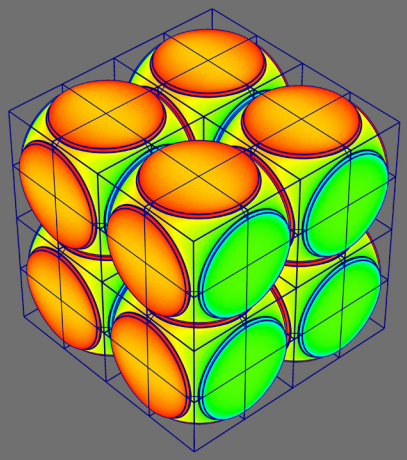
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Димитриенко Ю.И., Богданов И.О. Модальный анализ предварительно нагруженных 3D конструкций на основе конечно-элементного моделирования. Математическое моделирование и численные методы, 2025, № 3, с. 32–46.

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/381/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.216.140
13.11.2026 14:48:36

УДК 539.3 DOI: 10.18698/2309-3684-2025-2-3246

Модальный анализ предварительно нагруженных 3D конструкций на основе конечно-элементного моделирования

© Ю.И. Димитриенко, И.О. Богданов

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Предложена постановка трехмерной задачи расчета собственных частот и собственных форм колебаний упругих конструкций с учетом предварительного их нагружения. Постановка задачи записана в тензорной безиндексной форме и выведена с использованием общей теории геометрически нелинейного деформирования конструкций. При выводе использована аналогия с выводом трехмерной задачи теории устойчивости упругих конструкций, который был предложен ранее в работах [10-15]. Предложена вариационная формулировка задачи модельного анализа предварительно напряженных трехмерных конструкций, а также методика конечно-элементного решения задачи. Разработан программный модуль для решения задач модального анализа преднапряженных конструкций в составе программного комплекса Manipula/SMCM, разрабатываемого в НОЦ «СИМПЛЕКС» МГТУ им. Н.Э. Баумана. На основе разработанного программного модуля приведен пример численного решения задачи модального анализа для случая пластины, предварительно нагруженной продольной сжимающей нагрузкой. Показано, что предварительное нагружение для этой задачи существенно влияет на собственные частоты колебаний пластины. Проведено сравнение с результатами расчетов в программном комплексе ANSYS, показано, что имеет место хорошее совпадение результатов расчета собственных частот.

Ключевые слова: *модальный анализ, предварительное напряжение, метод конечных элементов, Manipula/SMCM*

Введение. Введение. Задача модального анализа предварительно нагруженных конструкций заключается в определении собственных частот (СЧ) и собственных форм (СФ) конструкций для случая, когда конструкция предварительно была нагружена статическими нагрузками. Такая задача часто возникает в различных приложениях, поэтому ее решению посвящено значительное число работ, укажем лишь некоторые из них [1-8]. Решение этой задачи реализовано в том

числе в коммерческих программных комплексах, например в Ansys [9], однако, как правило, во всех исследованиях учет предварительного нагружения осуществляется для частных видов конструкций, например, пластин или оболочек.

В работах [10-12] была разработана общая теория устойчивости 3D конструкций на основе строгого анализа геометрически нелинейной теории деформирования. Целью настоящей работы является применение этого метода для вывода уравнений модального анализа предварительно нагруженных трехмерных конструкций.

Влияние предварительного нагружения (ПН) на СЧ и СФ заключается в наличии следующих эффектов:

– для определенного типа конструкций ПН может увеличивать общую жесткость конструкции, что приводит к изменению СЧ, этот эффект наиболее ярко выражен для тонкостенных конструкций;

– ПН приводит к изменению формы конструкций даже при малых деформациях, а это сказывается, как на СЧ, так и на СФ последующих собственных колебаниях этой конструкции.

Таким образом, задача модального анализа ПН конструкций имеет аналогию с нелинейной задачей 3D устойчивости конструкций и состоит из 3 этапов:

1 этап: решение квазистатической 3D задачи линейной упругости при малых деформациях с заданной системой нагрузок $\mathbf{S}_e$, $\mathbf{u}_e$;

2 этап: определение формоизменения конструкции за счет полученного решения задачи 1-го этапа (определение актуальной конфигурации тела) и перенос решения из отсчетной конфигурации в актуальную;

3 этап: решение задачи на собственные колебания с учетом актуальной конфигурации тела, полученной на этапах 1 и 2 и с учетом напряженного состояния конструкции, полученном на этапах 1 и 2.

