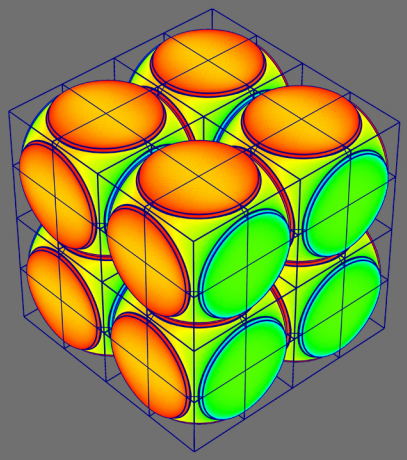
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Кузьмин Н. П., Курганов Д. С., Курганов С. А., Филаретов В. В. Алгоритмы параллельного расчета определителей разреженных матриц на основе поло-винного деления. Математическое моделирование и численные методы, 2025, № 3, с. 117–141.

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/386/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.216.210
01.02.2026 13:56:43

УДК 512.644 DOI: 10.18698/2309-3684-2025-3-117141

Алгоритмы параллельного расчета определителей разреженных матриц на основе половинного деления

© Н.П. Кузьмин[1], Д.С. Курганов[2], С.А. Курганов[3], В.В. Филаретов[3]

[1]УФИРЭ им. В.А. Котельникова РАН, Ульяновск, 432011, Россия
[2]ООО «ТЕЛЕКОМ.РУ», Ульяновская область, Ульяновск, 432045, Россия
[3]Ульяновский государственный технический университет,
Ульяновская область, Ульяновск, 432027, Россия

Предложено разложение определителя разреженной, в том числе ленточной, матрицы на сумму определителей квазидиагональных матриц. Разработаны и реализованы алгоритмы рекурсивного разложения определителя матрицы, представленной в виде двух диагональных блоков или половин от деления по горизонтали или вертикали с учетом нулевых строк и столбцов для параллельного расчета. Доказано, что при делении ленточной матрицы с шириной ленты 2m+1 пополам горизонтально (вертикально) на равное или отличающееся на единицу число строк (столбцов) миноры одной подматрицы соответствуют сочетаниям из 2m столбцов (строк) по m, а сопряженные миноры – дополнениям этих сочетаний в другой подматрице, что упрощает применение теоремы Лапласа. Введено понятие матричного двоичного вектора. Установлена связь сочетаний номеров строк и столбцов матрицы с половинами двоичных векторов, содержащими равное количество единиц. Использование миноров половинного порядка приводит решение задачи к подзадачам минимальной одинаковой размерности, обеспечивая равномерную загрузку процессоров (вычислительных ядер). Многократно уменьшается время расчета как целочисленных, так и численных (с ограниченным числом десятичных разрядов) определителей. При одно-, 6-ти и 12-ти поточных режимах время целочисленного расчета определителей матриц порядка 400…999 уменьшается по сравнению со временем оператора Det системы Maple в 5…3, 23…15 и 40…27 раз, а время численного расчета – в 1,3…2,8 и 2,5…5,5 раз при числе потоков 6 и 12 и порядке матриц 900…2000. Половинное деление реализовано в программе символьного раскрытия и вычисления определителя матрицы, но может быть использовано для простой параллельной модификации любой программы численного решения систем линейных алгебраических уравнений.

Ключевые слова: *определитель матрицы, теорема Лапласа, блочная матрица, квазидиагональная матрица, ленточная матрица, двоичный вектор, половинное деление, символьное вычисление, параллельный расчет, электрическая сеть*

Введение. Математическое моделирование в технических системах обычно связано с решением больших систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) [1]. Повысить быстродействие алгоритмов можно распараллеливанием вычислений на многопроцессорных компьютерах [2]. Параллельный расчет определителей с заданным количеством десятичных знаков выполняется путем одновременного исключения элементов в разных строках матриц с помощью не-

скольких вычислительных ядер, что уменьшает время расчета примерно в 2...3 раза [3], или с помощью системных программ автоматического конструирования [4].

Точное решение СЛАУ в целых числах выполняется по алгоритму исключения Гаусса-Баррейса, не требующему операций деления [5], или разложением определителей по одной или нескольким строкам (столбцам) на основе теоремы Лапласа [6]. Выбранные строки (столбцы) образуют одну подматрицу, а их дополнение – другую. Если матрица представляется суммой матриц A и B такой же размерности, то определитель равен сумме произведений всевозможных миноров матрицы A и алгебраических дополнений матрицы B [7]. При параллельном расчете целесообразно объединять элементы матрицы в блоки, оперируя блочными матрицами [8, 9]. В квазидиагональной матрице квадратные блоки размещаются вдоль главной диагонали без взаимного пересечения. Определитель такой матрицы равен произведению определителей диагональных блоков [8].

Задачам моделирования присущи матрицы высокой разреженности. При параллельном расчете (расчете по частям – диакоптике) можно говорить о сумме квадратных подматриц A и B, представленных блоками на главной диагонали [10]. В блочно-диагональной матрице, обобщаюшей квазидиагональную матрицу, подматрица пересечения блоков может содержать элементы обеих подматриц A и B или одной из них. Номера строк и столбцов этой общей подматрицы отображаются двоичными векторами (ДВ) [11], единичные и нулевые элементы которых указывают на удаление или оставление строки (столбца) в соответствующем миноре или дополнительном миноре. Определитель блочно-диагональной матрицы находится по методу двоичных векторов (МДВ) как сумма произведений миноров и дополнительных миноров, соответствующих ДВ [11, 12]. Такое отнесение элементов с нулевыми значениями к прямоугольным блокам многократно упрощает символьный анализ сложных электронных цепей программой CirSym [12, 13], доступной в on-line режиме (http://intersyn.net/en/cirsym.html).

Символьные алгоритмы и программы. Постановка задачи. Системы компьютерной алгебры стали неотъемлемым инструментом решения матричных задач [14,15]. Проблема оптимальной свертки алгебраических выражений до сих пор является одной из центральных, поскольку компактное представление увеличивает предельный размер задачи и точность решения. При наличии структуры, например, электрической схемы задача свертки схемной функции решается рекурсивным делением схемы на две подсхемы примерно одинаковой сложности (половинном делении) [16]. Поэтому для решения систем уравнений произвольной физической природы было предложено схемное отображение [17]. Элементы матрицы со-

ответствуют источникам тока, управляемым напряжением. В качестве подсхем могут выбираться строки матрицы или произвольные их подмножества. Решение получается объединением подсхем на основе МДВ [11], что было реализовано в программах MatSym [18] и MatSyms [19] для генерации единых и последовательных (иерархических) выражений. Соответвующие подпрограммы раскрытия матричных определителей доступны в составе программы символьного анализа и диагностики CirSym, реализующей обобщенный метод выделения параметров элементов и подсхем [12].

Схемное отображение и последующее использование МДВ ограничивают предельную размерность матриц n по двум причинам: 1) число узлов отображающей схемы на единицу больше размерности матрицы; 2) число внешних узлов в подсхемах-строках очень велико и равно n+1. При этом допустимая сложность полной матрицы для программы CirSym не превышает 14-го порядка [12]. Между тем, в случае наращивания строк матрицы [18], минуя схемное отображение [17], или при использовании метода диаграмм [20] предельный порядок матрицы увеличивается до 18. Многократное увеличение порядка обеспечивает модификация теоремы Лапласа, при которой разложение определителя выполняется по совокупности строк или столбцов, образующих половину матрицы [21] и [22].

Как правило, интересует численное значение, а не сверхкомпактное выражение, например, хранящееся на диске 10 Терабайт для полной матрицы 22-го порядка [23]. Интерпретация содержимого жесткого диска по времени превышает время генерации выражения. Избежать хранения символьных определителей можно при использовании шаблона половинного минора полной матрицы в виде иерархической последовательной формулы, что позволило вычислить определитель полной матрицы 34-го порядка [23]. Ускорение вычисления определителя и увеличение предельного порядка полной матрицы обеспечивает параллельный расчет путем предварительного однократного половинного деления и нахождения частичных сумм для слагаемых определителя [24]. Число слагаемых в частичной сумме выбирается по заданному числу процессоров, что обеспечивает их равномерную загрузку. В случае разреженных матриц, отображающих структуры электрических схем и сетей, барьер для порядка матрицы в несколько сотен оказывается преодоленным даже при размещении формулы на жестком диске, но по затратам времени программа [25] не может конкурировать с системой Maple [15].

В статье предлагается рекурсивное половинное деление ненулевых элементов матрицы на два пересекающихся диагональных блока и матричный метод двоичных векторов. Для повышения эффективности параллельного расчета определителя разработаны алгоритмы рекурсивного половинного деления матрицы по горизонтали и вертикали, обеспечивающие почти равную сложность минора и допол-

нительного минора в парах слагаемых при разложении определителя.

Матричный метод двоичных векторов (ММДВ). Элементы узловых матриц электрических цепей и сетей располагаются вдоль главной диагонали [26, 27]. Ленточные матрицы A порядка n включают m ненулевых диагоналей по одну сторону от главной диагонали

$$a_{ij} = 0, \quad |i - j| > m .$$

Матрицы для значений $m = 2$ и 1 отображают электрические сети (графы) цепной (рис. 1,а) и магистральной (рис. 1,б) структуры [26]. При этом узлы (вершины) соответствуют столбцам, а веса ветвей (ребер) – элементам матриц. Для сети m – это число узлов, не считая базисного, по которому схема (сеть) разделяется на две подсхемы.

