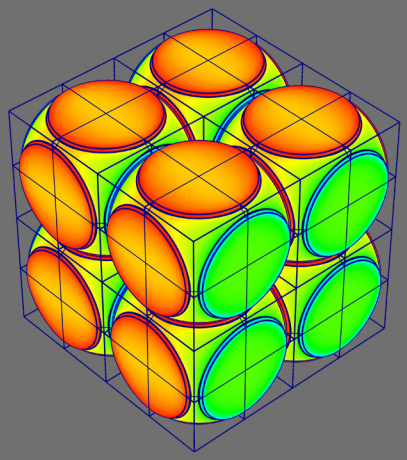
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Мозжорина Т.Ю., Насыбуллина К.Р. Моделирование и оптимизация перелета малого космического аппарата с орбиты Земли на орбиту Юпитера под солнечным парусом. Математическое моделирование и численные методы, 2025, № 3, с. 47–66.

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/382/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.216.58
14.03.2026 22:21:27

УДК 519.6 DOI: 10.18698/2309-3684-2025-3-4766

Моделирование и оптимизация перелета малого космического аппарата с орбиты Земли на орбиту Юпитера под солнечным парусом

© Т.Ю. Мозжорина, К.Р. Насыбуллина

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

В данной работе рассматривается оптимизация перелета космического аппарата малой массы с орбиты Земли на орбиту Юпитера под солнечным парусом в предположении нахождения орбит в одной плоскости и идеальных свойств солнечного паруса. Оптимизация управления углом установки солнечного паруса проводится с использованием принципа максимума Понтрягина при решении задачи быстродействия. Решение краевой задачи, к которой сводится принцип максимума, получено методом пристрелки. Программа расчета написана на языке программирования C++. В работе подробно рассмотрен математический вывод законов оптимального управления для двух возможных независимых управлений: угла установки паруса и ускорения, которое получает космический аппарат от солнечного паруса. Проведено исследование влияния краевых условий на правом конце на результаты численного решения поставленной задачи (краевые условия, соответствующие средней орбите Юпитера, значениям по афелию орбиты и перигелию орбиты). Также проанализировано влияние ускорения от солнечного паруса на время межорбитального перелета. Проведен анализ точности полученных результатов и показана возможность применения метода пристрелки при решении подобных задач. Проведено сравнение с данными ранее опубликованных работ.

Ключевые слова: *солнечный парус, метод пристрелки, краевые задачи обыкновенных дифференциальных уравнений, оптимальное управление, принцип максимума Понтрягина, перелет между орбитами Земли и Юпитера*

Введение. В настоящее время интерес к исследованиям планет солнечной системы с помощью солнечного паруса (СП) не уменьшается. Хотя с момента первых предложений использовать силу света в межпланетных перелетах прошло уже несколько десятилетий, теоретические расчетные исследования возможных реализаций таких проектов, а также экспериментальные разработки подобных конструкций не теряют актуальности [1,2], [3,4]. Рассматриваются модели перелета в трехмерной постановке [5], с учетом различных возмущений [6,7], [8-10], разрабатываются материалы для конструкции СП [5], исследуются теоретические возможности электрических парусов солнечного ветра [11].

Оптимизация управлением СП по критерию быстродействия представляет собой задачу оптимального управления (ОУ), одним из возможных способов решения которой является использование принципа максимума Понтрягина, сводящего решение задачи ОУ к

решению краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Математическая постановка задачи. Система ДУ движения малого КА в межорбитальном перелете в гелиоцентрической системе координат в предположении нахождения орбит планет в одной плоскости и идеального СП (сила тяги от СП направлена по нормали к его поверхности и парус не теряет свои отражающие способности с течением времени) имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dt} = \dfrac{V^2}{R} - A_0\left(\dfrac{R_0}{R}\right)^2 + \alpha\left(\dfrac{R_0}{R}\right)^2 \cos^3\theta \\ \dfrac{dV}{dt} = -\dfrac{UV}{R} - \alpha\left(\dfrac{R_0}{R}\right)^2 \sin\theta\cos^2\theta \\ \dfrac{dR}{dt} = U \\ \dfrac{d\varphi}{dt} = \dfrac{V}{R} \end{cases}$$

Здесь U — радиальная составляющая скорости КА в гелиоцентрической системе координат (см. рис. 1), м/сек; V — тангенциальная составляющая скорости, м/сек; R — расстояние от Солнца до КА, м; φ — полярный угол КА, рад; Ts — время перелета, сек; A_0 — ускорение, придаваемое КА силой притяжения к Солнцу на орбите Земли, м/сек^2; α — ускорение, придаваемое КА силой давления света Солнца на орбите Земли, м/сек^2; θ — угол установки солнечного паруса, управление, рад, измеряется от тангенциальной составляющей скорости космического аппарата. На рис.1 изображена сила T, действующая на космический аппарат от солнечного паруса. Ограничения на угол установки солнечного паруса $\theta \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$. На рис. 2 указан угол установки СП в локальной системе координат с базисом $\{V, U\}$. При таком выборе положительных направления скоростей отсчет углов идет по часовой стрелке. Выбор такого базиса сделан в соответствии с [12]. Знаки в системе ДУ соответствуют этому предпочтению. В [13] положительное направление радиальной скорости принято в противоположном направлении (к Солнцу), что определяет изменение знаков в системе ДУ и в выражении для оптимального угла.

Краевые условия: $V_0, U_0 = 0, R_0, \varphi_0 = 0$ — значения составляющих орбитальной скорости Земли, радиус Земной орбиты и полярный угол в выбранной системе координат в начальный момент времени,

$V_f, U_f = 0, R_f, \psi_{\varphi f} = 0$ (при $t = Ts$) значения составляющих орбитальной скорости, радиуса орбиты планеты адресата в момент окончания перелета и условие трансверсальности по сопряженной переменной ψ_φ.

Теоретически можно выделить 2 независимых управления солнечным парусом: угол установки θ и ускорение α, придаваемое КА парусом. Используя принцип максимума Понтрягина, получим выражение для функции Понтрягина и сопряженную систему. Функционал задачи быстродействия:

$$J = \int_0^{Ts} dt = Ts \to \min.$$

Функция Понтрягина в данной задаче имеет следующий вид:

$$H = \psi_U \left(\frac{V^2}{R} - A_0 \left(\frac{R_0}{R} \right)^2 + \alpha \left(\frac{R_0}{R} \right)^2 \cos^3 \theta \right) +$$

$$+ \psi_V \left(-\frac{UV}{R} - \alpha \left(\frac{R_0}{R} \right)^2 \sin\theta \cos^2 \theta \right) + \psi_R U + \psi_\varphi \frac{V}{R} - 1.$$

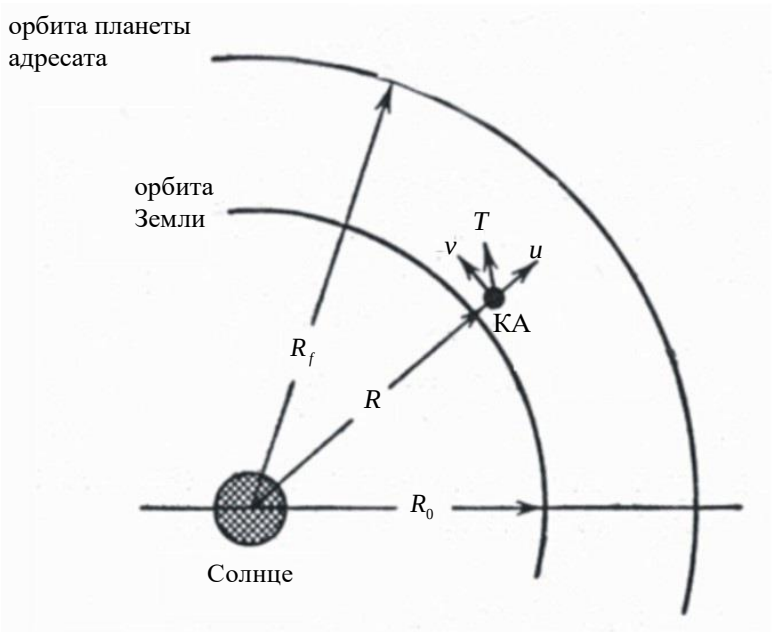


Рис. 1. Схема перелета между орбитами Земли и планеты адресата (орбита Юпитера)

