\eta = \rho\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} H_i H_j \left(\dot{\varphi}\dot{\delta}\left|\det J\right|\right)\Big|_{(\xi;\eta)=(\xi_0;\eta_0)} . \tag{22}$$

Условие сопряжения степеней свободы на поверхности γ получено аналитически для прямоугольного четырехузлового конечного элемента, описание которого приведено в [13]. Размеры элемента обозначены как $2a$ и $2b$, перемещение внутри элемента может быть представлено в виде:

$$w = \begin{pmatrix} 1 \\ x_\gamma \\ y_\gamma \\ x_\gamma^{\,2} \\ x_\gamma y_\gamma \\ y_\gamma^{\,2} \\ x_\gamma^{\,3} \\ x_\gamma^{\,2} y_\gamma \\ x_\gamma y_\gamma^{\,2} \\ y_\gamma^{\,3} \\ x_\gamma^{\,3} y_\gamma \\ x_\gamma y_\gamma^{\,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2/a \\ \alpha_3/b \\ \alpha_4/a^2 \\ \alpha_5/ab \\ \alpha_6/b^2 \\ \alpha_7/a^3 \\ \alpha_8/a^2 b \\ \alpha_9/ab^2 \\ \alpha_{10}/b^3 \\ \alpha_{11}/a^3 b \\ \alpha_{12}/ab^3 \end{pmatrix}, \tag{23}$$

где x_γ и y_γ — локальные координаты элемента, показанные на рис. 3.

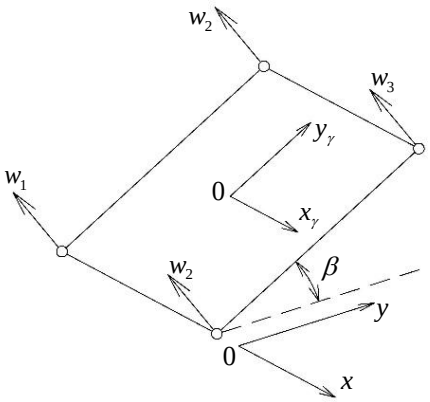


Рис.3. Ориентация локальной системы координат конечного элемента упругого дна

Исходя из того, что узловые значения обобщенных координат известны, представляется возможным найти значения α_i ($i = 1,\ 2 \ldots 12$). Выполнив дифференцирование по времени, следующий интеграл может быть вычислен аналитически:

$$T_\gamma = \int_\gamma \rho\dot{\varphi}(\dot{\bar{w}} \cdot \dot{\bar{n}}_\gamma) d\gamma = -\rho ab \int_{-1}^{1} dx_\gamma \int_{-1}^{1} \dot{\varphi}\dot{w} dy_\gamma . \qquad (24)$$

Интегрирование потенциала сил контактного взаимодействия смачиваемой поверхности дна с жидкостью. Интегрирование данного слагаемого проведено аналитически по аналогии с предыдущим пунктом.

Принимается компланарность вектора нормали к конечному элементу, вектора направления оси Ox и вектора направления оси Oz — данная гипотеза позволяет получить выражения, применимые для более общего случая геометрии дна. Ориентация локальной системы координат элемента изображена на рис. 3, здесь направление α_1 совпадает с направлением x_γ, а направление α_2 совпадает с направлением y_γ.

Первое слагаемое под знаком интеграла в формуле (6) может быть преобразовано в тождество:

$$P_g\overline{u}\left(\frac{\partial\overline{r}}{\partial\alpha_1}\times\frac{\partial\overline{u}}{\partial\alpha_2}-\frac{\partial\overline{r}}{\partial\alpha_2}\times\frac{\partial\overline{u}}{\partial\alpha_1}\right)=P_g\begin{pmatrix}0\\ w\sin(\beta)\\ -w\cos(\beta)\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}\dfrac{\partial w}{\partial x_\gamma}\\ \dfrac{\partial w}{\partial y_\gamma}\cos(\beta)\\ \dfrac{\partial w}{\partial y_\gamma}\sin(\beta)\end{pmatrix}=0\,. \quad (25)$$

Второе слагаемое под знаком интеграла в формуле (6) приводится к лаконичному виду:

$$\rho\left(\overline{G}\cdot\overline{u}\right)\left(\overline{u}\cdot\frac{\partial\overline{r}}{\partial\alpha_1}\times\frac{\partial\overline{r}}{\partial\alpha_2}\right)=-w^2\rho G\cos(\beta)\,. \quad (26)$$