Математическая постановка задач модального анализа предварительно нагруженных трехмерных конструкций. Для формулировки задач 1-го и 3-го этапов используем аналогию с теорией 3D устойчивости конструкций, разработанной в [10-14].

Задача 1-го этапа – задача равновесия упругой конструкции для основного состояния (трехмерная задача теории упругости) в безиндексной тензорной форме имеет вид [12]:

$$\begin{gathered}
\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}^0=0,\ \mathbf{x}^0\in\overset{o}{V},\\
\boldsymbol{\sigma}^0={}^4\mathbf{C}\cdot\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^0,\ \mathbf{x}^0\in\overset{o}{V}\bigcup\overset{o}{\Sigma},\\
\boldsymbol{\varepsilon}^0=\frac{1}{2}\left(\nabla\otimes\mathbf{u}^0+\nabla\otimes\mathbf{u}^{0T}\right),\ \mathbf{x}^0\in\overset{o}{V}\bigcup\overset{o}{\Sigma},\\
\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}^0\Big|_{\overset{o}{\Sigma}_\sigma}=\mathbf{S}_e,\ \mathbf{u}^0\Big|_{\overset{o}{\Sigma}_u}=\mathbf{u}_e,
\end{gathered}\tag{1}$$

где $\boldsymbol{\sigma}^0$ — тензор напряжений; $\boldsymbol{\varepsilon}^0$ — тензор малых деформаций; $\mathbf{u}^0$ — вектор перемещений; ${}^4\mathbf{C}$ — тензор 4-го ранга модулей упругости; ∇ — набла-оператор, $\mathbf{S}_e$ и $\mathbf{u}_e$ — векторы внешних поверхностных сил и перемещений, соответственно. Ноликом сверху обозначены величины, относящиеся к основному (устойчивому состоянию).

Задача 2 этапа: определение актуальной конфигурации тела и перенос решения из отсчетной конфигурации в актуальную. После решения задачи (1) находим координаты $\mathbf{x}$ точек M тела в актуальной конфигурации K

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^0 + \mathbf{u}^0, \tag{2}$$

где $\mathbf{x}^0$ — координаты точек М тела в начальной (отсчетной) конфигурации $\overset{\circ}{K}$.

Решение задачи (1 — поля $\mathbf{u}^0$ и $\boldsymbol{\sigma}^0$ — переносится в актуальную конфигурацию:

$$\boldsymbol{\sigma}^0(\mathbf{x}^0) = \boldsymbol{\sigma}^0(\mathbf{x}),\ \mathbf{u}^0(\mathbf{x}^0) = \mathbf{u}^0(\mathbf{x}), \tag{3}$$

т.е. поля напряжений и перемещений – остаются одни и те же, но переносятся в новые положения точек М в актуальной конфигурации.

Задача 3 — это задача на собственные значения с учетом предварительного напряженного состояния, которое учитывается аналогично теории устойчивости для варьируемого состояния конструкции (в данном случае оно имеет смысл малого отклонения от основного состояния) и имеет следующий вид [10-12]:

$$\begin{gathered}
\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^0 \cdot\cdot \left(\mathbf{B}\cdot {}^3\epsilon\right) = \rho\ddot{\mathbf{w}},\ \mathbf{x}\in V \\
\boldsymbol{\sigma} = {}^4\mathbf{C}\cdot\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}),\ \mathbf{x}\in V\bigcup\Sigma, \\
\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) = \frac{1}{2}\left(\nabla\otimes\mathbf{w} + \nabla\otimes\mathbf{w}^T\right),\ \mathbf{x}\in V\bigcup\Sigma, \\
\mathbf{B} = \nabla\otimes\boldsymbol{\omega},\ \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\,{}^3\epsilon\cdot\cdot\Omega(\mathbf{w}),\ \Omega(\mathbf{w}) = \frac{1}{2}\left(\nabla\otimes\mathbf{w} - \nabla\otimes\mathbf{w}^T\right),\ \mathbf{x}\in V\bigcup\Sigma, \\
\mathbf{n}\cdot\left(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^0\cdot {}^3\epsilon\cdot\boldsymbol{\omega}\right)\Big|_{\Sigma_\sigma} = 0,\ \mathbf{w}\big|_{\Sigma_u} = 0,
\end{gathered} \tag{4}$$

где обозначены функции в варьируемом состоянии: $\boldsymbol{\sigma}$ — тензор напряжений; $\boldsymbol{\varepsilon}$ — тензор малых деформаций; $\mathbf{w}$ — вектор перемещений в варьированном состоянии; а ${}^3\epsilon$ — тензор Леви-Чивиты.