Сопряженная система имеет вид (где $\psi_U, \psi_V, \psi_R, \psi_\varphi$ — сопряженные переменные):

$$\begin{cases} \dfrac{d\psi_U}{dt} = \dfrac{\psi_V V}{R} - \psi_R \\ \dfrac{d\psi_V}{dt} = -\dfrac{2\psi_U V}{R} + \dfrac{\psi_V U}{R} - \dfrac{\psi_\varphi}{R} \\ \dfrac{d\psi_R}{dt} = \psi_U \left(\dfrac{V^2}{R^2} - \dfrac{2A_0 R_0^2}{R^3} + \dfrac{2\alpha R_0^2 \cos^3\theta}{R^3} \right) - \\ \qquad -\psi_V \left(\dfrac{UV}{R^2} + \dfrac{2\alpha R_0^2 \cdot \cos^2\theta \cdot \sin\theta}{R^3} \right) + \psi_\varphi \dfrac{V}{R^2} \\ \dfrac{d\psi_\varphi}{dt} = 0 \end{cases}$$

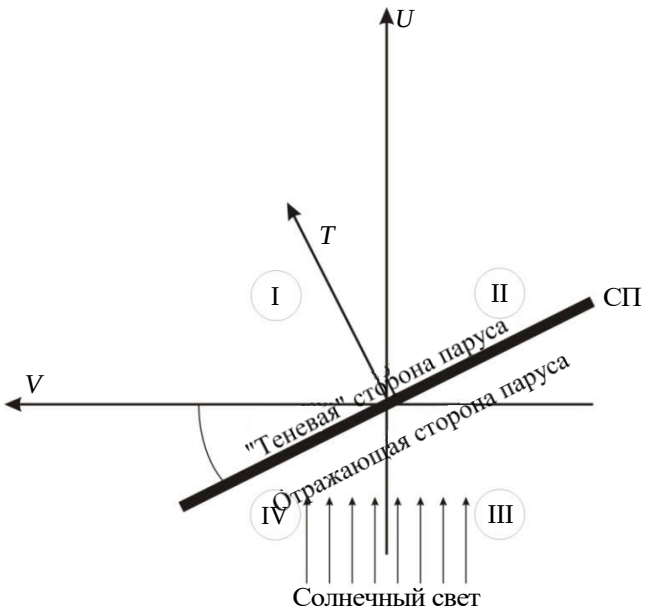


Рис. 2. Угол установки СП в локальной системе координат с указанием четвертей полного круга

Функция Понтрягина нелинейна по углу управления парусом. Соответственно, получаем

$$\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\partial H}{\partial \theta} = -3 \cdot \psi_U \alpha \left(\frac{R_0}{R} \right)^2 \cdot \cos^2\theta \cdot \sin\theta - \psi_V \alpha \left(\frac{R_0}{R} \right)^2 \cdot \left(\cos^3\theta - 2\cos\theta \cdot \sin^2\theta \right) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha \left(\frac{R_0}{R} \right)^2 \cdot \cos^3\theta \cdot \left(2 \cdot \psi_V \cdot \mathrm{tg}^2\theta - 3 \cdot \psi_U \cdot \mathrm{tg}\theta - \psi_V \right) = 0.$$

Корни этого уравнения:

$$\mathrm{tg}\,\theta = \frac{3\psi_U \pm \sqrt{9\psi_U{}^2 + 8\psi_V{}^2}}{4\psi_V};\ \cos\theta = 0.$$

Очевидно, что углы $\theta = \pm\dfrac{\pi}{2}$, соответствующие обнулению силы тяги от СП, не могут претендовать на оптимальность в задаче быстродействия. Из двух оставшихся выберем тот, который даст максимум функции Понтрягина.

Обозначим:

$$\theta_1 = \mathrm{arctg}\,\frac{3\psi_U + \sqrt{9\psi_U{}^2 + 8\psi_V{}^2}}{4\psi_V};\ \theta_2 = \mathrm{arctg}\,\frac{3\psi_U - \sqrt{9\psi_U{}^2 + 8\psi_V{}^2}}{4\psi_V}.$$

Отметим, что при любом знаке ψ_U знак выражения для θ_1 и θ_2 определяет знак ψ_V, причем для θ_1 он совпадает со знаком ψ_V, а для θ_2 противоположен знаку ψ_V. На рисунке 3 представлены знаки производной $\partial H / \partial\theta$ при разных знаках ψ_V. Знак производной легко определяется в нуле градусов. Переход через стационарные точки меняет знак производной. Видим, что в любом случае максимуму функции Понтрягина соответствует угол θ_2. Примем в дальнейшем за оптимальный угол $\theta^* = \theta_2$.

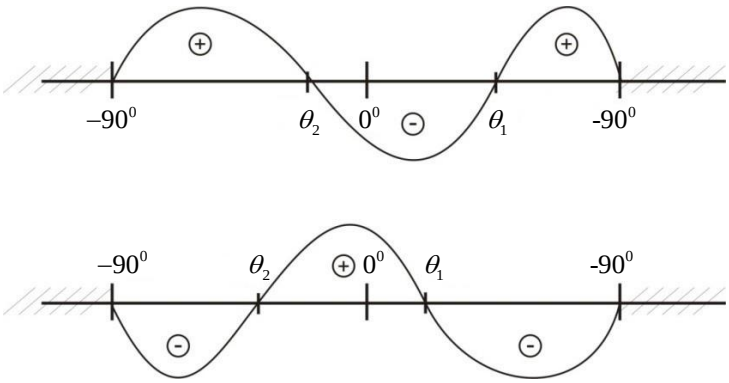


Рис. 3. Изменение знака производной функции Понтрягина при а) – $\psi_V > 0$; б) – $\psi_V < 0$

Таким образом, оптимизация угла установки СП свелась к краевой задаче, которую будем решать численным методом пристрелки (внешний цикл представляет собой модифицированный метод Ньютона решения нелинейных алгебраических систем, внутренний – метод Рунге-Кутта 4-го порядка).

Параметры пристрелки: $\psi_U(0)$, $\psi_V(0)$, $\psi_R(0)$, Ts , невязки:

$$\delta_1 = U(Ts) \to 0,\ \delta_2 = \left(V(Ts) - V_f\right)/V_f \to 0,$$

$$\delta_3 = \left(R(Ts) - R_f\right)/R_f \to 0,\ \delta_4 = H(Ts) \to 0.$$

Отметим, что ограничения на угол установки реализуются в процессе решения системы ДУ автоматически, так как значения арктангенса, определяющего угол установки, ограничены изначально первой и четвертой четвертью. Метод пристрелки дает наиболее точные результаты при решении краевых задач, причем его применение возможно и при решении задач ОУ с переключением [14], а также при решении задач с размерностью по параметрам пристрелки более четырех [15].