Таким образом, из формул (6), (25) и (26) получаем окончательное выражение:

$$V_G=\frac{1}{2}\rho Gab\cos(\beta)\int_{-1}^{1}d\xi\int_{-1}^{1}w^2d\eta\,. \quad (27)$$

Численный алгоритм решения задачи. Для проведения дальнейшего решения требуется составить глобальный вектор степеней свободы $\overline{q}$ и провести ассемблирование матриц масс M и жесткостей K, которые получаются из вычисленных выше интегралов. Постановка частотно-модальной задачи имеет классический вид:

$$\left(K-\omega^2M\right)\overline{q}=\overline{0}\,. \quad (28)$$

Для нахождения собственных частот используется метод последовательностей Штурма [15], для этого к матрице СЛАУ (28) применяется модифицированное разложение Холецкого. Собственные формы колебаний найдены методом обратной итерации [15].

Примеры численного решения задачи. Проведен ряд решений для различных вариантов толщин h упругого дна. Плотность жидкости полагается равной $\rho=1000$ кг/м^3; габариты части полости, заполненной жидкостью, приняты $2a_x=3$ м, $2a_y=2$ м, $a_z=1$ м; интенсивность гравитационного поля задана $G=9.81$ м/с^2; модуль упругости первого рода материала дна принят $E=7.2\cdot10^{10}$ Па, а коэффициент Пуассона принят $\mu=0.3$. В случае, если дно достаточно жесткое (этот случай может быть обеспечен выбором толщины h, при которой $w\ll\delta$), описанная задача допускает простое аналитическое решение:

$$\omega_{n,m}{}^2 = G\sqrt{\left(\frac{\pi n}{2a_x}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{2a_y}\right)^2}\, th\left(a_z\sqrt{\left(\frac{\pi n}{2a_x}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{2a_y}\right)^2}\right), \qquad (29)$$

где n и m — количество полуволн по направлению осей Ox и Oy соответственно.

В таблице 1 предложено сравнение результатов конечно-элементного и аналитического решений для 10 различных вариантов разбиения конечно-элементной сеткой в случае жесткого дна. Были проанализированы первые три частоты собственных колебаний.

Таблица 1

Результаты решения задачи в случае жесткого дна

№	Количество узлов				Собственная частота		
	Вдоль координатных осей			Всего	1 тон	2 тон	3 тон
	Ox	*Oy*	*Oz*		f_1, Гц	f_2, Гц	f_3, Гц
1	4	3	2	24	0.4838	0.6821	0.7658
2	7	5	3	105	0.4585	0.6180	0.6.925
3	10	7	4	280	0.4540	0.6069	0.6794
4	13	9	5	585	0.4525	0.6029	0.6749
5	16	11	6	1056	0.4518	0.6012	0.6728
6	19	13	7	1729	0.4514	0.6002	0.6717
7	22	15	8	2640	0.4511	0.5995	0.6709
8	25	17	9	3825	0.4510	0.5993	0.6705
9	28	19	10	5320	0.4509	0.5989	0.6702
10	31	21	11	7161	0.4508	0.5989	0.6700
Аналитическое решение					0.4505	0.5980	0.6690

На рис. 4 предложены результаты нахождения первых трех частот собственных колебаний для одного варианта разбиения конечно-элементной сеткой (вариант 5 в таблице 1), но для разных толщин дна. На рис. 5 представлена первая форма собственных колебаний для случая толщины $h = 4$ мм.