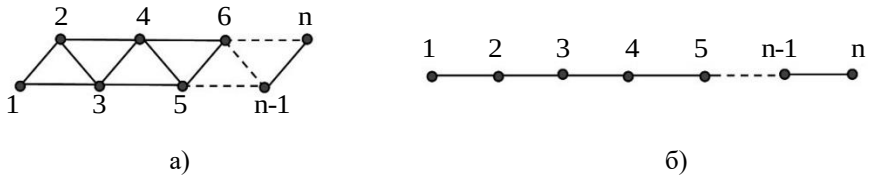


Рис. 1. Электрические сети: цепная с $m = 2$ (а) и магистральная с $m = 1$ (б)

Разделим матрицу порядка n на диагональные подматрицы-блоки так, чтобы ненулевые элементы оказались в двух пересекающихся квадратных блоках порядка n_1 и n_2 (рис. 2,а и 2,б). Подматрица пересечения будет квадратной порядка $m = n_1 + n_2 - n$, а нулевые блоки – квадратными или прямоугольными в зависимости от четности n и m.

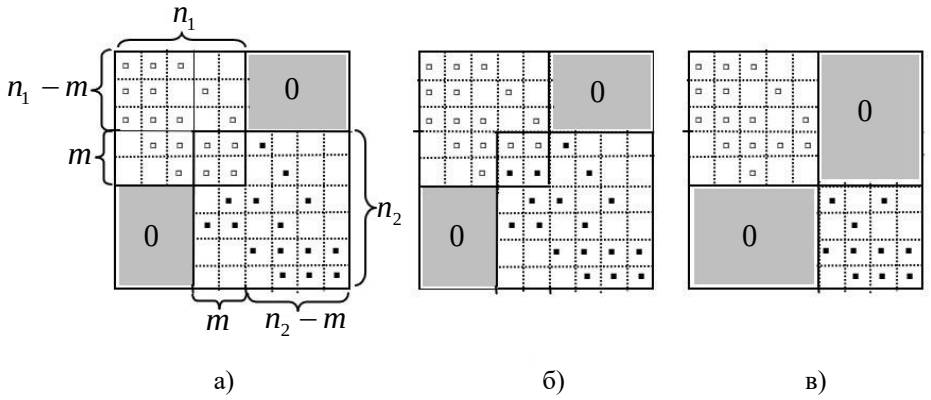


Рис. 2. Матрица с первым и вторым блоками порядка n_1 и n_2: элементы пересечения находятся в первом блоке (а) и поделены поровну между блоками (б). Квазидиагональная матрица (в), соответствующая ДВ 1111 и 0000 для блоков 1 и 2 (б)

По теореме Лапласа число ненулевых миноров первого (второго) блока (рис. 2,а и 2,б) определяется числом всевозможных сочетаний из m строк и m столбцов подматрицы пересечения

$$\xi = C_{2m}^{m}, \tag{1}$$

где C_{2m}^{m} — число сочетаний из $2m$ элементов по m.

С другой стороны, число ненулевых миноров можно найти как число ДВ [11]

$$\xi = \sum_{i=0}^{m} (C_m^i)^2,$$

поскольку справедливо комбинаторное тождество

$$\sum_{i=0}^{m} (C_m^i)^2 = C_{2m}^{m}. \tag{2}$$

Позициями ДВ в рассматриваемом случае являются номера строк и столбцов подматрицы пересечения, причем номера строк (столбцов) размещаются в первой (второй) половине ДВ. Для «схемного» МДВ единицы (нули) в позициях ДВ указывают на подключение (отсутствие) в соответствующем узле подсхемы элементов нуллора – норатора или нуллатора [11]. Это равносильно удалению строки или столбца в матрице, отображающей подсхему. В предлагаемых алгоритмах используется понятие матричного ДВ, для которого естественно, что 1 – соответствует оставлению, а 0 – удалению строки или столбца в матрице.

Для доказательства тождества (2) сопоставляются сочетания из $2m$ по m с ДВ размерности $2m$. В рассматриваемом примере ($m = 2$) сочетаний из четырех элементов $\{1, 2, 3, 4\}$ будет шесть: 12, 13, 14, 23, 24, 34. Эти сочетания соответствуют единицам в ДВ: 1100, 1010, 1001, 0110, 0101, 0011. Все сочетания, кроме первого и последнего, перечисляются в порядке следования двоичных векторов с равным числом единиц в половинах каждого вектора. Первая и вторая половины ДВ, содержащие по m элементов, относятся соответственно к строкам и столбцам матрицы. Тождество (2) связывает сочетания из $2m$ по m с ДВ размерности $2m$, что используется при разложении матричных определителей.

Число ненулевых миноров (число ДВ) для сетей цепной (рис. 2,а) и магистральной (рис. 2,б) структуры равно 6 и 2, что следует из формулы (1). Для регулярной решетчатой (рис. 3,а [26]) и нерегулярной (рис. 3,б [27]) структуры число миноров определяется по той же формуле (1), в которой m – это число узлов, по которым схема делится на две части. Решетчатая (рис. 3,а) схема делится пополам

по m узлам, а нерегулярная (рис. 3,б), например, по 4 узлам – 6, 7, 8 и 9. Число ДВ равно 70.

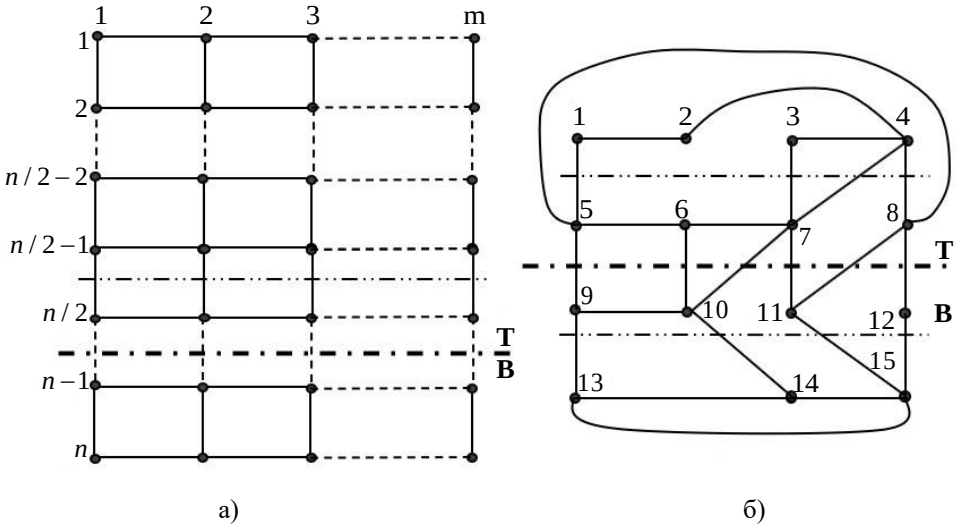


Рис. 3. Разветвленные сети с регулярной решетчатой (а) и нерегулярной (б) структурой

Деление матрицы на блоки вдоль главной диагонали соответствует делению электрической схемы на подсхемы для применения МДВ [11]. Связанные элементы, подключенные к общим узлам, могут быть отнесены к любой из двух подсхем, но не поделены между подсхемами. В предлагаемом ниже матричном МДВ такого ограничения нет – элементы подматрицы пересечения могут быть отнесены к любому блоку, например, все элементы – к первому блоку (рис. 2,а) или, что важно, поделены поровну между блоками (рис. 2,б).

Определитель матрицы (рис. 2,а и 2,б) равен сумме произведений минора M_ν^f и дополняющего минора M_ν^s, соответствующих ДВ блоков 1 и 2

$$D = \sum_{\nu=1}^{\xi} (-1)^{p_\nu} M_\nu^f M_\nu^s , \qquad (3)$$

где p_ν — сумма номеров позиций нулей в ДВ блока 1 или 2.

Для реализации матричных алгоритмов важно, что по ДВ минора находится ДВ взаимно дополнительного минора с помощью операции дополнения. Экономно задавать вектор целым числом и выполнять поиск единиц, используя операцию сдвига. Множество ДВ и соответствующие значения миноров однозначно характеризуют подматрицу. Это позволяет сопрягать ее с другими подматрицами той же матрицы при выборе других значений элементов или подмат-

рицами других матриц, сокращая объем вычислений, а также осуществлять параллельные вычисления.

Разложение определителя ленточной матрицы 6-го порядка при половинном распределении элементов по блокам. Ленточная матрица 6-го порядка делится следующим образом (элементы первой подматрицы выделены жирным шрифтом):

$$
\begin{array}{c|cccccc|}
1 & \boldsymbol{y_{11}} & \boldsymbol{y_{12}} & \boldsymbol{y_{13}} & & & \\
2 & \boldsymbol{y_{21}} & \boldsymbol{y_{22}} & \boldsymbol{y_{23}} & \boldsymbol{y_{24}} & & \\
3 & \boldsymbol{y_{31}} & \boldsymbol{y_{32}} & \boldsymbol{y_{33}} & \boldsymbol{y_{34}} & y_{35} & \\
4 & & \boldsymbol{y_{42}} & y_{43} & y_{44} & y_{45} & y_{46} \\
5 & & & y_{53} & y_{54} & y_{55} & y_{56} \\
6 & & & & y_{64} & y_{65} & y_{66} \\
\hline
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6
\end{array}
\qquad (4)
$$

Все 6 пар миноров для матрицы (5) приведены в табл. 1.