Возможен ли в оптимальном процессе переход угла установки во время перелета из первой четверти в четвертую (торможение окружной составляющей сменяется на разгон) или из четвертой в первую (разгон окружной составляющей сменяется на торможение)? Так как переход между четвертями связан со сменой знака тангенса оптимального угла, а, следовательно, со сменой знака сопряженной переменной ψ_V , исследуем предел для тангенса оптимального угла при $\psi_V \to \pm 0,\ \psi_U \neq 0.$

$$\lim_{\substack{\psi_V \to \pm 0 \\ \psi_U > 0}} \frac{3\psi_U - \sqrt{9\psi_U{}^2 + 8\psi_V{}^2}}{4\psi_V} = -\lim_{\substack{\psi_V \to \pm 0 \\ \psi_U > 0}} \frac{2\psi_V}{\sqrt{9\psi_U{}^2 + 8\psi_V{}^2}} = \mp 0.$$

Здесь при раскрытии неопределенности типа $\left[\frac{0}{0}\right]$ использовано правило Лопиталя.

$$\lim_{\substack{\psi_V \to \pm 0 \\ \psi_U < 0}} \frac{3\psi_U - \sqrt{9\psi_U{}^2 + 8\psi_V{}^2}}{4\psi_V} = \mp\infty.$$

То есть теоретически, оптимальное управление со сменой знака угла установки СП возможно. Причем, в первом случае поворот будет осуществляться через 0 градусов, во втором через $\theta = \mp\frac{\pi}{2}$. Причем, в случае одностороннего паруса (только одна сторона отражающая) реализовать это возможно лишь через большой поворот через 0 градусов, так как разворачивать парус теневой стороной к Солнцу не имеет смысла. Отметим также, что предел

$$\lim_{\substack{\psi_V \to 0 \\ \psi_U \to 0}} \frac{3\psi_U - \sqrt{9\psi_U{}^2 + 8\psi_V{}^2}}{4\psi_V}$$

не существует, соответственно, одновременно в оптимальном процессе равняться нулю сопряженные переменные ψ_V, ψ_U не могут.

Рассмотрим теперь в качестве управления параметр α. Функция Понтрягина линейна по этому параметру:

$$H = \psi_U \left(\frac{V^2}{R} - A_0 \left(\frac{R_0}{R} \right)^2 \right) + \psi_V \left(-\frac{UV}{R} \right) + \psi_R U + \psi_\varphi \frac{V}{R} - 1 +$$

$$+ \ \alpha \left(\frac{R_0}{R} \right)^2 \cos^2\theta \cdot \left(\psi_U \cos\theta - \psi_V \sin\theta \right).$$

Здесь $\Phi_{\text{пер}}$ — функция переключения, знак которой будет определять значение $\alpha \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$, принадлежащее одной из границ заданного интервала.

$$\Phi_{пер} = \left(\frac{R_0}{R} \right)^2 \cos^2\theta \left(\psi_U \cos\theta - \psi_V \sin\theta \right).$$

Изменение α означает сворачивание или разворачивание паруса, то есть уменьшение площади отражающей поверхности. Знак функции переключения в задаче с релейным переключением по этому параметру управления определяет выражение $\left(\psi_U \cos\theta - \psi_V \sin\theta \right)$. Проанализируем знак этого выражения в оптимальном процессе по управлению угла установки СП. Выразим из тангенса оптимального угла косинус и синус и подставим его в функцию переключения.

$$\operatorname{tg}\theta^* = \frac{3\psi_U - \sqrt{9\psi_U{}^2 + 8\psi_V{}^2}}{4\psi_V} \Rightarrow$$

$$\cos\theta^* = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2\theta^*}} = 1 \Big/ \sqrt{1 + \left(\frac{3\psi_U - \sqrt{9\psi_U{}^2 + 8\psi_V{}^2}}{4\psi_V} \right)^2};$$

$$\sin\theta^* = \operatorname{tg}\theta^* \cdot \cos\theta^* =$$

$$= \frac{\left(3\psi_U - \sqrt{9\psi_U{}^2 + 8\psi_V{}^2} \right)}{4\psi_V} \Big/ \sqrt{1 + \left(\frac{3\psi_U - \sqrt{9\psi_U{}^2 + 8\psi_V{}^2}}{4\psi_V} \right)^2};$$

$$\left(\psi_U \cos\theta^* - \psi_V \sin\theta^* \right) =$$

$$= \left(\psi_U - \psi_V \frac{3\psi_U - \sqrt{9\psi_U{}^2 + 8\psi_V{}^2}}{4\psi_V} \right) \Big/ \sqrt{1 + \left(\frac{3\psi_U - \sqrt{9\psi_U{}^2 + 8\psi_V{}^2}}{4\psi_V} \right)^2} =$$

$$= \frac{\left(\psi_U + \sqrt{9\psi_U{}^2 + 8\psi_V{}^2}\right)}{4} \Big/ \sqrt{1 + \left(\frac{3\psi_U - \sqrt{9\psi_U{}^2 + 8\psi_V{}^2}}{4\psi_V}\right)^2} > 0.$$

Это выражение больше нуля вне зависимости от знаков сопряженных переменных $\psi_{U,}\ \psi_V$. А, следовательно, оптимальным будет поддерживание максимальной величины ускорения, что, собственно, и так очевидно было для задачи быстродействия.

Результаты численного моделирования. Были произведены расчеты по краевым условиям на правом конце для перигелия и афелия орбиты Юпитера. На рисунках 4 – 11 представлены графики изменения переменных в оптимальном процессе для афелия и перигелия, где параметром управления выбран угол установки солнечного паруса θ^*.

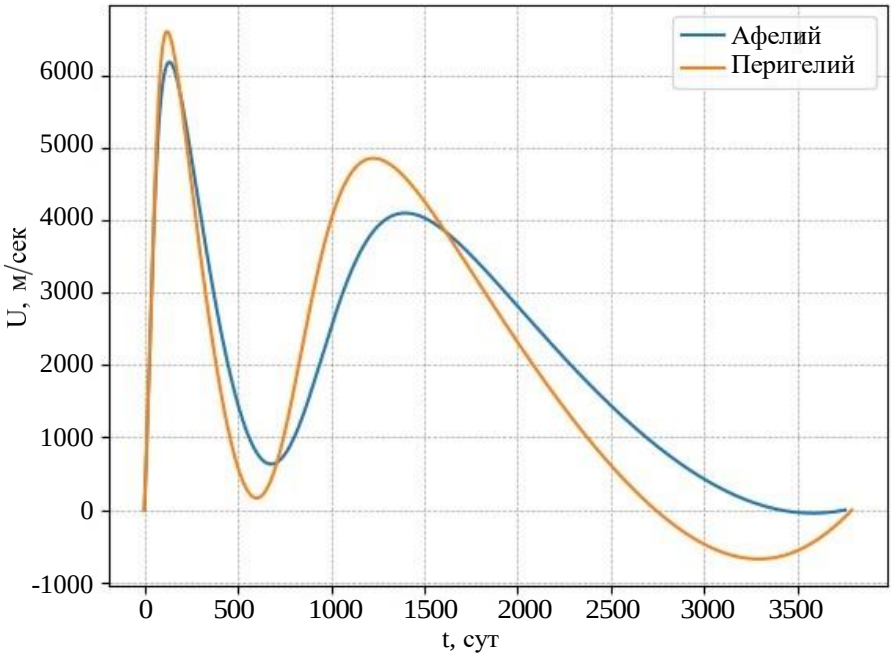


Рис. 4. Сравнение зависимостей радиальной скорости КА U от времени при краевых условиях орбиты Юпитера в афелии и перигелии