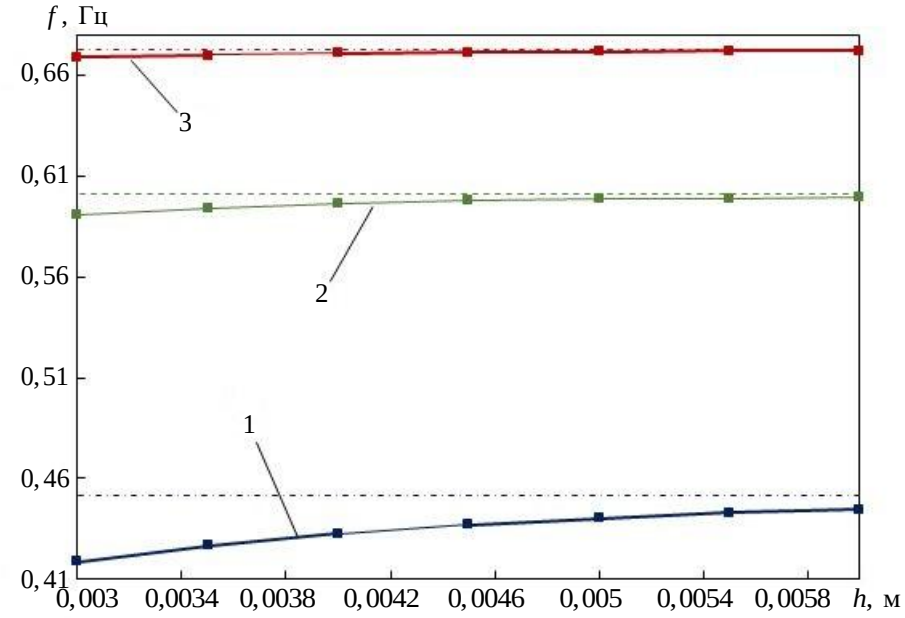


Рис.4. Графики зависимостей собственных частот от толщины дна для одной конечно-элементной модели (№ 5 в таблице 1), числами обозначены тона колебаний

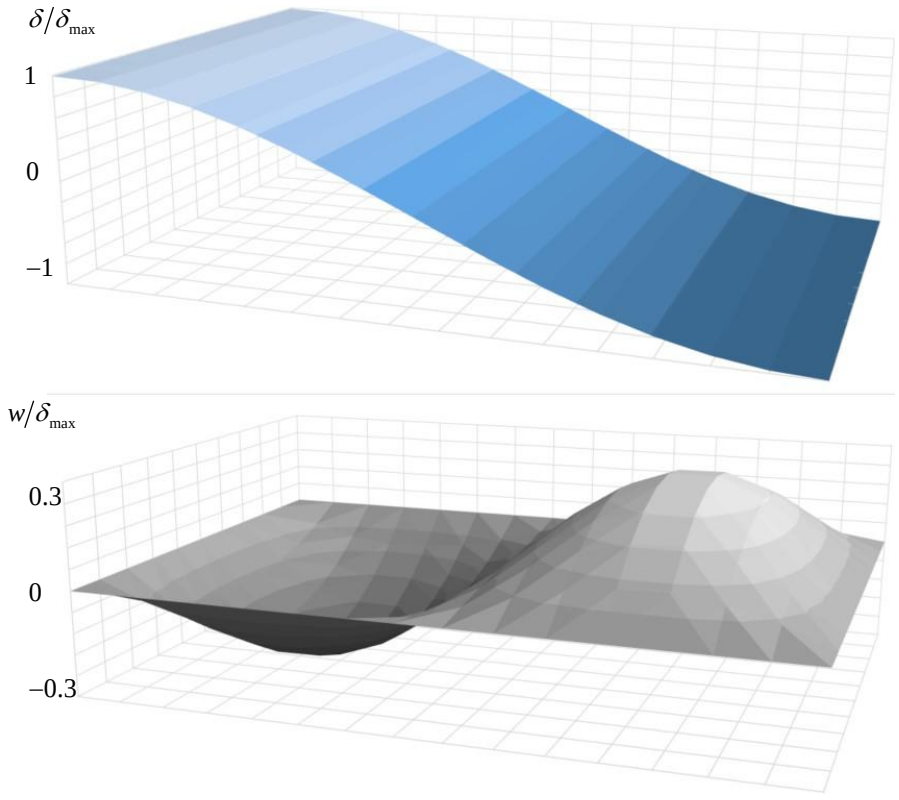


Рис.5. Первая форма колебаний (модель 5 в таблице 1) в случае толщины дна 4 мм: сверху показано смещение свободной поверхности, а снизу – смещение дна

Обсуждение полученных результатов. При анализе таблицы 1 можно заметить, что сходимость конечно-элементного решения к аналитическому монотонная, причем каждое из трех решений асимптотически приближается к эталонному решению сверху, что вполне ожидаемо – грубая конечно-элементная сетка искусственно завышает жесткость конструкции, тем самым завышая частоты собственных колебаний. Кроме того, скорость сходимости убывает с увеличением порядка рассматриваемого тона колебаний, что также ожидаемо – для моделирования более сложной формы колебаний, описываемой более высоким порядком гармоник, требуется большее количество конечных элементов.