Таблица 1

Миноры при половинном распределении элементов между подматрицами в (4)

№	Для первой подматрицы	Для второй подматрицы
1	$\begin{array}{\|cc\|}\hline y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \\ \hline\end{array}$	$\begin{array}{\|cccc\|}\hline & & y_{35} & \\ y_{43} & y_{44} & y_{45} & y_{46} \\ y_{53} & y_{54} & y_{55} & y_{56} \\ & y_{64} & y_{65} & y_{66} \\ \hline\end{array}$
2	$\begin{array}{\|ccc\|}\hline y_{11} & y_{12} & \\ y_{21} & y_{22} & y_{24} \\ & y_{42} & \\ \hline\end{array}$	$\begin{array}{\|ccc\|}\hline & y_{35} & \\ y_{53} & y_{55} & y_{56} \\ & y_{65} & y_{66} \\ \hline\end{array}$
3	$\begin{array}{\|ccc\|}\hline y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ & y_{42} & \\ \hline\end{array}$	$\begin{array}{\|ccc\|}\hline & y_{35} & \\ y_{54} & y_{55} & y_{56} \\ y_{64} & y_{65} & y_{66} \\ \hline\end{array}$
4	$\begin{array}{\|ccc\|}\hline y_{11} & y_{12} & \\ y_{21} & y_{22} & y_{24} \\ y_{31} & y_{32} & y_{34} \\ \hline\end{array}$	$\begin{array}{\|ccc\|}\hline y_{43} & y_{45} & y_{46} \\ y_{53} & y_{55} & y_{56} \\ & y_{65} & y_{66} \\ \hline\end{array}$
5	$\begin{array}{\|ccc\|}\hline y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \\ \hline\end{array}$	$\begin{array}{\|ccc\|}\hline y_{44} & y_{45} & y_{46} \\ y_{54} & y_{55} & y_{56} \\ y_{64} & y_{65} & y_{66} \\ \hline\end{array}$
6	$\begin{array}{\|cccc\|}\hline y_{11} & y_{12} & y_{13} & \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} & y_{24} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} & y_{34} \\ & y_{42} & & \\ \hline\end{array}$	$\begin{array}{\|cc\|}\hline y_{55} & y_{56} \\ y_{65} & y_{66} \\ \hline\end{array}$

Отсюда получается формула (с подформулами) для определителя матрицы 6-го порядка при диагональном половинном делении

$$
\begin{gathered}
D = M_{t1}M_{b1} + M_{t2}M_{b2} - M_{t3}M_{b3} - M_{t4}M_{b4} + M_{t5}M_{b5} + M_{t6}M_{b6}; \\
M_{t1} = y_{11}y_{22} - y_{12}y_{21}; \\
M_{b1} = y_{35}\left(y_{66}\left(y_{43}y_{54} - y_{44}y_{53}\right) - y_{64}\left(y_{43}y_{56} - y_{46}y_{53}\right)\right); \\
M_{t2} = -y_{11}y_{24}y_{42}; \quad M_{b2} = -y_{53}y_{35}y_{66}; \\
M_{t3} = y_{42}\left(y_{13}y_{21} - y_{11}y_{23}\right); \quad M_{b3} = y_{35}(y_{56}y_{64} - y_{54}y_{66}); \\
M_{t4} = y_{34}\left(y_{11}y_{22} - y_{12}y_{21}\right) - \left(y_{11}y_{32} - y_{12}y_{31}\right)y_{24}; \\
M_{b4} = y_{66}(y_{43}y_{55} - y_{45}y_{53}) - (y_{43}y_{56} - y_{46}y_{53})y_{65}; \\
M_{t5} = \left(y_{11}y_{22} - y_{12}y_{21}\right)y_{33} + y_{23}\left(y_{12}y_{31} - y_{11}y_{32}\right) + y_{13}\left(y_{21}y_{32} - y_{22}y_{31}\right); \\
M_{b5} = \left(y_{44}y_{55} - y_{45}y_{54}\right)y_{66} + y_{56}\left(y_{45}y_{64} - y_{44}y_{65}\right) + y_{46}\left(y_{54}y_{65} - y_{55}y_{64}\right); \\
M_{t6} = y_{42}\left(y_{34}\left(y_{11}y_{23} - y_{13}y_{21}\right) - \left(y_{11}y_{33} - y_{13}y_{31}\right)y_{24}\right); \\
M_{b6} = y_{55}y_{66} - y_{56}y_{65},
\end{gathered}
\tag{5}
$$

где индексы t и b у символа M означают принадлежность соответствующего минора к первой и второй подматрицам в (4), индексы 1…6 – порядковый номер минора в табл. 1. Недостатком диагонального деления является наличие миноров разного порядка, что увеличивает затраты при разложении определителей.

Разложение определителя разреженной матрицы на сумму определителей квазидиагональных матриц. Матрицы каждой пары миноров в предыдущем решении можно представить в виде одной квадидиагональной матрицы 6-го порядка, поскольку на основании формулы (3) определитель разреженной матрицы равен сумме определителей ξ квазидиагональных матриц

$$D = \sum_{\nu=1}^{\xi} (-1)^{p_\nu} D_\nu \ . \tag{6}$$

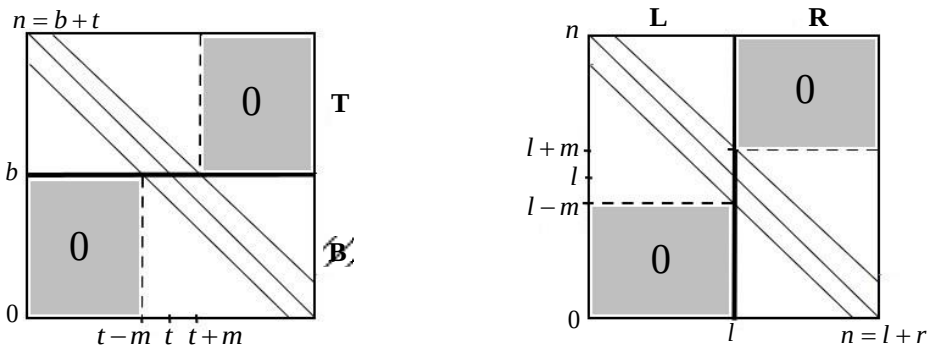
В формуле (6) квазидиагональная матрица частичного определителя D_ν имеет размерность n и содержит два непересекающихся диагональных блока, построенных по ДВ с порядковым номером ν. Например, матрица для ДВ 0000 и 1111 первого и второго блока матрицы (рис. 2,б) представлена на рис. 2, в и состоит из двух диагональных подматриц порядка 2 и 4. Частичный определитель D_ν находится как произведение определителей диагональных блоков. Показатель p_ν равен сумме номеров нулевых позиций в ДВ первого блока. Формула (6) обобщает формулу для определителя квазидиагональных матриц [8].

Половинное деление матрицы по горизонтали (по строкам) или по вертикали (по столбцам). Это разложение является следствием теоремы Лапласа [6]. При половинном делении разреженной матрицы с четным или нечетным порядком n на две подматрицы – верхнюю T (*top*) и нижнюю B (*bottom*) (рис. 4,а) – с одинаковым или отличающимся на единицу числом строк t и b – определитель матрицы равен сумме произведений миноров одного порядка из ненулевых столбцов подматрицы T и соответствующих алгебраических дополнений (АД) из столбцов подматрицы B.

Число слагаемых (миноров и АД в верхней T и нижней B подматрицах) находится как число сочетаний

$$\xi = C_{n-m_t-m_b}^{t-m_b} = C_{n-m_t-m_b}^{b-m_t}, \tag{7}$$

где m_t и m_b — число нулевых столбцов в подматрицах T и B.



а) б)

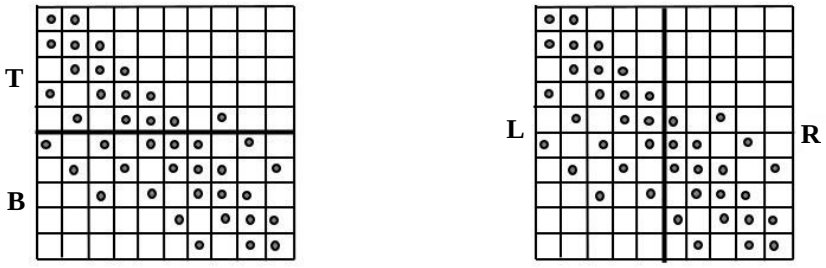
Рис. 4. Ленточная матрица с m диагоналями по одну сторону от главной диагонали при половинном делении (жирными линиями) по строкам (а) и столбцам (б)

При половинном делении ленточной матрицы с числом $t = b = n/2$ (рис. 4,а) и $t = (n+1)/2$; $b = (n-1)/2$ при четном и нечетном n число нулевых столбцов подматриц 1 и 2 определяется по формулам $m_t = m_b = n/2 - m$ и $m_t = (n-1)/2 - m$; $m_b = (n+1)/2 - m$ при соответствующих n. При этом формула (7) преобразуется в формулу (1), по которой число миноров и слагаемых в определителе (3) определяется как число сочетаний из $2m$ по m. Формула (1) справедлива и для ленточной матрицы с произвольным числом строк t и b. Общее число нулевых столбцов для четного и нечетного порядка $m_t + m_b = n - 2m$. На рис. 4,а заштрихованы области нулевых столбцов, число которых при $n >> m$ в каждой подматрице близко половине порядка матрицы $m_t \approx m_b \approx n/2$.