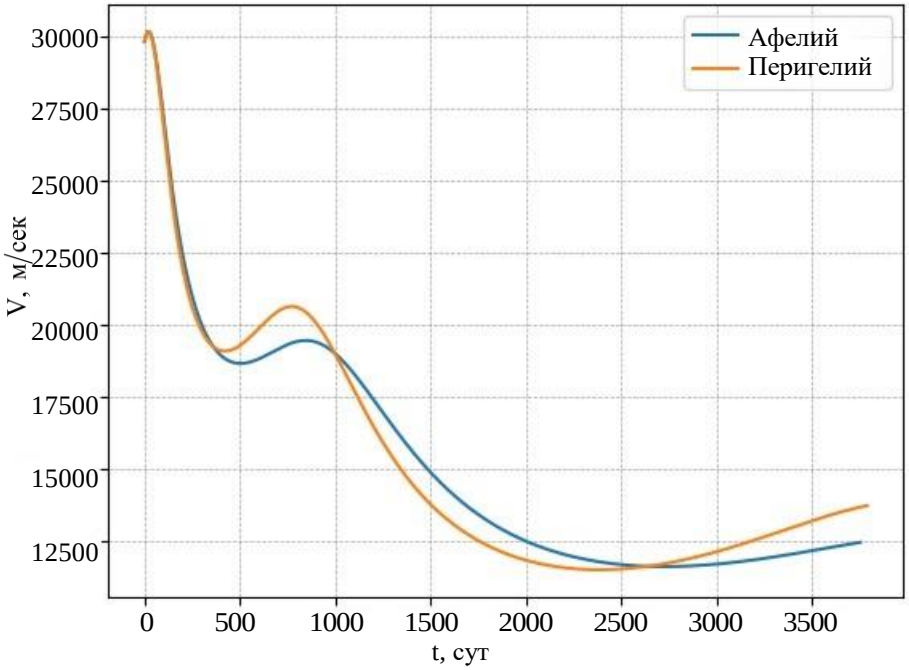


Рис. 5. Сравнение зависимостей тангенциальной скорости КА V от времени при краевых условиях орбиты Юпитера в афелии и перигелии

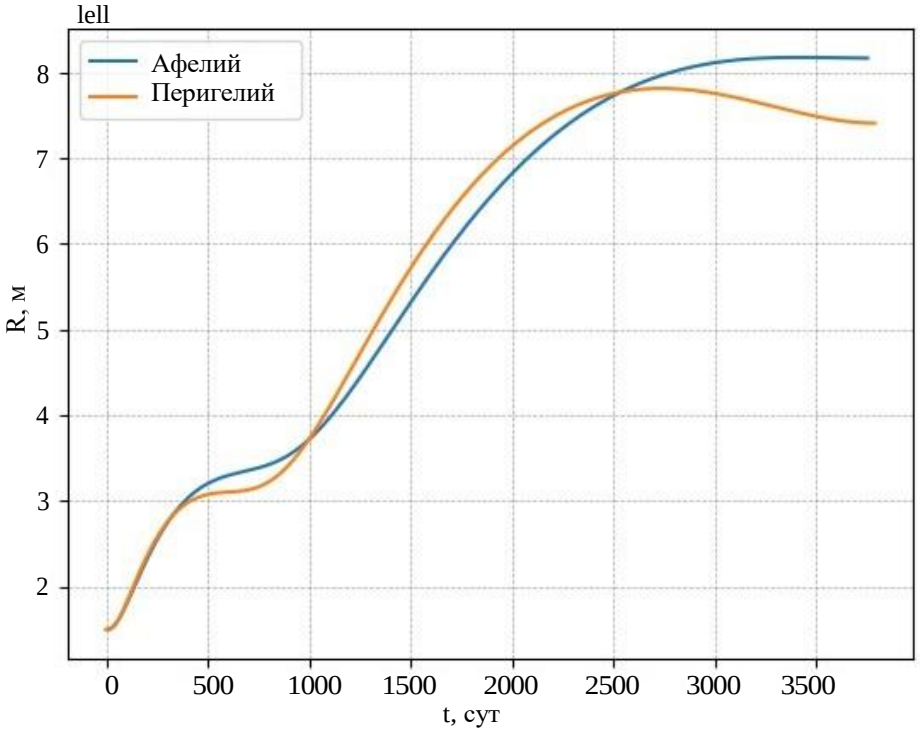


Рис. 6. Сравнение изменения расстояния КА от Солнца при краевых условиях орбиты Юпитера в афелии и перигелии

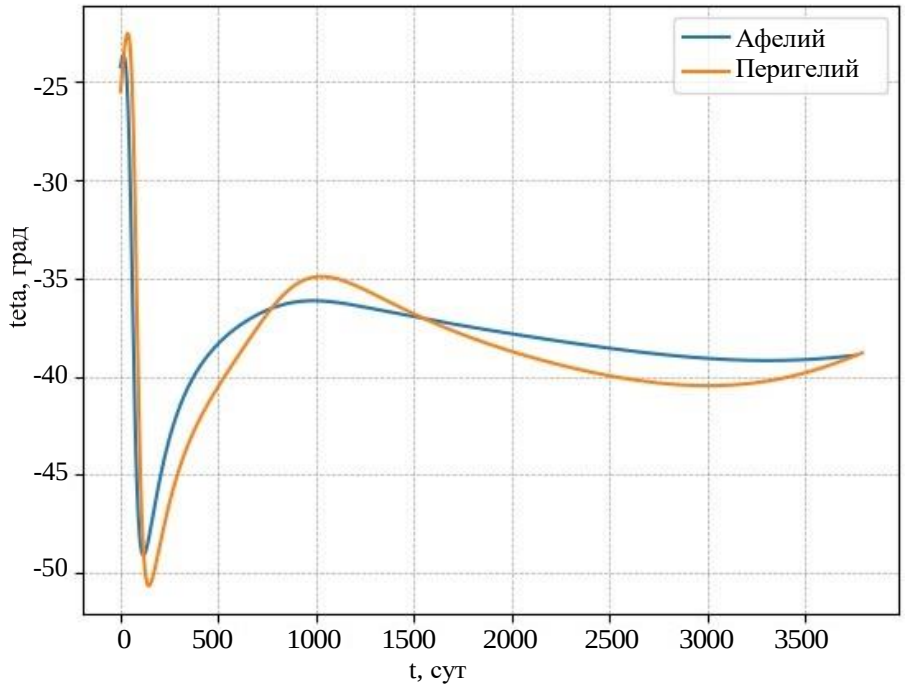


Рис. 7. Сравнение изменения расстояния КА от Солнца при краевых условиях орбиты Юпитера в афелии и перигелии

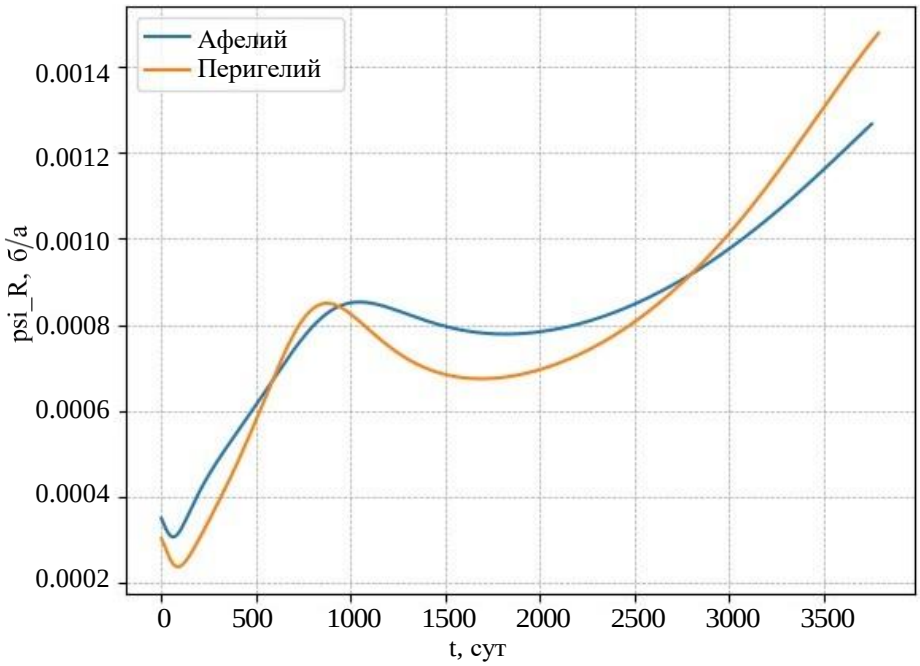


Рис. 8. Сравнение зависимостей сопряженной переменной ψ_R от времени при краевых условиях орбиты Юпитера в афелии и перигелии