Графики на рис. 4 показывают, что при увеличении толщины пластины значение собственной частоты монотонно сходится к соответствующему значению в случае жесткой пластины (приведено в таблице 1). При этом каждый из графиков подходит к асимптоте снизу, так как чем больше толщина пластины, тем больше жесткость конструкции и, соответственно, больше значения частот собственных колебаний. Скорость сходимости в данном случае возрастает с увеличением порядка рассматриваемого тона колебаний, так как более высокому тону соответствует более высокий вклад волнообразования на свободной поверхности в потенциальную энергию системы по сравнению с вкладом потенциальной энергии деформации упругого дна.

Форма собственных колебаний конструкции по первому тону, представленная на рис. 5, имеет вид одной полуволны для свободной поверхности и двух полуволн для дна, причем области повышенного гидростатического давления соответствует смещение дна по направлению вектора интенсивности гравитационного поля (и наоборот).

Выводы. Реализация описанной математической модели позволяет получить наглядные непротиворечивые результаты решения модельной задачи, подтвержденные в частном случае точным аналитическим решением. Провести исследование сходимости решения удобно именно на регулярной конечно-элементной сетке, поэтому геометрия задачи была принята соответствующей удобному построению конечно-элементных моделей.

На основании проведенного анализа можно заключить, что реализованные алгоритмы могут быть применены для решения практических задач машиностроения. Дальнейшее развитие работы предполагает, в том числе, использование разработанных алгоритмов для решения задач прочности авиационных конструкций, не обладающих широко рассмотренной в литературе осевой симметрией.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Кирилин А.Н., Ахметов Р.Н., Соллогуб А.В. *Проектирование, динамика и устойчивость движения ракет-носителей: методы, модели, алгоритмы, программы в среде MathCad*. Москва, Машиностроение, Машиностроение-Полет, 2013, 294 с.

[2] Анисимов А.В., Забудкин В.В., Лиходед А.И., Пономарев Д.А. Динамическое нагружение пилотируемых космических станций сложной пространственной компоновки. *Космонавтика и ракетостроение*, 1998, № 13, с. 130–140.

[3] Балакирев Ю.Г. Исследование устойчивости системы упругий корпус – топливные магистрали – двигатели для жидкостных ракет пакетной компоновки. *Известия академии наук. Механика твердого тела*, 1994, № 2, с. 129–137.

[4] Пак С., Григорьев В.Г. Устойчивость тонкостенных осесимметричных соосных конструкций, содержащих жидкость, при многофакторных нагрузках. *Труды МАИ*, 2021, № 119. DOI: 10.34759/trd-2021-119-08.

[5] Григорьев В.Г. *Методология исследования динамических свойств сложных упругих и гидроупругих систем*. Дисс. д-ра техн. наук. Москва, 2000, 328 с.

[6] Горшков А.Г., Морозов В.И., Пономарев А.Т., Шклярчук Ф.Н. *Аэрогидроупругость конструкций*. Москва, Наука. Физматлит, 2000, 591 с.

[7] Григорьев В.Г., Куракин В.В. Решение задачи частотно-модального анализа топливного бака вертолета Ми-171А3. *Материалы XXX Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова Т. 1*. Москва, 2024, с. 84–86.

[8] Грачев С.В., Смагин Д.С., Савельев Р.С., Напреенко К.С., Зинина А.И. Концепция моделирования топливной системы с учетом требований сертификации. *Computantional nanotechnology*, 2020, Т. 7, № 3, с. 45–51.

[9] Сидоренко А.С. Динамическое состояние конструкции вертолета при соударении с преградой. *Труды МАИ*, 2009, № 36, с. 1–14.

[10] Михайлов Д.А., Пыхалов А.А., Зеньков Е.В., Артюнин А.И. Методика испытания образцов из эластомеров для получения механических характеристик их гидроупругости и конечно-элементного моделирования деформируемых сборных конструкций. *Современные технологии. Системный анализ. Моделирование*, 2021, № 4 (72), с. 38-47.

[11] Григорьев В.Г., Григорьева Е.В. Контактное взаимодействие ограниченного объема жидкости с деформируемым телом под влиянием гравитационных сил. *Изв. РАН. МТТ*, 2011, № 2, с. 147-159.

[12] Григорьев В.Г. Применение метода конечных элементов к расчету колебаний упругих оболочечных конструкций, содержащих жидкость. *Труды научного семинара ТГУ. Динамика упругих твердых тел, взаимодействующих с жидкостью*. Томск, ТГУ, 1978, с. 55-60.

[13] Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Fox D.D. *The finite element method for solid and structural mechanics*. Butterworth-Heinemann, Elsevier, 2014, 624 p.