Вывод уравнений системы (4) осуществляется на основании общей теории нелинейного деформирования при наличии малых отклонений от устойчивого решения линейной задачи [12].

Будем искать решение задачи (4) в виде гармонических колебаний

$$\mathbf{w} = \tilde{\mathbf{w}} e^{i\omega t}, \tag{5}$$

где $\tilde{\mathbf{w}}$ — амплитудное значение перемещений, которое определяет СФ конструкции, а значение параметра ω — СЧ конструкции. Так как в данном случае демпфирование не учитывается, то ω — является действительной величиной.

Подставляя (5) в систему (4), в силу линейности этой задачи, находим, что напряжения и деформации также являются гармоническими функциями

$$\boldsymbol{\sigma} = \tilde{\boldsymbol{\sigma}} e^{i\omega t}, \ \boldsymbol{\varepsilon} = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} e^{i\omega t}, \tag{6}$$

где $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ и $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$ — амплитудные значения напряжений и деформаций, соответствующие СФ конструкции.

Из (4) с учетом представлений (5) и (6) получаем следующую задачу на собственные значения

$$\begin{gathered}
\nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}^0 \cdot\cdot \left(\tilde{\mathbf{B}} \cdot {}^3\epsilon \right) + \rho\omega^2 \tilde{\mathbf{w}} = 0, \ \mathbf{x} \in V, \\
\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = {}^4\mathbf{C} \cdot\cdot \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}, \ \mathbf{x} \in V \bigcup \Sigma \\
\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\left(\nabla \otimes \tilde{\mathbf{w}} + \nabla \otimes \tilde{\mathbf{w}}^T \right), \ \mathbf{x} \in V \bigcup \Sigma, \\
\tilde{\mathbf{B}} = \nabla \otimes \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \ \tilde{\boldsymbol{\omega}} = \frac{1}{2} {}^3\epsilon \cdot\cdot \tilde{\Omega}, \ \tilde{\Omega} = \frac{1}{2}\left(\nabla \otimes \tilde{\mathbf{w}} - \nabla \otimes \tilde{\mathbf{w}}^T \right), \ \mathbf{x} \in V \bigcup \Sigma, \\
\mathbf{n} \cdot \left(\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}^0 \cdot {}^3\epsilon \cdot \tilde{\boldsymbol{\omega}} \right)\Big|_{\Sigma_\sigma} = 0, \ \tilde{\mathbf{w}}\big|_{\Sigma_u} = 0.
\end{gathered} \tag{7}$$

Это и есть искомая постановка задачи на собственные значения ω с учетом предварительного нагружения конструкции, которое определяется наличием тензора $\boldsymbol{\sigma}^0$ и учетом деформированного состояния конструкции.

Вариационная формулировка трехмерной задачи модального анализа предварительно нагруженной конструкции. Для задач (1) и (7) могут быть сформулированы вариационные постановки. Рассмотрим сначала задачу (1) равновесия для основного состояния.

Введем кинематически допустимое поле $\boldsymbol{\Psi}^0 = \delta \mathbf{u}^0$, где $\delta \mathbf{u}^0$ – вариация вектора перемещения $\mathbf{u}^0$, понимаемая как разность двух кинематически допустимых полей. Будем считать, что данное поле удовлетворяет нулевому граничному условию на части поверхности Σ_u области V. Умножая скалярно уравнение равновесия из системы (1) на $\boldsymbol{\Psi}^0$ и интегрируя полученное выражение по области $\overset{\circ}{V}$, с учетом

теоремы Гаусса-Остроградского получаем вариационное уравнение для задачи равновесия в основном состоянии

$$\int\limits_{\overset{o}{V}} {}^4\mathbf{C}\cdot\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^0\left(\mathbf{u}^0\right)\cdot\cdot\delta\boldsymbol{\varepsilon}^0\left(\mathbf{u}^0\right)dV - \int\limits_{\overset{o}{\Sigma_\sigma}} \mathbf{S}_e\cdot\delta\mathbf{u}^0 d\Sigma = 0. \qquad (8)$$

Используя аналогичный подход применительно к задаче на собственные значения (7) в варьируемом состоянии, получаем следующее вариационное уравнение:

$$\int\limits_V \left({}^4\mathbf{C}\cdot\cdot\boldsymbol{\varepsilon}\left(\tilde{\mathbf{w}}\right) + \boldsymbol{\sigma}^0\cdot\Omega\left(\tilde{\mathbf{w}}\right)\right)\cdot\cdot\delta\nabla\otimes\tilde{\mathbf{w}}^T dV + \omega^2\int\limits_V \rho\tilde{\mathbf{w}}\cdot\delta\tilde{\mathbf{w}}dV = 0. \qquad (9)$$

Уравнение (9) представляет собой задачу на собственные значения предварительно нагруженной конструкции.