Если матрица разделена по столбцам на левую L (*left*) и правую R (*right*) подматрицы (рис. 4,б) с одинаковым или отличающимся на единицу числом столбцов l и r, то число слагаемых в определителе находится также по формуле (7), в которой $m_t = m_l$ и $m_b = m_r$ – число нулевых строк в подматрицах L и R.

В матрицах с несимметричным расположением ненулевых элементов число ненулевых столбцов и строк подматриц различается при делении по строкам и столбцам. Так, при делении матрицы 10-го порядка по строкам (рис. 5,а) число нулевых столбцов сверху $m_t = 3$ и снизу $m_b = 0$, а при делении по столбцам число нулевых строк слева $m_l = 2$ и справа $m_r = 4$ (рис. 5,б), то есть в 2 раза больше. При этом по формуле (7) число ξ слагаемых в определителе при делении по строкам равно 21, а при делении по столбцам – всего 4, что позволяет многократно уменьшить число слагаемых и время расчета.

Формирование половинных миноров для разреженной матрицы $A = \| A(i, j) \|$, $(i, j = 1, 2, .., n)$, разделенной по горизонтали (рис. 4,а), выполняется на основе n множеств номеров ненулевых столбцов $A_i = \{a_{i,k}\}$, где i — номер строки, как и в матрице A; $k = 1, 2, \ldots, \mu_i$ — номер элемента; μ_i — число ненулевых элементов в строке i матрицы A.



а) б)

Рис. 5. Разреженная матрица с произвольным расположением ненулевых элементов, разделенная пополам (жирной линией) по строкам (а) и столбцам (б)

Матрица A делится горизонтальной линией на две подматрицы – верхнюю T и нижнюю B с числом строк t и b, которые равны при четном и отличаются на 1 при нечетном числе n. Число ξ миноров порядка t и b в подматрицах T и B находится по формуле (7). Множества номеров столбцов, составляющих миноры для подматрицы T, получаются набором по одному элементу из множеств $A_1, A_2, \ldots, A_t$:

$$\theta_\nu = \left\{ a_{1,\alpha_\nu}, a_{2,\beta_\nu}, ..., a_{t,\gamma_\nu} \right\}, \tag{8}$$

где $\nu = 1, 2, \ldots, \xi$ — номер минора; $\alpha_\nu, \beta_\nu, \ldots, \gamma_\nu$ — номера элементов в множествах номеров ненулевых столбцов $A_1, A_2, \ldots, A_t$.

Во все сочетания θ_ν формулы (8) должны входить номера нулевых столбцов из подматрицы B. Множество номеров столбцов, составляющих миноры подматрицы B, находятся, как дополняющие множество (8) до полного ряда столбцов $1, 2, \ldots, n,$ в виде разности

$$\sigma_\nu = \{1, 2, ..., n\} \setminus \theta_\nu . \tag{9}$$

Формула для определителя матрицы записывается в виде суммы произведений миноров $M^T_{\theta_\nu}$ и $M^B_{\sigma_\nu}$ верхней и нижней подматриц

$$D = (-1)^{\frac{t(t-1)}{2}} \sum_{\nu=1}^{\xi} (-1)^{p_\nu} M^T_{\theta_\nu} M^B_{\sigma_\nu} , \tag{10}$$

где θ_ν и σ_ν — множества (8) и (9) — номера столбцов соответствующего минора; $p_\nu = a_{1,\alpha_\nu} + a_{2,\beta_\nu} + ... + a_{t,\gamma_\nu}$ — показатель знака, равный сумме номеров столбцов верхней подматрицы.

Формула (10) с половинными минорами наиболее эффективна по сравнению с другими вариантами применения теоремы Лапласа при параллельных вычислениях, поскольку обеспечивает равномерную загрузку произвольного числа процессоров (вычислительных ядер). Миноры в (10) находятся рекурсивно по этой же формуле. При делении матрицы вертикальной линией по столбцам на левую L и правую R подматрицы, как показано на рис. 4,б, получается формула, аналогичная (10). Для симметричной матрицы число нулевых строк и столбцов и число слагаемых в формулах вида (10) будет одинаковым.

Для разветвленной нерегулярной структуры определить число ненулевых миноров можно путем упорядоченного построения сети и последовательной нумерации узлов, например, слева–направо и сверху–вниз (рис. 3,б [27]). При этом сеть делится пополам по числу узлов (жирная штрих-пунктирная линия на рис. 3,б), а затем отсекаются (двойной штрих-пунктирной линией) узлы частей T и B, не связанные с подсхемами B и T соответственно. Число отсеченных узлов частей T и B равно числу нулевых столбцов m_t и m_b. Для сети на рис. 3,б $m_t = 4$ и $m_b = 3$. При этом число миноров $\xi = 35$ – числу сочетаний из 7 по 4 по формуле (7), то есть вдвое меньше, чем по ММДВ.

Разложение определителя ленточной матрицы 6-го порядка при делении по строкам (по горизонтали). Разделим матрицу на верхнюю T и нижнюю B подматрицы с числом строк $b = t = 3$:

1	$\boldsymbol{y_{11}}$	$\boldsymbol{y_{12}}$	$\boldsymbol{y_{13}}$				
2	$\boldsymbol{y_{21}}$	$\boldsymbol{y_{22}}$	$\boldsymbol{y_{23}}$	$\boldsymbol{y_{24}}$			T
3	$\boldsymbol{y_{31}}$	$\boldsymbol{y_{32}}$	$\boldsymbol{y_{33}}$	$\boldsymbol{y_{34}}$	$\boldsymbol{y_{35}}$		(11)
4		y_{42}	y_{43}	y_{44}	y_{45}	y_{46}	
5			y_{53}	y_{54}	y_{55}	y_{56}	B
6				y_{64}	y_{65}	y_{66}	
	1	2	3	4	5	6	

где элементы верхней подматрицы выделены жирным шрифтом.

Число сочетаний из 6 столбцов подматрицы T по 3 равно 20. С учетом нулевых столбцов 6 и 1 в подматрицах T и B множество номеров столбцов для миноров подматрицы T находится путем фиксации номера столбца 1, нулевого в подматрице B, и сочетания по 2 из 4-х ненулевых столбцов 2…5, в которые не входят нулевые столбцы, принадлежащие хотя бы одной из подматриц:

$$\theta_v = \{1,2,3;\ 1,2,4;\ 1,2,5;\ 1,3,4;\ 1,3,5,\ 1,4,5\}. \tag{12}$$

Этим сочетаниям столбцов соответствуют ДВ {111000, 110100, 110010, 101100, 101010, 100011}, которые используются при формировании миноров. Таким образом, учет нулевых столбцов в подматрицах T и B многократно (с 20 до 6) сокращает число сочетаний.

Множество сочетаний столбцов, образующих миноры третьего порядка для нижней подматрицы B, находится по формуле (9) как дополнение множества (12) до полного ряда номеров столбцов:

$$\sigma_v = \{4,5,6;\ 3,5,6;\ 3,4,6;\ 2,5,6;\ 2,4,6;\ 2,3,6\} \tag{13}$$

или в форме ДВ {000111, 001011, 001101, 010011, 010101, 011100}.

Определитель матрицы (11) записывается в соответствии с формулой (10) как сумма произведений соответствующих миноров со столбцами из множеств (12) и (13)

$$\begin{gathered} D = M_{123}M_{456} - M_{124}M_{356} + M_{125}M_{346} + M_{134}M_{256} - \\ -M_{135}M_{246} + M_{145}M_{236}. \end{gathered} \tag{14}$$

В (14) при символе M указаны номера столбцов, а номера строк принимают значения 123 и 456 у первых и вторых сомножителей соответственно. Знаки слагаемых с порядковым номером 2 и 5 отрицательные в соответствии с (10), поскольку суммы номеров строк и столбцов первого минора принимают нечетные значения.