[14] Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. *The finite element method: its basic and fundamentals*. Butterworth-Heinemann, Elsevier, 2013, 756 p.

[15] Gupta K.K. Eigenproblem solution by a combined Sturm sequence and inverse iteration technique. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1973, vol.7, no. 1, pp. 17 – 42.

Статья поступила в редакцию 15.05.2025

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Григорьев В.Г., Куракин В.В. Моделирование собственных колебаний пространственной гидроупругой конструкции методом конечных элементов на основе смешанного вариационного принципа. *Математическое моделирование и численные методы*, 2025, № 4, с. 4–18.

Григорьев Валерий Георгиевич – д-р. техн. наук, профессор кафедры «Проектирование и прочность авиационно-ракетных и космических изделий» Московского авиационного института. e-mail: valgrigg@rambler.ru

Куракин Владислав Владимирович – аспирант кафедры «Проектирование и прочность авиационно-ракетных и космических изделий» Московского авиационного института. e-mail: curackin.vlad@yandex.ru

Identification of operational parameters ensuring the stability of a monopropellant-fueled thermocatalytic liquid rocket engine

© V.G. Grigor’ev, V.V Kurakin

Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, 125993, Russia

The application of the finite element method based on the mixed variational principle for solving a three-dimensional eigenvalue problem using the example of a cavity with an elastic bottom is considered. A brief review of the literature on the subject of the study is provided. A rigorous mathematical formulation of the problem for the described mechanical system is presented. A hexagonal finite element of the fluid is introduced, the techniques of numerical integration of the kinetic energy of the liquid volume is described in using the Gauss-Legendre quadrature. A quadrangular finite element of the free surface is introduced, the techniques of numerical integration of the potential energy of wave formation using the Gauss-Legendre quadrature is described. An analytical expression for integration of the potential of the bottom contact interaction forces with a liquid is obtained as applied to a finite element of the bottom. The techniques of integrating the terms of the functional of the total mechanical energy of the system, providing the conditions for conjugation of the introduced degrees of freedom is described. The conjugation condition of the free surface displacement and the displacement potential of the fluid volume is integrated numerically using the Gauss-Legendre quadrature. The conjugation condition of the elastic bottom bending displacement and the medium displacement potential is integrated analytically. The description of the algorithm of numerical solution of the frequency-modal problem is given. The calculation results for the case of a rigid bottom are presented. The analysis of convergence of finite element solutions to analytical ones for different variants of partitions by finite element mesh is performed. The calculation results for the case of an elastic bottom are presented. The convergence analysis of the solution results for the case of an elastic bottom to the case of a rigid bottom with an increase in its thickness is performed. The analysis of the first form of oscillations for the case of an elastic bottom is presented. Conclusions are made about the applicability of the implemented algorithms to mechanical engineering problems.

***Keywords**: eigenoscillations, three-dimensional problem, finite element method, mixed variational principle, hydroelastic structure, numerical integration, Gauss-Legendre quadrature*

REFERENCES

[1] Kirilin A.N., Ahmetov R.N., Sollogub A.V. *Proektirovanie, dinamika i ustoichivost' dvizheniya raket-nositelej: metody, modeli, algoritmy, programmy v srede MathCad* [Design, dynamics and stability of the motion of launch vehicles: methods, models, algorithms, programs in the MathCad environment]. Moscow, Mashinostroenie Publ., Mashinostroenie-Polet Publ., 2013, 294 p.

[2] Anisimov A.V., Zabudkin V.V., Lihoded A.I., Ponomarev D.A. Dynamicheskoe nagruzhenie pilotiruemyh kosmicheskih stanciy slozhnoi prostranstvennoy konstrukcij iz kompoziciionnyh materialov [Dynamic loading of manned space stations with complex spatial layout]. *Kosmonavtika i raketostroyeniye* [Cosmonautics and rocket science], 1988, no. 13, pp. 130–140.

[3] Balakirev U.G. Issledovaniye ustoychivosti sistemy uprugiy korpus – toplivnyye magistrali – dvigateli dlya zhidkostnykh raket paketnoy komponovki. [Study of the stability of the system elastic body – fuel lines – engines for liquid rockets of package layout]. *Izv. RAN. MTT – Proc. Of the Russ. Acad. Sci. Mech. Rigid Body*, 1994, no. 2, pp. 129–137.