Метод конечных элементов для численного решения трехмерной задачи в основном состоянии конструкции. Для решения задач (9) и (11) применим метод конечных элементов (МКЭ) [13,14]. Триангуляцию расчетной области осуществим с помощью тетраэдральных конечных элементов (КЭ). Будем использовать линейную аппроксимацию для перемещений в каждом КЭ, напряжения и деформации при этом полагаем постоянными в каждом КЭ. Для дальнейших преобразований введем следующие матричные обозначения: $\underset{6\times6}{[C]}$ — матрица компонент тензора модулей упругости ${}^4\mathbf{C}$, $\underset{3\times12}{[\Phi]}$ — матрица функций формы; $\underset{6\times3}{[L_1]}$ — матрица оператора дифференцирования.

Для основного (устойчивого) состояния введем следующие обозначения: $\underset{6}{\{\sigma^0\}}^T$ — строка компонент тензора напряжений в КЭ; $\underset{6}{\{\varepsilon^0\}}^T$ — строка компонент тензора малых деформаций в КЭ; $\underset{3}{\{u^0\}}^T$ — строка компонент вектора перемещений в КЭ; $\underset{12}{\{U^0\}}^T$ — строка компонент вектора перемещения в узлах КЭ (U^0_{ij} — *j*-ая компонента вектора перемещений u^0_j в *i*-ом узле КЭ); $\underset{3}{\{S_e\}}^T$ — строка компонент вектора внешних поверхностных сил в КЭ.

С учетом введенных обозначений обобщенный закон Гука (второе из уравнений в системе (1)) может быть записан в следующей эквивалентной форме

$$\underset{6}{\{\sigma^0\}} = \underset{6\times6}{[C]}\underset{6}{\{\varepsilon^0\}}, \qquad (10)$$

а соотношения Коши (третье из уравнений в (1)) примут вид

$$\underset{6}{\left\{\varepsilon^0\right\}} = \underset{6\times3}{\left[L_1\right]}\underset{3}{\left\{u^0\right\}}, \tag{11}$$

где вектор перемещений КЭ связан с вектором перемещений его узлов как

$$\underset{3}{\left\{u^0\right\}} = \underset{3\times12}{\left[\Phi\right]}\underset{12}{\left\{U^0\right\}}. \tag{12}$$

Подставляя соотношения в вариационное уравнение (8) и преобразуя полученное выражение, получаем систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) для нахождения значений в узлах КЭ компонент вектора перемещений в основном состоянии:

$$\underset{12\times12}{\left[K\right]}\underset{12}{\left\{U^0\right\}} = \underset{12}{\left\{F\right\}}, \tag{13}$$

где введены обозначения для локальной матрицы жесткости $\underset{12\times12}{\left[K\right]}$ и вектора правых частей $\underset{12}{\left\{F\right\}}$:

$$\underset{12\times12}{\left[K\right]} = \int\limits_V \underset{12\times6}{\left[B_1\right]^T}\underset{6\times6}{\left[C\right]}\underset{6\times12}{\left[B_1\right]}dV, \tag{14}$$

$$\underset{12}{\left\{F\right\}} = \int\limits_{\Sigma_\sigma} \underset{12\times3}{\left[\Phi\right]^T}\underset{3}{\left\{S_e\right\}}dV,\ \underset{6\times12}{\left[B_1\right]} = \underset{6\times3}{\left[L_1\right]}\underset{3\times12}{\left[\Phi\right]}. \tag{15}$$

Метод конечных элементов для численного решения трехмерной задачи модального анализа предварительно нагруженной конструкции. Рассмотрим теперь вариационное уравнение (9) для задачи модального анализа предварительно нагруженной конструкции устойчивости. Введем следующие обозначения для величин в варьируемом состоянии: $\underset{6}{\left\{\sigma\right\}^T}$ — строку компонент тензора напряжений; $\underset{6}{\left\{\varepsilon\right\}^T}$ — строку компонент тензора малых деформаций; $\underset{3}{\left\{w\right\}^T}$ — строку компонент вектора перемещения; $\underset{12}{\left\{W\right\}^T}$ — строку компонент вектора перемещения в узлах конечного элемента.