Символьные выражения для миноров из формулы (14) имеют вид:

$$
\begin{gathered}
M_{123} = y_{11}(y_{22}y_{33} - y_{23}y_{32}) - y_{12}(y_{21}y_{33} - y_{23}y_{31}) + y_{13}(y_{21}y_{32} - y_{22}y_{31});\\
M_{456} = y_{44}(y_{55}y_{66} - y_{56}y_{65}) - y_{45}(y_{54}y_{66} - y_{56}y_{64}) + y_{46}(y_{54}y_{65} - y_{55}y_{64});\\
M_{124} = y_{11}(y_{22}y_{43} - y_{23}y_{42}) - y_{21}(y_{12}y_{43} - y_{13}y_{42});\\
M_{356} = y_{34}(y_{55}y_{66} - y_{56}y_{65}) - y_{35}(y_{54}y_{66} - y_{56}y_{64});\\
M_{125} = y_{53}(y_{11}y_{22} - y_{12}y_{21});\\
M_{346} = y_{34}(y_{45}y_{66} - y_{46}y_{65}) - y_{35}(y_{44}y_{66} - y_{46}y_{64});\\
M_{134} = y_{11}(y_{32}y_{43} - y_{33}y_{42}) - y_{31}(y_{12}y_{43} - y_{13}y_{42});\\
M_{256} = y_{24}(y_{55}y_{66} - y_{56}y_{65});\\
M_{135} = y_{53}(y_{11}y_{32} - y_{12}y_{31}); \quad M_{246} = y_{24}(y_{45}y_{66} - y_{46}y_{65});\\
M_{145} = y_{53}y_{11}y_{42}; \quad M_{236} = y_{24}y_{35}y_{66}\ .
\end{gathered}
\tag{15}
$$

Половинное деление по столбцам (по вертикали). Матрица имеет вид (граница левой и правой подматриц – жирная линия)

1	$\boldsymbol{y_{11}}$	$\boldsymbol{y_{12}}$	$\boldsymbol{y_{13}}$			
2	$\boldsymbol{y_{21}}$	$\boldsymbol{y_{22}}$	$\boldsymbol{y_{23}}$	y_{24}		
3	$\boldsymbol{y_{31}}$	$\boldsymbol{y_{32}}$	$\boldsymbol{y_{33}}$	y_{34}	y_{35}	
4		$\boldsymbol{y_{42}}$	$\boldsymbol{y_{43}}$	y_{44}	y_{45}	y_{46}
5			$\boldsymbol{y_{53}}$	y_{54}	y_{55}	y_{56}
6				y_{64}	y_{65}	y_{66}
	1	2	3	4	5	6

(16)

Все 6 пар миноров приведены в табл. 2.

Формулы для определителя при делении матрицы (16) на две подматрицы по столбцам имеют такой же вид, как и в (14)–(15). При этом индексы при символах миноров M означают номера строк, а не номера столбцов, как в (14). Из табл. 2 видно, что разложение матрицы по столбцам не содержит миноры размерности, большей половины порядка, что уменьшает трудоемкость разложения определителей. Подобными свойствами обладает также половинное деление матрицы по строкам. Выражения миноров в силу симметрии матрицы (16) получаются из миноров (15) путем взаимной замены цифр индексов у всех недиагональных элементов, например, y_{12} на y_{21}.

Таблица 2

Миноры при делении матрицы (16) 6-го порядка по вертикали

№	Для левой подматрицы	Для правой подматрицы
1	y_{11} y_{12} y_{13} y_{21} y_{22} y_{23} y_{31} y_{32} y_{33}	y_{44} y_{45} y_{46} y_{54} y_{55} y_{56} y_{64} y_{65} y_{66}
2	y_{11} y_{12} y_{13} y_{21} y_{22} y_{23} y_{42} y_{43}	y_{34} y_{35} y_{54} y_{55} y_{56} y_{64} y_{65} y_{66}
3	y_{11} y_{12} y_{13} y_{21} y_{22} y_{23} y_{53}	y_{34} y_{35} y_{44} y_{45} y_{46} y_{64} y_{65} y_{66}
4	y_{11} y_{12} y_{13} y_{31} y_{32} y_{33} y_{42} y_{43}	y_{24} y_{54} y_{55} y_{56} y_{64} y_{65} y_{66}
5	y_{11} y_{12} y_{13} y_{31} y_{32} y_{33} y_{53}	y_{24} y_{44} y_{45} y_{46} y_{64} y_{65} y_{66}
6	y_{11} y_{12} y_{13} y_{42} y_{43} y_{53}	y_{24} y_{34} y_{35} y_{64} y_{65} y_{66}

Алгоритмы разложения определителя ленточной матрицы на пары миноров половинного порядка при делении матрицы по горизонтали (по строкам) и по вертикали (по столбцам). Исходная матрица порядка n (рис. 4,а) делится по строкам горизонтальной линией на две подматрицы – верхнюю T и нижнюю B с числом строк t и b ($n = t + b$). При четном n число $t = b$, в случае нечетного n порядок нижней подматрицы больше на 1: $b = t + 1$. Столбцы, состоящие только из нулевых элементов, образуют нулевые блоки, находящиеся в конце верхней и начале нижней подматрицы. Верхняя подматрица имеет m_t таких столбцов, а нижняя – m_b.

При делении матрицы по строкам для получения ξ ненулевых миноров верхней подматрицы (рис. 4,а) перечисление сочетаний начинается с первого столбца, при этом: 1) в сочетаниях не участвуют столбцы из правого верхнего нулевого блока; 2) каждое сочета-

ние обязательно заканчивается номерами столбцов, находящимися над левым нижним нулевым блоком.

Для нахождения каждого из ξ слагаемых, число которых рассчитано по формуле (1), используется последовательность шагов:

А. Вычисление строковой s составляющей знака АД суммированием номеров строк верхней подматрицы.

Б. Перебор сочетаний по $n/2$ из $n-m_t$ ненулевых столбцов верхней подматрицы, обязательно содержащих m_b столбцов, в которых содержатся только нулевые элементы нижней подматрицы. Каждое такое сочетание столбцов соответствует минору, на который умножается взаимно дополнительное АД.

В. Вычисление столбцовой c составляющей знака АД суммированием номеров стобцов нижней подматрицы, дополняющих столбцы верхней подматрицы, соответствующие выбранному сочетанию.

Г. Рекурсивное вычисление очередной пары минора и взаимно дополнительного минора.

Д. Добавление к определителю матрицы текущего слагаемого как произведения миноров верхней и нижней подматриц с учетом знаковой переменной $s+c$.

В случае половинного деления по вертикали исходная матрица порядка n (рис. 4,б) делится по столбцам вертикальной линией на две подматрицы – левую L и правую R с числом строк l и r ($n=l+r$). При четном n число $l=r$, в случае нечетного n порядок правой подматрицы больше на 1: $r=l+1$. Строки, состоящие только из нулевых элементов, образуют нулевые блоки, находящиеся внизу левой и наверху правой подматрицы. Левая подматрица имеет m_l таких строк, а правая – m_r.

При делении матрицы по столбцам для получения ξ ненулевых миноров левой подматрицы (рис. 4,б) перечисление сочетаний начинается с первой строки, при этом: 1) в сочетаниях не участвуют строки из левого нижнего нулевого блока; 2) каждое сочетание обязательно заканчивается номерами строк, находящимися слева от правого нижнего нулевого блока. Для нахождения каждого из ξ слагаемых, число которых рассчитывается по формуле (1) используется последовательность шагов А–Д, аналогичная приведенной выше.

В ходе раскрытия каждого минора (пункт Г) для сокращения времени расчета определителя матрицы предусматриваются аналитические преобразования, многократно сокращающие длину строки минора. При этом учитываются: 1) нулевые строки и столбцы при генерации миноров; 2) нулевые миноры в парах сомножителей каждого слагаемого; 3) наличие одинаковых значений у элементов матрицы. Избыточные операции также сокращаются путем выбора варианта половинного деления матрицы: по горизонтали или по вертикали.

Сравнение алгоритмов половинного деления с оптимальной сверткой выражений. Формулы (14)–(15), полученные половинным делением по строкам, содержат 64 операции умножения, как и в формуле (5) при половинном диагональном делении. Аддитивных операций формулы (14)–(15) содержат 31, что меньше 33 операций при одном диагональном делении (5). Однако при повторном блочно-диагональном делении двух матриц 4-го порядка (табл. 1) на два диагональных блока третьего порядка появляются избыточные операции вычитания за счет удаления строк и столбцов в подматрице пересечения, что иллюстрируется ниже на почти полной матрице четвертого порядка, являющейся первым диагональным блоком в матрице (4):

$\boldsymbol{y_{11}}$	$\boldsymbol{y_{12}}$	$\boldsymbol{y_{13}}$	
$\boldsymbol{y_{21}}$	$\boldsymbol{y_{22}}$	$\boldsymbol{y_{23}}$	y_{24}
$\boldsymbol{y_{31}}$	y_{32}	y_{33}	y_{34}
	y_{42}	y_{43}	y_{44}

(17)

Матрицу (17) можно представить в виде двух диагональных блоков третьего порядка при половинном распределении элементов в матрице пересечения второго порядка. Элементы первого блока выделены в (17) жирным шрифтом. Используя ММДВ, получаем выражение определителя:

$$\begin{gathered} D_1 = y_{11}y_{24}\left(y_{32}y_{43} - y_{33}y_{42}\right) + y_{13}y_{31}y_{24}y_{42} - \left(-y_{12}y_{31}\right)\left(-y_{24}\right)y_{43} - \\ -\left(y_{11}y_{23} - y_{13}y_{21}\right)\left(y_{32}y_{44} - y_{34}y_{42}\right) + \left(y_{11}y_{22} - y_{12}y_{21}\right)\left(y_{33}y_{44} - y_{34}y_{43}\right) + \\ + y_{31}\left(y_{12}y_{23} - y_{13}y_{22}\right)y_{44}. \end{gathered} \tag{18}$$