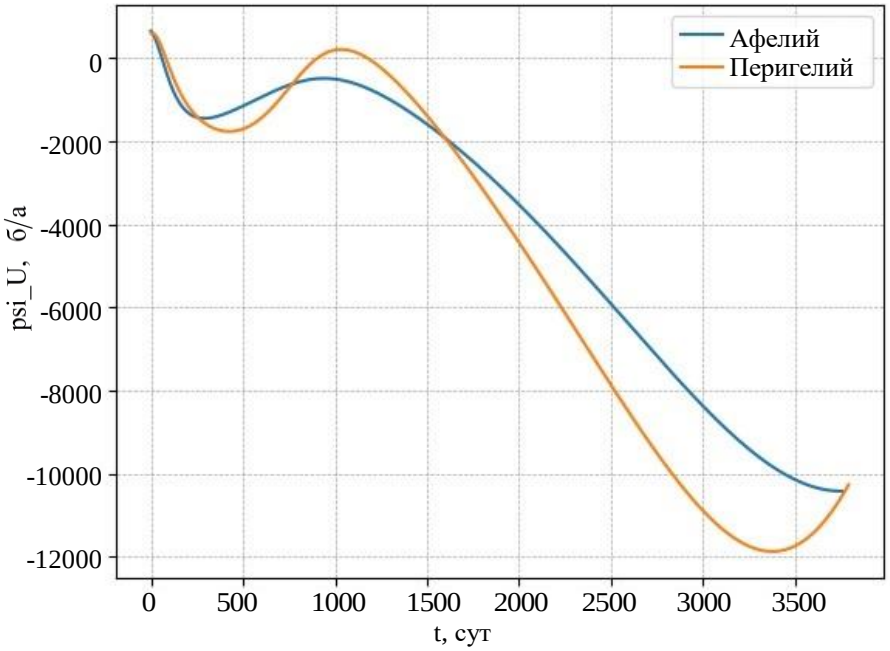


Рис. 9. Сравнение зависимостей сопряженной переменной ψ_u от времени при краевых условиях орбиты Юпитера в афелии и перигелии

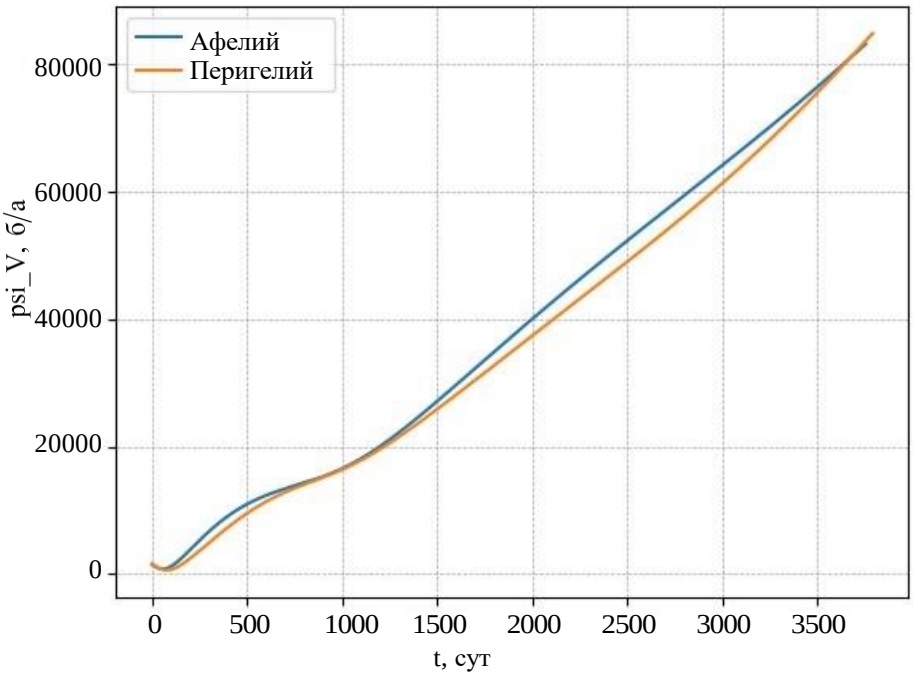


Рис. 10. Сравнение зависимостей сопряженной переменной ψ_v от времени при краевых условиях орбиты Юпитера в афелии и перигелии

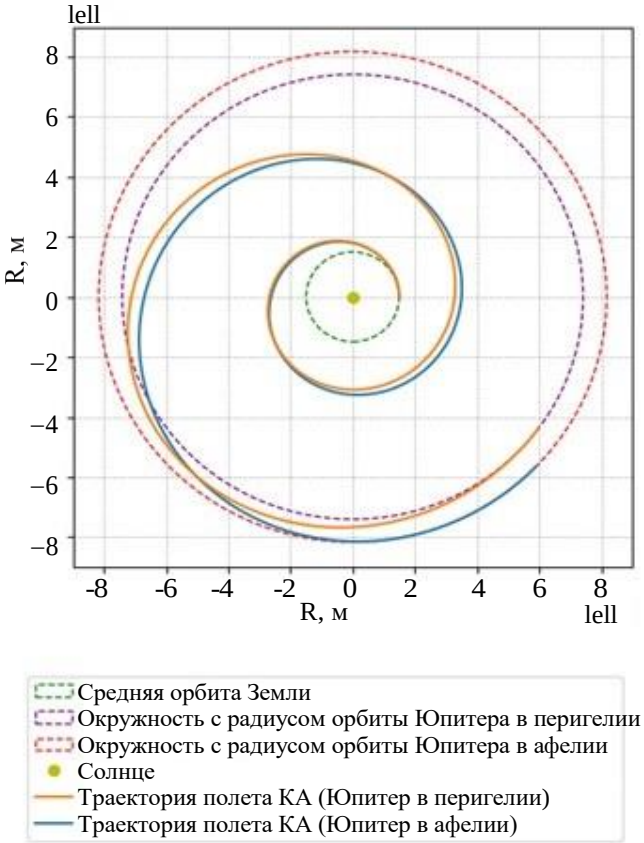


Рис. 11. График траектории перелета КА при краевых условиях орбиты Юпитера в афелии и перигелии

Таблица 1

Таблица результатов для различных точек орбиты Юпитера

Переменные	U, км/с	V, км/с	R, км	T, сутки (годы)	φ , град
Первая точка пересечения орбиты Юпитера (краевые по точке афелия)	0,1305	11,861	$8{,}165 \cdot 10^8$	3232,5 (8,86)	579,558
Конец перелета для точки афелия	0	12,436	$8{,}165 \cdot 10^8$	3754,35 (10,29)	676,09
Первая точка пересечения орбиты Юпитера (краевые по точке перигелия)	1,7436	11,599	7,407 108	Первая точка пересечения орбиты Юпитера (краевые по точке перигелия)	1,7436
Конец перелета для точки перигелия	0	13,709	7,407 108	Конец перелета для точки перигелия	0

Первоначально было выдвинуто предположение, что полет к перигелию орбиты Юпитера будет более выгодным и будет протекать быстрее, чем полет к афелию, так как перигелий является ближайшей к Солнцу точкой орбиты планеты. Но в результате расчетов было показано, что КА быстрее достигает орбиты Юпитера по краевым условиям афелия. Однако, были выявлены точки траектории полета КА более раннего пересечения орбиты Юпитера, правда, с несоответствующими краевыми на правом конце процесса. Окончательный выбор точки орбиты, на которую нужно ориентироваться при планировании перелета, будет зависеть от многих факторов: предполагаемой даты старта, уточнения математической модели подлета к планетарной орбите Юпитера с учетом притяжения планеты и дополнительных возможностей получения тяги от имеющихся двигателей коррекции траектории у КА.