Образуем матрицу $\underset{9\times9}{\left[\sigma^0\right]}$ из компонент σ_{ij}^0 тензора напряжений в основном состоянии, а также строку, элементами которой являются все производные вида $R_{ij} = \partial w_j / \partial x_i$, матрицу $\underset{9\times3}{\left[L_2\right]}$, составленную из операторов дифференцирования и $\underset{9\times9}{\left[T\right]}$ — матрицу транспонирования [13].

С учетом введенных обозначений обобщенный закон Гука (второе из уравнений в системе (7)) может быть записан в следующей эквивалентной форме

$$\underset{6}{\{\sigma\}} = \underset{6\times 6}{[C]}\underset{6}{\{\varepsilon\}}, \tag{16}$$

а соотношения Коши (третье из уравнений в системе (7)) примут вид

$$\underset{6}{\{\varepsilon\}} = \underset{6\times 3}{[L_1]}\underset{3}{\{w\}}, \tag{17}$$

где вектор перемещения конечного элемента (КЭ) в варьированной конфигурации связан с вектором перемещений его узлов как

$$\underset{3}{\{w\}} = \underset{3\times 12}{[\Phi]}\underset{12}{\{W\}}.$$

Преобразуем первое подынтегральное выражение в (11) с учетом обобщенного закона Гука и выражения для кососимметричного тензора $\Omega(\mathbf{w})$ из (7):

$$\left({}^4\mathbf{C}\cdot\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) + \boldsymbol{\sigma}^0\cdot\Omega(\mathbf{w})\right)\cdot\cdot\delta\nabla\otimes\mathbf{w}^T = G^{(1)} + G^{(2)} + G^{(3)}, \tag{18}$$

где введены обозначения для слагаемых

$$\begin{gathered} G^{(1)} = \boldsymbol{\sigma}\cdot\cdot\delta\nabla\otimes\mathbf{w}^T, \\ G^{(2)} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^0\cdot\nabla\otimes\mathbf{w}\cdot\cdot\delta\nabla\otimes\mathbf{w}^T, \\ G^{(3)} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^0\cdot\nabla\otimes\mathbf{w}^T\cdot\cdot\delta\nabla\otimes\mathbf{w}^T. \end{gathered} \tag{19}$$

Эти слагаемые в (20) могут быть записаны в матричной форме

$$\begin{gathered} G^{(1)} = \underset{6}{\{\sigma\}}^T\underset{6\times 12}{[B_1]}\underset{12}{\{\delta W\}}, \\ G^{(2)} + G^{(3)} = -\frac{1}{2}\underset{12}{\{\delta W\}}^T\underset{12\times 9}{[B_2]}^T\underset{9\times 9}{\left[\tilde{\Sigma}^0\right]}\underset{9\times 12}{[B_2]}\underset{12}{\{W\}}, \end{gathered} \tag{20}$$

где введены матрицы производных функций формы

$$\underset{6\times 12}{[B_1]} = \underset{6\times 3}{[L_1]}\underset{3\times 12}{[\Phi]} \text{ и } \underset{9\times 12}{[B_2]} = \underset{9\times 3}{[L_2]}\underset{3\times 12}{[\Phi]} \tag{21}$$

и обозначена матрица:

$$\underset{9\times 9}{\left[\Sigma^0\right]} = \underset{9\times 9}{\left[\sigma^0\right]}\left(\underset{9\times 9}{[T]} - \underset{9\times 9}{[E]}\right). \tag{22}$$

Преобразуем второе подынтегральное выражение в (9)

$$\rho\tilde{\mathbf{w}}\cdot\delta\tilde{\mathbf{w}} = \rho\underset{3}{\{w\}}^T\underset{3}{\{\delta w\}} = \rho\underset{12}{\{\delta W\}}^T\underset{12\times3}{[\Phi]}^T\underset{3\times12}{[\Phi]}\underset{12}{\{W\}}. \qquad (23)$$

Подставляя соотношения (19)-(24) в вариационное уравнение (9), получаем искомую СЛАУ для задачи на собственные значения:

$$\left(\underset{12\times12}{[K]} - \underset{12\times12}{[S]} - \omega^2\underset{12\times12}{[M]}\right)\underset{12}{\{W\}} = 0, \qquad (24)$$