Половинное деление по вертикали приводит к выражению:

$$\begin{gathered} D_2 = (y_{11}y_{22} - y_{12}y_{21})(y_{33}y_{44} - y_{34}y_{43}) - \\ -(y_{11}y_{32} - y_{12}y_{31})(y_{23}y_{44} - y_{24}y_{43}) + + y_{11}y_{42}(y_{23}y_{34} - y_{24}y_{33}) + \\ +(y_{21}y_{32} - y_{22}y_{31})y_{13}y_{44} - y_{21}y_{42}y_{13}y_{34} + y_{31}y_{42}y_{13}y_{24}. \end{gathered} \tag{19}$$

В соответствии с правилами оптимальной свертки алгебраических выражений [13] разложение определителя матрицы следует выполнять по строке или столбцу с минимальным числом элементов [16]. Для матрицы (17) в первую очередь следует выделять элемент y_{44}, который чаще других элементов четвертой строки или столбца присутствует в слагаемых определителя. Это обусловлено тем, что при выделении этого элемента удаляются не полностью заполненые строка и столбец. Далее можно выполнять разложение по элементам y_{42} и y_{43} или y_{24} и y_{34}, что приводит к выражению:

$$\begin{gathered} D_3 = y_{44}[y_{31}(y_{12}y_{23} - y_{13}y_{22}) - y_{32}(y_{11}y_{23} - y_{13}y_{21}) + \\ + y_{33}(y_{11}y_{22} - y_{12}y_{21})] - y_{34}[-y_{42}(y_{11}\, y_{23} - y_{13}y_{21}) + \\ + y_{43}(y_{11}y_{22} - y_{12}y_{21})] + y_{24}[y_{11}(y_{32}y_{43} - y_{33}y_{42}) - \\ - y_{31}(y_{12}y_{43} - y_{13}y_{42})]. \end{gathered} \tag{20}$$

Система Maple [15] рассматривает все варианты выделения элементов с одинаковыми показателями участия в развернутом выражении или подвыражении. Поэтому определитель имеет вид

$$\begin{gathered} D_4 = ((y_{22}y_{33} - y_{23}y_{32})\, y_{44} + (y_{32}y_{43} - y_{33}y_{42})\, y_{24} + \\ + y_{34}(-y_{22}y_{43} + y_{23}y_{42})\, y_{11} + [(-y_{21}y_{33} + + y_{43}(y_{11}y_{22} - y_{12}y_{21})] + \\ + y_{24}[y_{11}(y_{32}y_{43} - y_{33}y_{42}) - y_{31}(y_{12}y_{43} - y_{13}y_{42})]. \end{gathered} \tag{21}$$

Выражения (18)–(20) содержат по 24 умножения и по 3 сложения. Число операций вычитания в этих выражениях: 10, 8, 11 соответственно. Формула (21) включает 22 умножения, 7 сложений и 8 вычитаний. По числу умножений ее можно считать более экономной.

Покажем, что минимальное по сложности выражение (21) может быть получено непосредственно по матрице (17) без предварительного получения развернутого выражения определителя с использованием половинного деления. Сначала выделим элементы y_{11} и y_{44}, которые находятся в неполных строках и столбцах, а оставшаяся подматрица раскладывается путем половинного деления по горизонтали. Уже этот пример показывает, что свертка выражений, соответствущих матричным определителям высокого порядка, невозможна без половинного деления матриц.

Программа HalfsVal для параллельного расчета определителей разреженных матриц на основе половинного деления. Реализованы два режима расчета определителя матрицы: 1) делением на два диагональных блока (рис. 2,б, формула (6)); 2) делением на две подматрицы по столбцам на левую и правую подматрицы (рис. 4,б, формула (10)). Раскрытие каждого минора выполняется рекурсивно по тем же формулам, в отличие от [22,25] генерируются только пары ненулевых миноров.

Программа тестируется в обоих режимах работы на пятидиагональных матрицах A порядка $n = 400\ldots999$, обобщающих матрицу Гинзбурга порядка 40 [28]:

$$\begin{gathered} a_{11} = a_{nn} = 5; a_{jj} = 6, \;\; j = \; 2,3,\ldots,n-1; \\ a_{j,j+1} = -4, \;\; j = 1,2,\ldots,n-1; \\ a_{j,j-1} = -4, \;\; j = 2,3, \;\ldots,n; \\ a_{j,j+2} = 1, \;\; j = 1,2,\ldots,n-2; \\ a_{j,j-2} = 1, \;\; j = 3,4, \;\ldots,n. \end{gathered} \tag{22}$$

Для случая $n = 6$ матрица (16) делится по вертикали на две подматрицы: левую и правую, размерностью 6 на 3. Сомножители слагаемых определителя (алгебраическое дополнение и минор), соответствуют матрицам в строках табл. 2 и помещены в квадратные скобки:

$$D = [5]*[5] + [4-4*5]*[5*4-4] + [6*5-4*4]*[5*(4*4-6)-4*4+1] +$$
$$+[4*(4*5-4)+1-6*5]*[5*6-4*4]+[4*(4*4-6*5)-4+$$
$$+4*5]*[5*(6*4-4)-4*4*4+4]+[6*(6*5-4*4)+4*(4-4*5)+$$
$$+4*4-6]*[5*(6*6-4*4)+4*(4-4*6)+4*4-6] = 49.$$

Результаты расчета определителей матриц A порядка $n = 400\ldots999$ по программе HalfsVal на компьютере с частотой 2,8 ГГц и ОЗУ 4 Гб представлены в табл. 3. Формула определителя после первого половинного деления содержит в соответствии с формулой (1) шесть слагаемых (режим 1) или эти слагаемые в виде произведений пар миноров (режим 2). Размеры формул миноров при каждом порядке матриц n указаны средними значениями (столбец 3 в табл. 3) и отличаются в пределах от 3 до 1,5 %. Размеры слагаемых (режим 1) больше суммы размеров соответствующих двух миноров (режим 2) на 20 – 23 %. Время генерации слагаемых (столбец 4) и миноров (столбец 5) изменяется в пределах от 2,5 до 15 %. Время вычисления слагаемого или минора пренебрежимо мало по сравнению со временем их генерации.

Результаты параллельной работы программы HalfsVal сведены в табл. 4. При 1-, 6- и 12-поточном режиме время расчета определителей матриц порядка 400…999 оказывается примерно в 5…3 (столбец 2 в табл. 4), 23…15 (столбец 3) и 40…27 (столбец 4) раз соответственно меньше, чем по программе Maple (столбец 5).

Параллельный расчет численных определителей ленточных матриц при половинном делении и отклонении от него. Расчет выполняется в системе Maple [15]. Для тестирования используется ленточная матрица A (22) с $n = 900\ldots2000$ и $m = 2$. Численные значения миноров рассчитываются с помощью оператора Det в системе Maple при 20-ти десятичных разрядах. Неполовинное деление матрицы представлено нахождением определителя через одно- и трехчетвертные миноры. Из табл. 5 видно, что половинные миноры (столбец 5) требуют времени в 1,2…1,5 раза меньше, чем неполовинные (столбец 4). Время расчета при 6 и 12 поточном режиме (столбцы 6 и 7) в 1,3…2,8 и 2,5…5,5 раз меньше, чем при расчете определителя без деления на миноры (столбец 3).

Таблица 3

Характеристики программы HalfsVal при расчете определителей целочисленных ленточных матриц порядка *n* = 400…999

n	Значение определителя	Средняя длина строки минора (режим 2)	Среднее время генерации в минутах' и секундах"	
			слагаемого (режим 1)	минора (режим 2)
400	160801	23972643	23,4"	2,0"
500	251001	57093867	54,7"	6,0"
600	361201	108129051	1'39,8"	10,2"
700	491401	232932556	2'50,6"	14,6"
800	641601	285867676	4'41,7"	24,7"
900	811801	451648108	7'24,5"	45,2"
999	1000000	679776508	11'27,4"	1'21"

Таблица 4

Сравнение времени *t* (минуты' секунды") целочисленного расчета определителей ленточных матриц по программе HalfsVal и системе Maple

n	*t* по Halfscal при числе потоков *p*:			*t* по Maple (det)
	1	6	12	
400	34,94"	6,52"	3,56"	1'57"
500	1'38"	18,15"	9,85"	4'13"
600	2'46"	28,34"	14,86"	7'58"
700	4'05"	45,7"	25,2"	14'32"
800	6'26"	70,2"	38,8"	21'04"
900	11'47"	2'10,5"	1'12,2"	38'04"
999	19'14"	3'28,8"	1'56,9"	53'34"

Таблица 5

Время (в секундах) численного (при 20 десятичных разрядах) расчета определителя ленточной матрицы (22) в одно- и многопоточном режиме с помощью половинных и неполовинных миноров

n	Значение определителя	Число потоков				
		1			6	12
		без деления	1/4 и 3/4 миноры	1/2 миноры		
900	811801,0000	4,41	14,41	11,53	1,93	0,97
1000	1002001,000	5,19	27,48	24,31	4,06	2,04
1200	1442401,000	9,13	41,04	28,98	5,01	2,52
1500	2253001,000	15,14	52,18	39,73	6,63	3,32
1700	2893401,000	24,57	78,54	52,74	8.81	4,41
2000	4004001,000	34,25	114,8	77,84	12,98	6,50

Выводы и рекомендации. 1. Предложены алгоритмы разложения определителя на основе половинного деления разреженных мат-

риц на подматрицы вдоль главной диагонали, по горизонтали и вертикали для параллельного расчета с учетом строк и столбцов, состоящих из нулей. Получены формулы для числа пар взаимно дополнительных ненулевых миноров матриц графов (сетей) с цепной, магистральной и разветвленной структурой.