[4] Park S., Grigor'ev V.G. Ustoychivost' tonkostennykh osesimmetrichnykh soosnykh konstruktsiy, soderzhashchikh zhidkost', pri mnogofaktornykh nagruzkakh [Stability of thin-walled axisymmetric coaxial structures containing liquid under multifactor loads]. *Trudy MAI*, 2021, no. 119. DOI: 10.34759/trd-2021-119-08.

[5] Grigor'ev V.G. *Metodologiya issledovaniya dinamicheskih svojstv slozhnyh uprugih i gidrouprugih system* [Methodology for the study of dynamic properties of complex elastic and hydroelastic systems]. Diss. Dr. Sci. (Eng), Moscow, 2000, 328 p.

[6] Gorshkov A.G., Morozov V.I., Ponomarev A.T. *Aerogidrouprugost' konstruktsiy* [Aerohydroelasticity if structures]. Moscow, Nauka. PML. Publ., 2000, 591 p.

[7] Grigor'ev V.G., Kurakin V.V. Resheniye zadachi chastotno-modal'nogo analiza toplivnogo baka vertoleta Mi-171A3 [Solution of the problem of frequency-modal analysis of the fuel tank of the Mi-171A3 helicopter]. *Materialy XXX Mezhdunarodnogo simpoziuma «Dinamicheskiye i tekhnologicheskiye problemy mekhaniki konstruktsiy i sploshnykh sred» im. A.G. Gorshkova T. 1 – Proceedings of the XXX International Symposium "Dynamic and Technological Problems of Structures and Continuous Media" named after A.G. Gorshkov P. 1.* Moscow, 2024, pp. 84–86.

[8] Grachev S.V., Smagin D.S., Savel'ev R.S., Napreenko K.S., Zinina A.I. Kontseptsiya modelirovaniya toplivnoy sistemy s uchetom trebovaniy sertifikatsii [Concept of fuel system modeling taking into account certification requirements]. *Computational nanotechnology*, 2020, vol. 7, no. 3, pp. 45–51.

[9] Sidorenko A.S. Dinamicheskoye sostoyaniye konstruktsii vertoleta pri soudarenii s pregradoy [Dynamic state of the helicopter structure upon impact with an obstacle]. Trudy MAI, 2009, no. 36, pp. 1–14.

[10] Mihailov D.A., Pyhalov A.A., Zenkov E.V., Artunin A.I. Metodika ispytaniya obraztsov iz elastomerov dlya polucheniya mekhani-cheskikh kharakteristik ikh gidrouprugosti i konechno-elementnogo modelirovaniya deformiruyemykh sbornykh konstruktsiy [Metodology for testing elastomer samples to obtain mechanical characteristics of their hedroelasticity and finite element modeling of de-

formable prefabricated structures]. *Sovremennyye tekhnologii. Sistemnyy analiz. Modelirovaniye – Modern technologies. System analysis. Simulation*, 2021, no. 4 (72), pp. 38–47.

[11] Grigor'ev V.G., Grigor'eva E.V. Contact interaction of bounded liquid volume with a solid under the action of gravity forces. *Mechanics of Solids*, 2011, vol. 46, no. 2, pp. 280-290.

[12] Grigor'ev V.G. Primenenie metoda konechnyh elementov k raschetu kolebanij uprugih obolochechnyh konstrukcij, soderzhashchih zhidkost' [Application of the finite element method to the calculation of vibrations of elastic shell structures containing liquid]. *Trudy nauchnogo seminara TGU. Dinamika uprugih I tverdyh tel, vzaimodejstvuyushih s zhidkost'yu – Proceedings of the TSU scientific seminar. Dynamics of elastic and solid bodies interacting with a liquid*. Tomsk, TSU, 1978, pp. 55–60.

[13] Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Fox D.D. *The finite element method for solid and structural mechanics*. Butterworth-Heinemann, Elsevier, 2014, 624 p.

[14] Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. *The finite element method: its basic and fundamentals.* Butterworth-Heinemann, Elsevier, 2013, 756 p.

[15] Gupta K.K. Eigenproblem solution by a combined Sturm sequence and inverse iteration technique. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1973, vol.7, no. 1, pp. 17–42.

Grigor'ev V.G., Dr. Sc. (Eng.), Professor, Department of Design and Strength of Aeronautical Missile and Space Products, Moscow Aviation Institute (National Research University). e-mail: valgrigg@rambler.ru

Kurakin V.V., Postgraduate student, Department of Design and Strength of Aeronautical Missile and Space Products, Moscow Aviation Institute (National Research University). e-mail: curackin.vlad@yandex.ru