где введены обозначения для следующих матриц:

$$\begin{gathered}\underset{12\times12}{[K]} = \int_V \underset{12\times6}{[B_1]}^T\underset{6\times6}{[C]}\underset{6\times12}{[B_1]}dV,\\ \underset{12\times12}{[S]} = \frac{1}{2}\int_V \underset{12\times9}{[B_2]}^T\underset{9\times9}{\left[\tilde{\Sigma}^0\right]}\underset{9\times12}{[B_2]}dV,\ \underset{12\times12}{[M]} = \int_V \rho\underset{12\times3}{[\Phi]}^T\underset{3\times12}{[\Phi]}dV.\end{gathered} \qquad (25)$$

Здесь $\underset{12\times12}{[K]}$ — матрица жесткости, $\underset{12\times12}{[S]}$ — матрица изменения жесткости из-за предварительного нагружения, $\underset{12\times12}{[M]}$ — матрица массы.

Для численной реализации разработанного конечно-элементного алгоритма решения задач модального анализа предварительно нагруженных конструкций был разработан специализированный модуль «Собственные колебания с предварительным нагружением» в составе программного комплекса Manipula/SMCM, создаваемого в НОЦ «Симплекс» МГТУ им. Н.Э. Баумана [15]. С помощью этого модуля было проведено численное решение тестовых задач.

Пример численного моделирования тестовой задачи. В качестве примера численного решения задачи рассмотрим тестовую задачу модального анализа предварительно нагруженной титановой балки прямоугольного сечения с размерами $0{,}10\times0{,}01\times1$ м. Основные свойства материала приведены в таблице 1. Один торец балки полагался жестко закрепленным, на втором прикладывалась изгибающая сила 500 Н в направлении, противоположенном оси Y, как показано на рис. 1.

Таблица 1

Основные свойства материала титановой балки

Параметр	Значение
Модуль упругости, ГПа	110,25
Коэффициент Пуассона	0,3
Плотность, кг/м^3	4500

Решение тестовой задачи было осуществлено с помощью специализированного модуля программного комплекса Manipula/SMCM,

разрабатываемого в НОЦ «Симплекс» МГТУ им. Н.Э. Баумана [15]. Был разработан специализировнный модуль для решения задач модельного анализа предварительно нагруженных конструкций. Эти результаты сравнивались с результатами, полученными в ПК ANSYS на одной и той же тетраэдральной конечно-элементной сетке с параметрами: количество узлов – 17 376, количество конечных элементов – 72 192, количество граничных конечных элементов – 20 462.

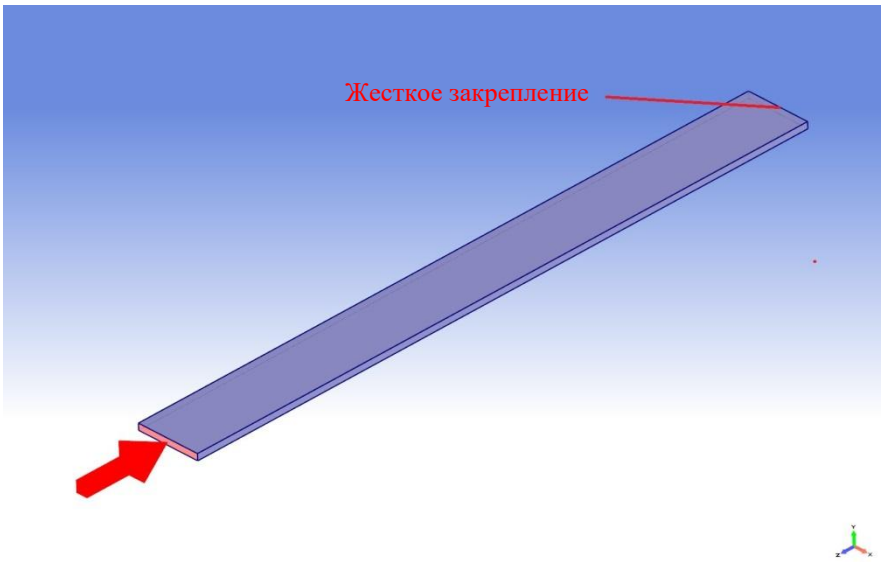


Рис. 1. Граничные условия для задачи модального анализа предварительно нагруженной балки