Также были проведены расчеты для среднего значения орбиты Юпитера для различных α – ускорений, придаваемых КА силой давления света Солнца на орбите Земли. Ниже на рисунках 12 – 16 представлены полученные результаты.

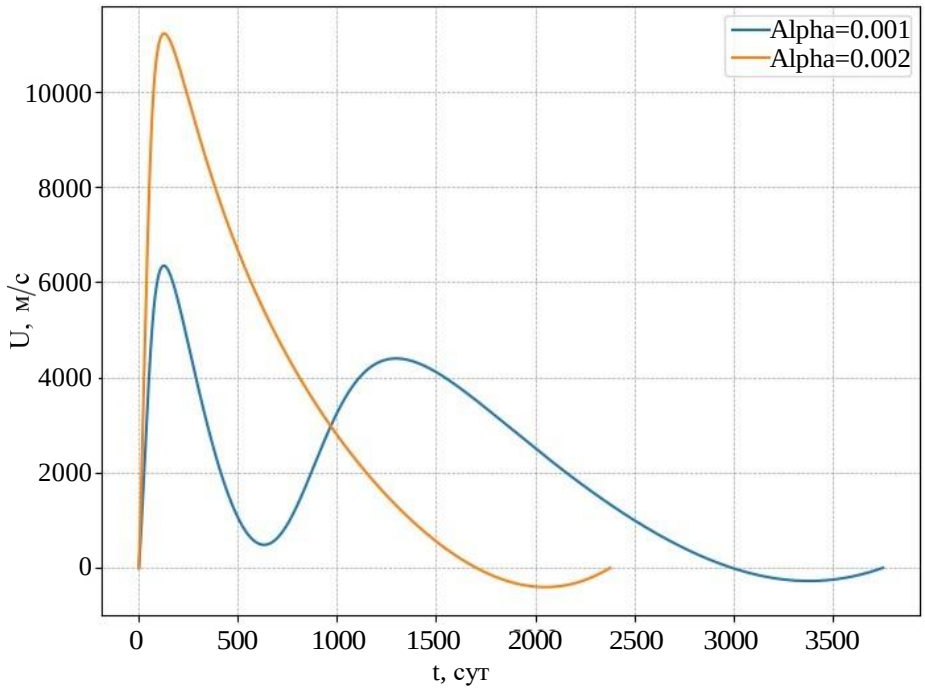


Рис. 12. Сравнение зависимостей радиальной скорости КА U от времени при различных α

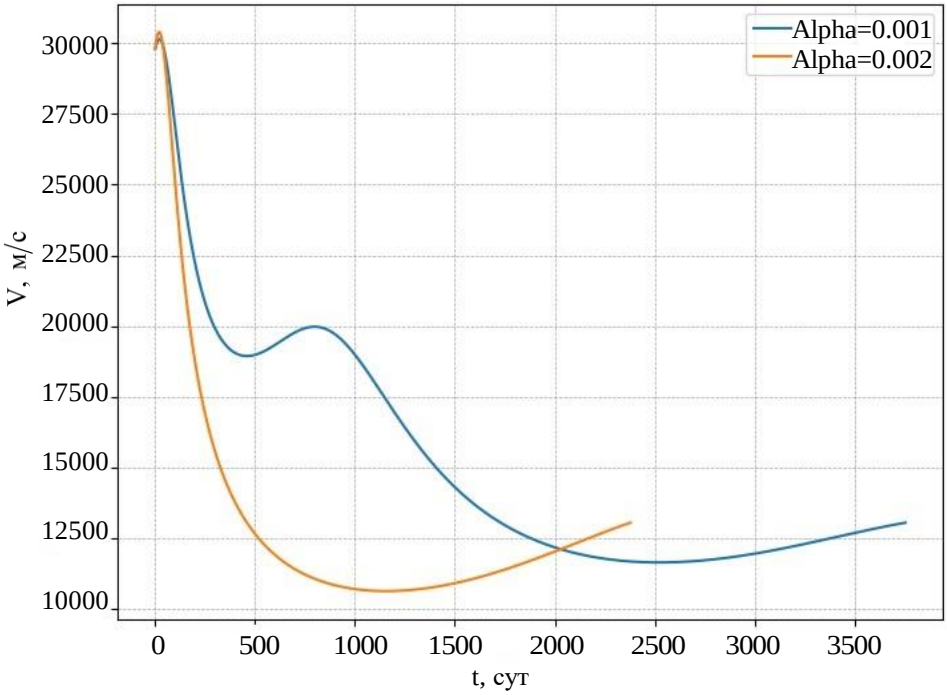


Рис. 13. Сравнение зависимостей тангенциальной скорости КА V от времени при различных α

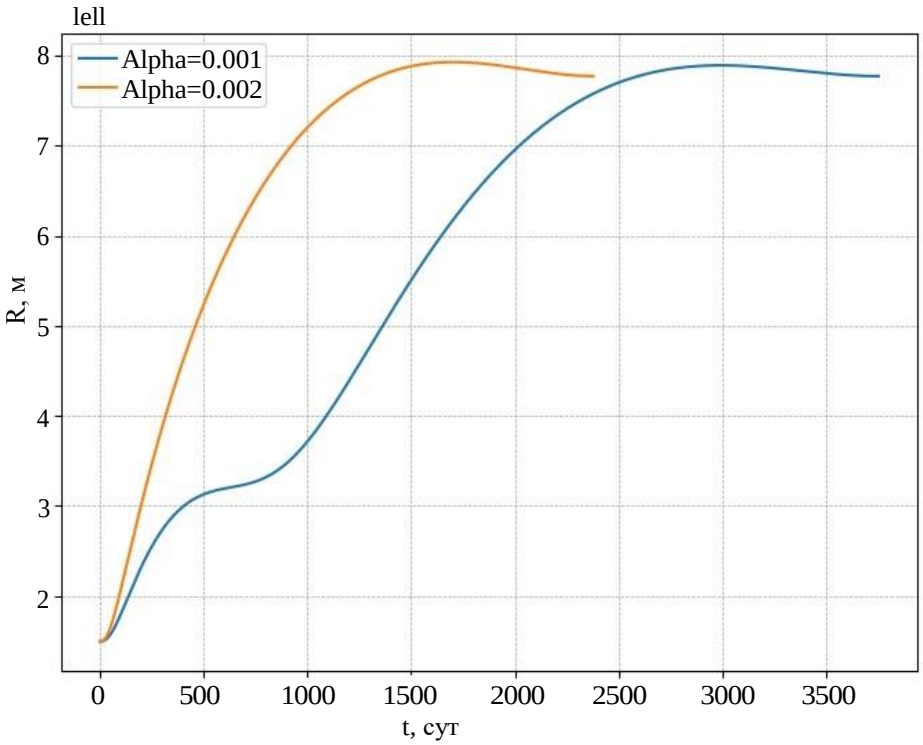


Рис. 14. Сравнение изменения расстояния КА от Солнца от времени перелета при различных α