2. Установлено, что рекурсивное деление матрицы на две подматрицы приводит к парам миноров с различной размерностью и компактностью выражений, но оптимальным является половинное деление, когда число ненулевых элементов подматриц одинаково или отличается на единицу. Для ленточных матриц алгоритмы половинного деления обеспечивают примерно равные затраты времени расчета определителя и размера строки минора. При произвольном заполнении матрицы один из вариантов половинного деления может быть предпочтительнее других, но алгоритмы половинного деления матрицы по вертикали или горизонтали более эффективны.

3. Разработана программа HalfsVal для параллельного расчета определителей разреженных матриц высокого порядка при равномерной загрузке процессоров. Обеспечивается ускорение расчета как для целочисленных матриц высокого порядка, конкурируя с системами компьютерной алгебры, так и в составе численных программ решения СЛАУ. Выражениям на основе половинного деления присуще меньшее число операций, чем при традиционном использовании теоремы Лапласа и формулам, полученным Maple или CirSym.

4. Преимуществом блочно-диагонального представления матриц является соответствие матричных блоков их реализации в моделируемой системе. Это упрощает многовариантный анализ и структурный синтез на базе типовых звеньев конструкции. Однако алгоритм ММДВ более сложный, порядок блоков изменяется, что ухудшает балансировку при использовании нескольких процессоров. Поэтому для решения матричных задач общего назначения целесообразно применять алгоритмы половинного рекурсивного деления матрицы по вертикали или горизонтали или использовать их для разложении определителей квазидиагональных матриц.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Особенности математического моделирования технических устройств. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 1, с. 5–17.

[2] Гергель В.П. *Теория и практика параллельных вычислений. Электронная книга.* Н. Новгород, ИНТУИТ, 2007, 355 с.

[3] Ортега Дж. *Введение в параллельные и векторные методы решения линейных систем*. Москва, Мир, 1991, 367 с.

[4] Беляев Н.А. Автоматическое конструирование высокопроизводительных параллельных программ для задач разреженной линейной алгебры в системе LuNA. *Проблемы информатики*, 2022, №3 (56), с. 46–60.

[5] Middeke J., Jeffrey D.J., Koutschan C. Common factors in fraction-free matrix decompositions. *Mathematics in Computer Science,* 2020, vol. 15, no. 103, pp. 589–608.

[6] Корн Г., Корн Т. *Справочник по математике для научных работников и инженеров*. Москва, Наука,1974, 831 с.

[7] Сигорский В.П. *Математический аппарат инженера*. Киев, Техника, 1975, 768 с.

[8] Гантмахер Ф.Р. *Теория матриц*. Москва, Наука, 1966, 577 с.

[9] Тоу Д. Составление уравнений цепи с помощью методов разбиения. *ТИИЭР*, 1967, т. 55, № 11, с. 263–265.

[10] Филаретов В. В. Теорема Сигорского об определителе суммы матриц и диакоптика. *Электроника и связь. Выпуск "Электроника и нанотехнологии"*, 2010, № 2, с. 5–13.

[11] Филаретов В.В. Метод двоичных векторов для топологического анализа электронных схем по частям. *Электричество,* 2001, № 8, с. 33–42.

[12] Filaretov V.V., Gorshkov K.S., Kurganov S.A., Nedorezov M.V. Generalized Parameter Extraction Method for Symbolic Analysis of Analog Circuits Containing Pathological Elements. *Lecture Notes in Electrical Engineering*, 2018, vol. 479 (*Pathological Elements in Analog Circuit Design*), pp. 31–70.

[13] Filaretov V., Gorshkov K. Efficient generation of compact symbolic network functions in a nested rational form. *International Journal of Circuit Theory and Applications: Research articles,* 2020, vol. 48, no. 7, pp. 1032-1056.

[14] Бухбергера Б., Коллинза Дж., Лооса Р. *Компьютерная алгебра: Символьные и алгебраические вычисления*. Москва, Мир, 1986, 392 с.

[15] Дьяконов В.П. *Maple 10/11/12/13/14 в математических расчетах*. Москва, ДМК Пресс, 2011, 800 с.

[16] Филаретов В.В. Синтез оптимальных формул схемных функций электрических цепей. *Электричество,* 1995, № 4, с. 36-43.

[17] Филаретов В.В. Схемное отображение матрицы для символьного решения систем линейных алгебраических уравнений. *Логико-алгебраические методы, модели, прикладные применения: Труды международународной конференции КЛИН–2001*. Ульяновск, УлГТУ, 2001, т. 3, с. 13–15.

[18] Королев Ф.А., Филаретов В.В. Сравнение способов наращивания и половинного деления при символьном раскрытии матричных определителей. *Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международный сборник научных трудов.* Ульяновск, УлГТУ, 2009, вып. 7, с. 183–193.

[19] Филаретов В.В. Генерация компактных формул для матричных определителей. *Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международный сборник научных трудов.* Ульяновск, УлГТУ, 2012, вып. 10, с. 120–133.

[20] Shi G. Computational complexity analysis of determinant decision diagram. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs,* 2010, vol. 57, no. 10, pp. 828–832.

[21] Недорезов М. В., Филаретов В. В. Минимальные формулы определителей полных матриц на основе их половинного деления. *Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международный сборник научных трудов.* Ульяновск, УлГТУ, 2020, вып. 16, с. 124–144.

[22] Недорезов П. В., Филаретов В. В. Оптимизация символьных определителей разреженных матриц. *Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международный сборник научных трудов.* Ульяновск, УлГТУ, 2020, вып. 16, с. 153–163.

[23] Недорезов М. В., Тимофеев В. Ф., Филаретов В. В. Вычисление символьных определителей полных матриц на основе их половинного деления и наращивания строк. *Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международный сборник научных трудов*. Ульяновск, УлГТУ, 2022, вып. 17, с. 120–134.

[24] Кузьмин Н. П., Курганов Д. С., Филаретов В. В. Параллельный расчет символьных определителей полных матриц высокого порядка при произвольном числе процессоров. *Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международный сборник научных трудов.* Ульяновск, УлГТУ, 2022, вып. 17, с. 135–141.

[25] Горшков К. С., Недорезов П. В., Филаретов В. В. Генерация и вычисление компактных символьных определителей для разреженных матриц высокого порядка. *Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международный сборник научных трудов.* Ульяновск, УлГТУ, 2022, вып. 17, с. 142–151.

[26] Брамеллер А., Алан Р., Хэмэм Я. *Слабозаполненные матрицы. Анализ электроэнергетических систем*. Москва, Энергия, 1979, 192 с.

[27] Димо П. *Узловой анализ электрических систем*. Москва, Мир, 1973, 264 с.

[28] Уилкинсон Д., Райнш К. *Справочник по алгоритмам на языке Алгол. Линейная алгебра*. Москва, Машиностроение, 1976, 389 с.

Статья поступила в редакцию 31.01.2024

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:
Кузьмин Н. П., Курганов Д. С., Курганов С. А., Филаретов В. В. Алгоритмы параллельного расчета определителей разреженных матриц на основе половинного деления. *Математическое моделирование и численные методы*, 2025, № 3, с. 117–141.

Кузьмин Николай Павлович — инженер I категории Ульяновского филиала Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН. e-mail: niko_rus@mail.ru

Курганов Дмитрий Сергеевич — инженер ООО «Телеком.ру». e-mail: kds_ul@mail.ru

Курганов Сергей Александрович — д-р техн. наук, профессор кафедры «Электроснабжение» Ульяновского государственного технического университета. e-mail: sakurganov@mail.ru

Филаретов Владимир Валентинович — д-р техн. наук, профессор кафедры «Электроснабжение» Ульяновского государственного технического университета. e-mail: vvfil@mail.ru

Parallel calculation of determinants of sparse matrices based on half minors

© N.P. Kuzmin[1], D.S. Kurganov[2], S.A. Kurganov[3], V.V. Filaretov[3]

[1]Kotelnikov IRE RAS, Ulyanovsk, 432071, Russia
[2]Company "TELECOM.RU", Ulyanovsk, 432045, Russia
[3]Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk, 432027, Russia

The decomposition of the determinant of a sparse, including ribbon, matrix into the sum of the determinants of quasi-diagonal matrices is proposed. Algorithms for recursive

decomposition of the determinant of a matrix presented in the form of two diagonal blocks or halves from horizontal or vertical division, taking into account zero rows and columns for parallel calculation, have been developed and implemented. It is proved that when dividing a ribbon matrix with a ribbon width of 2m+1 in half horizontally (vertically) into an equal or different number of rows (columns), the minors of one submatrix correspond to combinations of 2m columns (rows) in m, and the conjugate minors correspond to the complements of these combinations in another submatrix, which simplifies the application of Laplace's theorem. The concept of a matrix binary vector is introduced. The relationship of combinations of row and column numbers of the matrix with halves of binary vectors containing an equal number of units is established. The use of half-order minors leads the solution of the problem to subtasks of the minimum identical dimension, ensuring uniform loading of processors (computing cores). The calculation time for both integer and numerical (with a limited number of decimal places) determinants is reduced many times. With one, 6 and 12 inline modes, the time of integer calculation of matrix determinants of the order of 400...999 decreases in comparison with the time of the Det operator of the Maple system by 5...3, 23...15 and 40...27 times, and the time of numerical calculation by 1.3...2.8 and 2.5...5.5 times with the number of threads 6 and 12 and the order of the matrices 900...2000. Half division is implemented in the program of symbolic disclosure and calculation of the determinant of the matrix, but can be used for a simple parallel modification of any program for the numerical solution of systems of linear algebraic equations.