Таблица 2

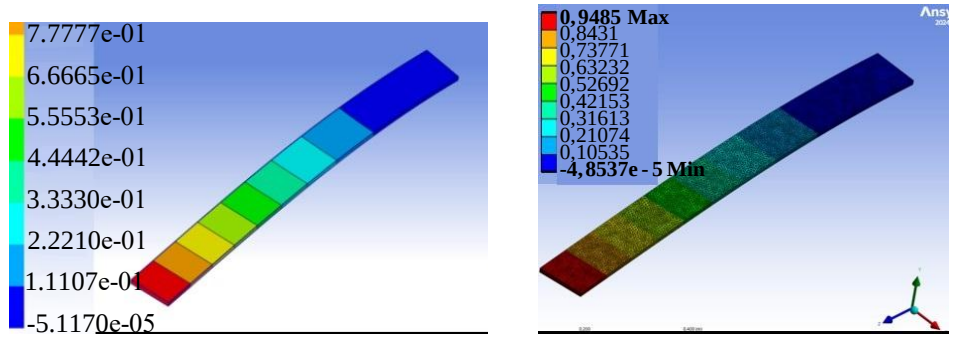
Сравнение собственных частот, полученных в ПК «Manipula» и ПК ANSYS с учетом и без учета предварительного нагружения

Собственная частота	Частота без учета ПН (ПК «Manipula»/SMCM и ПК ANSYS), Гц	Частота с учетом ПН		Относительное отклонение, %
		ПК «Manipula»/SMCM	ПК ANSYS	
1	9,47	70,9611	70,9560	0,0072
2	59,33	85,5123	85,5040	0,0097
3	79,66	183,1117	183,2700	0,0864

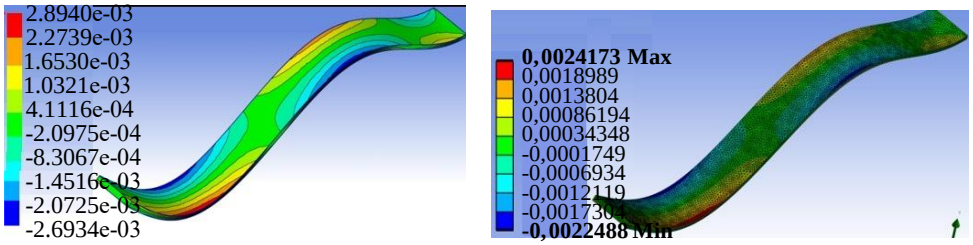
Рассчитывалось три первые собственные частоты. Результаты сравнения частот с учетом и без учета ПН, полученные в различных программных комплексах, приведены в таблице 2. На рис. 2–3 показаны соответствующие моды колебаний.

Сравнение численные расчетов, полученных с помощью разработанного метода, реализованного в ПК «Manipula»/SMCM, с аналогичными результатами, полученными с помощью ПК ANSYS, показало, что имеет место хорошее совпадение результатов, как по соб-

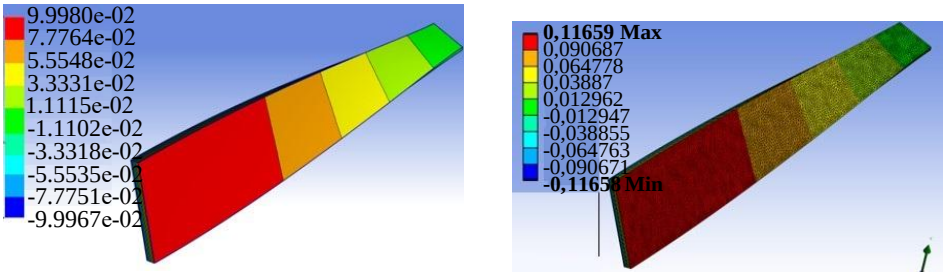
ственным частотам (относительно отклонение не превышает 0,01 %), так и по собственным формам.