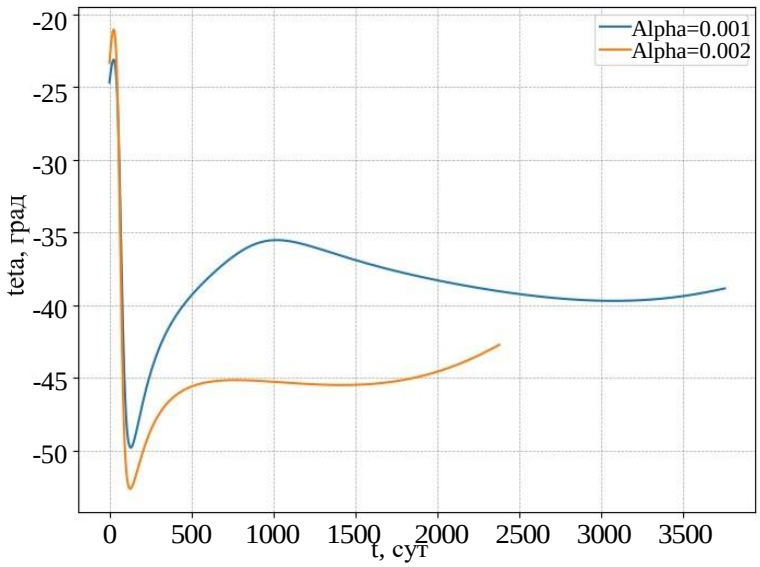


Рис. 15. Сравнение изменения оптимального угла установки солнечного паруса от времени перелета при различных α

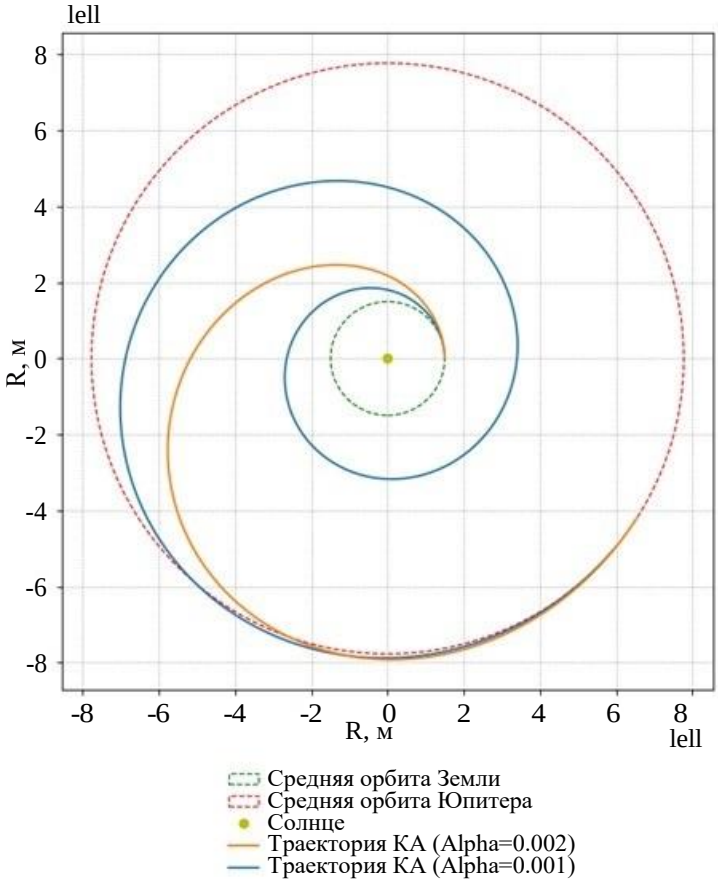


Рис. 16. График траектории перелета КА при различных значениях параметра α

При α = 0,001 первое пересечение средней орбиты Юпитера происходит примерно на 2584 сутки, второе — на 3755 сутки. При α = 0,002 пересечения происходят раньше: первый раз КА пересекает орбиту Юпитера примерно на 1337 сутки, второй раз на 2379 сутки. Таким образом, при α = 0,002 время перелета существенно сокращается.

Также ниже приведена таблица 2 с результатами расчетов для различных α.

Таблица 2

Таблица результатов для средних параметров орбиты Юпитера при различных размерах СП

Переменные	*U*, км/с	*V*, км/с	*R*, км	*T*, сутки (годы)	φ, град
Первая точка пересечения орбиты Юпитера (краевые по средней орбите) при $\alpha = 0,001$	0,764	11,66	$7,777\ 10^8$	2583,62 (7,08)	590,55
Конец перелета для средней орбиты при $\alpha = 0,001$	0	13,06	$7,777\ 10^8$	3755,3 (10,29)	630,25
Первая точка пересечения орбиты Юпитера (краевые по средней орбите) при $\alpha = 0,002$	1,114	10,74	$7,777\ 10^8$	1337,05 (3,66)	251,013
Конец перелета для средней орбиты при $\alpha = 0,002$	0	13,06	$7,777\ 10^8$	2379,1 (6,52)	286,48

Заключение. Достоверность полученных результатов подтверждается сравнением с данными [13], где полученное значение времени перелета для средней орбиты Юпитера при α = 0,002 составило 6,6 лет. Кроме того, поведение функции Понтрягина в оптимальном процессе равно 0 с точностью до 10^{-5} - 10^{-8} по всем расчетным точкам во всех рассмотренных вариантах, что соответствует теореме о свойствах функции Понтрягина в оптимальном процессе с нефиксированным временем на правом конце и автономной системой ДУ.

В силу того, что орбита Юпитера близка к круговой, время перелета, полученное по разным краевым условиям, различается незначительно.

Сокращение времени перелета в первую очередь связано с ускорением от СП, которое зависит от отражательной способности и площади этого устройства, то есть от конструктивных особенностей и применяемых материалов.

При критерии эффективности межорбитального перелета – времени процесса оптимальное управление углом установки СП не должно представлять собой кусочно-непрерывную величину с участками постоянства, что характерно для линейных задач ОУ.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ишков С.А., Старинова О.Л. Оптимизация и моделирование движения космического аппарата с солнечным парусом. *Известия Самарского научного центра Российской академии наук*, т. 7, № 1, 2005, с. 99-106.

[2] Старинова О. Л., Горбунова И. В. *Оптимизация гелиоцентрического движения космического аппарата с солнечным парусом*. Самара, Изд-во СНЦ РАН, 2015, с. 168-171.

[3] Мозжорина Т.Ю., Рахманкулов Д.А. Моделирование и оптимизация управлением спутника малой массы при перелете с орбиты Земли на орбиту Марса под солнечным парусом. *Математическое моделирование и численные методы*, 2021, № 3, с. 74–87.

[4] Мозжорина Т.Ю., Смирнов Е.А. Оптимизация управления космическим аппаратом при перелете с орбиты Земли на орбиту Венеры под солнечным парусом. *Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований*, 2023, № 11, с. 66-72.

[5] Хабибуллин Р.М., Старинова О.Л. Анализ управляемого движения исследовательского космического аппарата с солнечным парусом. *Известия Самарского научного центра Российской академии наук*, 2019, т. 12, №717, с. 94-103.

[6] Чернякина И. В. *Программы локально-оптимального управления и траектории гелиоцентрических перелетов космического аппарата с солнечным парусом с учетом возмущений*. *Диссертация на соискание степени к.т.н*. Самара, 2020, 138 с.