***Keywords**: matrix determinant, Laplace's theorem, block matrix, quasi-diagonal matrix, ribbon matrix, binary vector, half division, symbolic computation, parallel calculation, electrical network*

REFERENCES

[1] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. Special features of mathematical modeling of technical instruments. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2014, no. 1, pp. 5–17.

[2] Gergel V.P. *Teorya i praktika parallelnyh vychislenij. Elektronnaya kniga* [Theory and practice of parallel computing. E–book]. N. Novgorod, INTUIT Publ., 355 p.

[3] Ortega J. *Introduction to Parallel and Vector Solution of Linear Systems*. Springer, 1988, 316 p.

[4] Belyaev N.A. Avtomaticheskoe konstruirovanie vysokoproizvoditel'nyh paralel'nyh program dlya zadach lineynoj razryazhennoj algebry v sisteme LuNA [Automatic design of high-performance parallel programs for sparse linear algebra problems in the LuNA system]. *Problems of computer science*, 2022, no. 3 (56), pp. 46–60.

[5] Middeke J., Jeffrey D.J., Koutschan C. Common factors in fraction-free matrix decompositions. *Mathematics in Computer Science,* 2020, vol. 15, no. 103, pp. 589–608.

[6] Korn G., Korn T. *Mathematical Handbook for scientists and engineers*. McGraw-Hill Book Company, 1968, 1130 p.

[7] Sigorskij V.P. *Matematicheskij apparat inzhenera* [Mathematical apparatus of an engineer]. Kiev, Technika, 1975, 768 p.

[8] Gantmaher F.R. *Teoriya matrits* [Matrix theory]. Moskva*,* Nauka Publ., 1966, 577 p.

[9] Tou D. Sostavlenie uravnenij tsepi s pomosch´yu metodov razbieniya [Compilation of circuit equations using partitioning methods]. *TIIER*, 1967, vol. 55, no. 11, pp. 263–265.

[10] Filaretov V. V. Teorema Sigorskogo ob opredelitele summy matric i diakoptika [Sigorsky's theorem on the determinant of the sum of matrices and diakoptic]. *Elektronika i svyaz'. Vypusk «Elektronika i nanotekhnolo-gii»* [Electronics and communications. Issue "Electronics and nanotechnology"], 2010, no. 2, pp. 5–13.

[11] Filaretov V.V. A method of binary vectors for a topological analysis of electronic circuits by parts. *Electrical Technology Russia,* 2001, no. 8, pp. 33–42.

[12] Filaretov V.V., Gorshkov K.S., Kurganov S.A., Nedorezov M.V. Generalized Parameter Extraction Method for Symbolic Analysis of Analog Circuits Containing Pathological Elements. *Lecture Notes in Electrical Engineering*, 2018, vol. 479 (*Pathological Elements in Analog Circuit Design*), pp. 31–70.

[13] Filaretov V., Gorshkov K. Efficient generation of compact symbolic network functions in a nested rational form. *International Journal of Circuit Theory and Applications: Research articles,* 2020, vol. 48, no. 7, pp. 1032-1056.

[14] Buchberger B., Collins J., Loos R. *Komp´yuternaya algebra: simvolnye i algebraicheskie vychisleniya* [Computer algebra: Symbolic and algebraic calculations]. Moscow, MIR Publ., 1986, 392 p.

[15] Dyakonov V.P. *Maple 10/11/12/13/14 v matematicheskih raschetah* [*Maple 10/11/12/13/14 in mathematical calculations*]. Moscow, DMK Press, 2011, 800 p.

[16] Filaretov V.V. Synthesis of optimal formulae for functions of electrical circuit. *Electrical Technology Russia,* 1995, no. 4, pp. 36–43.

[17] Filaretov V.V. Skhemnoe otobrazhenie matricy dlya simvolnogo resheniya system linejnyh algebraicheskih uravnenij [Schematic representation of a matrix for symbolic solution of systems of linear algebraic equations]. *Logical-algebraic Methods, Models, Applied Using. Proc. Int. Conf. KLIN–2001*. Ulyanovsk: UlSTU, 2001, vol. 3, pp. 13–15.

[18] Korolev F.A., Filaretov V.V. Sravnenie metodov naraschivaniya i polovinnogo deleniya pri simvol'nom raskrytii matrichnyh opredeliteley [Comparison of methods of extension and poly-wine division with symbolic disclosure of matrix determinants]. *Synthesis, analysis and diagnostics of electronic circuits: Int. Collection of scientific papers.* Ulyanovsk, UlSTU publ., 2009, iss. 7, pp. 183–193.

[19] Filaretov V.V. Generatsiya kompaktnyh formul dlya matrichnyh opredelitelej [Generation of compact formulas for matrix determinants]. *Synthesis, analysis and diagnostics of electronic circuits: Int. Collection of scientific papers.* Ulyanovsk, UlSTU publ., 2012, issue 10, pp. 120–133.

[20] Shi G. Computational complexity analysis of determinant decision diagram. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs,* 2010, vol. 57, no. 10, pp. 828–832.

[21] Nedorezov M. V., Filaretov V. V. Minimalnye formuly opredelitelej polnykh matrits na osnove ikh polovinnogo deleniya [Minimal formulas of determinants of complete matrices based on their half division]. *Synthesis, analysis and diagnostics of electronic circuits: Int. Collection of scientific papers.* Ulyanovsk, Ul-GTU publ., 2020, issue 16, pp. 124–144.

[22] Nedorezov P. V., Filaretov V. V. Optimizatsiya simvolnyh opredelitelej razrezhennyh matric [Optimization of symbolic definitions of sparse matrices]. *Synthesis, analysis and diagnostics of electronic circuits: Int. Collection of scientific papers*. Ulyanovsk, UlSTU publ., 2020, issue 16, pp. 153–163.

[23] Nedorezov M. V., Timofeev V. F., Filaretov V. V. Vychislenie simvolnykh opredelitelej polnykh matrits na osnove [Calculation of symbolic determinants of complete matrices on the basis of their half division and line extension]. *Synthesis, analysis and diagnostics of electronic circuits: Int. Collection of scientific papers*. Ulyanovsk. UlSTU publ., 2022, issue 17, pp. 120–134.

[24] Kuzmin N. P., Kurganov D. S., Filaretov V. V. Parallelnyj raschet simvolnyh opredelitelej polnyh matric vysokogo poryadka pri proizvolnom chisle processorov [Parallel calculation of symbolic determinants of complete high-order matrices with a free number of processors]. *Synthesis, analysis and diagnostics of electronic circuits: Int. Collection of scientific papers*. Ulyanovsk, UlSTU publ, 2022, issue 17, pp. 135–141.

[25] Gorshkov K. S., Nedorezov P. V., Filaretov V. V. Generaciya i vychislenie kompaktnyh simvolnyh opredelitelej dlya razrezhennyh matric vysokogo poryadka [Generation and calculation of compact symbolic determinants for sparse matrices of high order]. *Synthesis, analysis and diagnostics of electronic circuits: Int. Collection of scientific papers*. Ulyanovsk, UlSTU publ., 2022, issue 17, pp. 142–151.

[26] Brameller A., Alan R., Hamam Ya. *Sparsity. Its Practical Application to Systems Analysis.* London, Pitman publ., 1976, 177 p.

[27] Dimo P. *L'analyse nodale des réseaux d'énergie*. Paris, Eyrolles, 1971, 269 p.

[28] Wilkinson J. H., Reinsch C. *Handbook for Automatic Computation. Linear Algebra*. Berlin, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, 1971, 441 p.

Kuzmin N.P., First Category Engineer of the Ulyanovsk Branch of the V.A. Kotelnikov Institute of Radio Engineering and Electronics of the Russian Academy of Sciences. e-mail: niko_rus@mail.ru

Kurganov D. S., Engineer of Company «TELECOM.RU». e-mail: kds_ul@mail.ru

Kurganov S. A., Dr. Sc. (Eng.), Professor of the Department of Electrical Engineering of Ulyanovsk State Technical University. e-mail: sakurganov@mail.ru

Filaretov V.V., Dr. Sc. (Eng.), Professor of the Department of Electrical Engineering of Ulyanovsk State Technical University. e-mail: vvfil@mail.ru