[7] Carzana L., Visser P., Heiligers J. Locally optimal control laws for Earth-bound solar sailing with atmospheric drag. *Aerospace Science and Technology*, 2022, vol. 127, iss. 6, art. no. 107666.

[8] Herasimenka A. et al. Controllability properties of solar sails. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2023, vol. 46, no. 7, pp. 900-909. DOI:10.2514/1.G007250.

[9] Caruso A. et al. Solar sail optimal control with solar irradiance fluctuations. *Advances in space research*, 2021, vol. 67, no. 9, pp. 2776-2783.

[10] Rozhkov M. A., Starinova O. L. Optimization of Solar-Sail Control When a Vehicle Moves along Cyclic Heliocentric Trajectories. *Cosmic Research*, 2023, vol. 61, no. 6, pp. 534-543.

[11] Urrios J., Pacheco-Ramos G., Vazquez R. Optimal planning and guidance for solar system exploration using electric solar wind sails. *Acta Astronaut*, 2024, vol. 217, no. 9, pp. 116-129.

[12] Лейтман Дж. *Методы оптимизации с приложениями к механике космического полета*. Москва, Наука, 1965, 538 с.

[13] Гродзовский Г.Л., Иванов Ю.Н., Токарев В.В. *Механика космического полета с малой тягой*. Москва, Наука, 1966, 680 с.

[14] Мозжорина Т.Ю. Численное решение задач оптимального управления с переключением методом пристрелки. *Математическое моделирование и численные методы*, 2017, № 2(14), с. 94-106.

[15] Мозжорина Т.Ю., Закуражная А.А. Моделирование влияния времени схода

с орбиты Земли на оптимальное управление перелетом малоразмерного КА на Венеру. *Математическое моделирование и численные методы*, 2024, № 2, с. 88–99

Статья поступила в редакцию 07.08.2025

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:
Мозжорина Т.Ю., Насыбуллина К.Р. Моделирование и оптимизация перелета малого космического аппарата с орбиты Земли на орбиту Юпитера под солнечным парусом. *Математическое моделирование и численные методы*, 2025, № 3, с. 47–66.

Мозжорина Татьяна Юрьевна — канд. техн. наук, доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: mozzhorina@mail.ru

Насыбуллина Камиля Руслановна — студент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Баумана. e-mail: kamilya0902@yandex.ru

Modeling and optimization of the transfer of a small spacecraft from Earth orbit to Jupiter orbit under a solar sail

© Mozzhorina T.Yu., Nasybullina K.R.

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

This paper examines the optimization of the transfer of a low-mass spacecraft from Earth's orbit to Jupiter's orbit using a solar sail, under the assumptions that both orbits lie in the same plane and that the solar sail possesses ideal properties. The optimization of the sail's orientation angle is performed using Pontryagin's maximum principle in solving a minimum-time problem. The resulting boundary-value problem derived from the maximum principle is solved by the shooting method. The computational program was implemented in C++. The paper provides a detailed mathematical derivation of the optimal control laws for two possible independent controls: the sail orientation angle and the acceleration imparted to the spacecraft by the solar sail. The influence of terminal boundary conditions on the numerical solution is investigated, considering cases corresponding to Jupiter's mean orbit, as well as its aphelion and perihelion distances. The effect of solar sail acceleration on the interorbital transfer time is also analyzed. An assessment of the accuracy of the obtained results is presented, demonstrating the feasibility of applying the shooting method to similar problems. A comparison with previously published results is also provided.

Keywords*: solar sail, the shooting method, boundary value problems of ordinary differential equations, optimal control, Pontryagin's maximum principle, flight between the orbits of the Earth and Jupiter*

REFERENCES

[1] Ishkov S.A., Starinova O.L. Optimizaciya i modelirovanie dvizheniya kosmicheskogo apparata s solnechnym parusom [Optimization and modeling of

the motion of a spacecraft with a solar sail]. *Izvestiya Samarskogo nauchnogo centra Rossijskoj akademii nauk* [News of the Samara Scientific Center of the Russian Academy of Sciences], vol. 7, no 1, 2005, pp. 99-106.

[2] Starinova O. L., Gorbunova I. V. *Optimizaciya geliocentricheskogo dvizheniya kosmicheskogo apparata s solnechnym parusom* [Optimization of heliocentric motion of a spacecraft with a solar sail]. Samara, FRC SSC RAS, 2015, pp. 168-171.

[3] Mozzhorina T. Yu., Zakurazhnaya D. A. Modeling and optimization of low–mass satellite control when flying from Earth orbit to Mars orbit under a solar sail. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2021, no. 3, pp. 74-87.

[4] Mozzhorina T. Yu. Optimization of space vehicle control during flight from Earth orbit to Venus orbit under a solar sail. *International Journal of Applied and Fundamental Research*, 2023, no. 11, pp. 66-72.

[5] Khabibullin R.M., Starinova O.L. Analiz upravlyayemogo dvizheniya issledovatel'skogo kosmicheskogo apparata s solnechnym parusom [Analysis of the controlled motion of a research spacecraft with a solar sail]. *Izvestiya Samarskogo nauchnogo centra Rossijskoj akademii nauk* [News of the Samara Scientific Center of the Russian Academy of Sciences], 2019, vol. 12, no. 717, pp. 94-103.

[6] CHernyakina I. V. *Programmy lokal'no-optimal'nogo upravleniya i traektorii geliocentricheskih pereletov kosmicheskogo apparata s solnechnym parusom s uchetom vozmushchenij. Dissertaciya na soiskanie stepeni k.t.n* [Locally optimal control programs and trajectories of heliocentric flights of a spacecraft with a solar sail taking into account disturbances. Dissertation for the degree of Ph.D.]. Samara, 2020, 138 p.

[7] Carzana L., Visser P., Heiligers J. Locally optimal control laws for Earth-bound solar sailing with atmospheric drag. *Aerospace Science and Technology*, 2022, vol. 127, iss. 6, art. no. 107666.

[8] Herasimenka A. et al. Controllability properties of solar sails. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2023, vol. 46, no. 7, pp. 900-909. DOI:10.2514/1.G007250.

[9] Caruso A. et al. Solar sail optimal control with solar irradiance fluctuations. *Advances in space research*, 2021, vol. 67, no. 9, pp. 2776-2783.

[10] Rozhkov M. A., Starinova O. L. Optimization of Solar-Sail Control When a Vehicle Moves along Cyclic Heliocentric Trajectories. *Cosmic Research*, 2023, vol. 61, no. 6, pp. 534-543.

[11] Urrios J., Pacheco-Ramos G., Vazquez R. Optimal planning and guidance for solar system exploration using electric solar wind sails. *Acta Astronaut*, 2024, vol. 217, no. 9, pp. 116-129.

[12] Lietmann G. Optimization techniques: with applications to aerospace systems. Academic Press, 1962, 453 p.

[13] Grodzovskij G.L., Ivanov YU.N., Tokarev V.V. *Mekhanika kosmicheskogo poleta s maloj tyagoj* [Mechanics of low-thrust space flight]. Moscow, Nauka Publ., 1966, 680 .

[14] Mozzhorina T. Yu., Zakurazhnaya D. A. Numerical solution to problems of optimal control with switching by means of the shooting method. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2017, no. 2, pp. 94-106.

[15] Mozzhorina T. Yu., Zakurazhnaya D. A. Investigation of the effect of the time of departure from the Earth's orbit on the optimal control of the flight of a small spacecraft to Venus. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2024, no. 2, pp. 89-99.

Mozzhorina T.Yu., Cand. Sc. (Eng.), Assoc. Professor of Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: mozzhorina@mail.ru

Nasybullina K.R., Student of Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University. email: kamilya0902@yandex.ru