а)



б)



в)

Рис. 2. Сравнение компоненты w_1 вектора перемещений, полученной в ПК «Manipula»/SMCM (слева) и ПК ANSYS (справа):
а) – мода 1; б) – мода 2; в) – мода 3

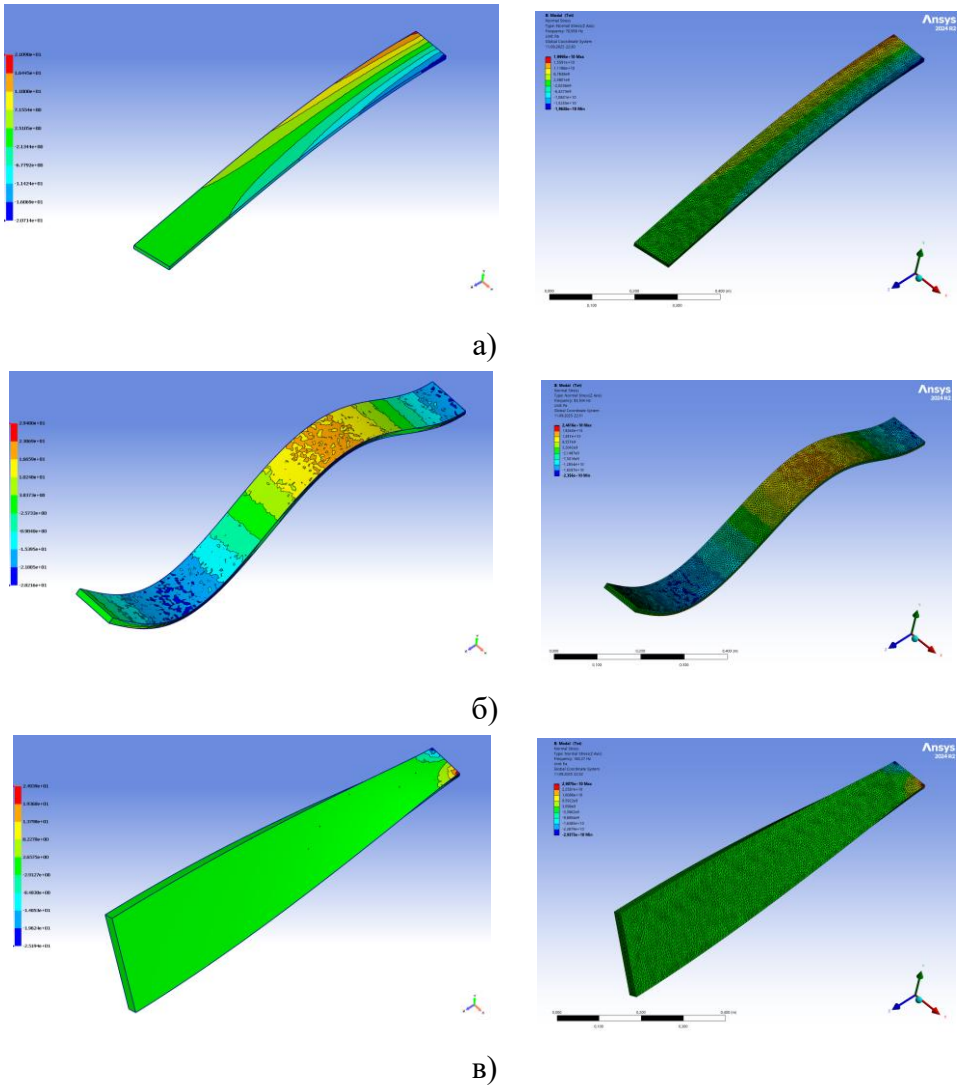


Рис. 3. Сравнение компоненты σ_{33} тензора напряжений, полученной в ПК «Manipula»/SMCM (слева) и ПК ANSYS (справа):
а) – мода 1; б) – мода 2; в) – мода 3

Выводы. Предложена постановка трехмерной задачи расчета собственных частот и собственных форм колебаний упругих конструкций с учетом предварительного их нагружения, которая выведена с использованием общей теории геометрически нелинейного деформирования конструкций.

На основе этой постановки предложена вариационная формулировка задачи модального анализа предварительно напряженных трехмерных конструкций, а также методика конечно-элементного решения задачи. Разработан программный модуль для решения задач

модального анализа преднапряженных конструкций в составе программного комплекса «Manipula»/SMCM, разрабатываемого в НОЦ «СИМПЛЕКС» МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Приведен пример численного решения тестовой задачи модального анализа для случая пластины, предварительно нагруженной продольной сжимающей нагрузкой. Показано, что предварительное нагружение для этой задачи существенно влияет на собственные частоты колебаний пластины. Проведено сравнение с результатами расчетов в программном комплексе ANSYS, которое показало, что имеет место хорошее совпадение результатов расчета собственных частот и собственных форм колебаний.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Безуевский А.В. Влияние больших деформаций конструкции крыла на его модальные характеристики. *Труды 55-й научной конференции МФТИ*, 2012, с. 51-53.

[2] Markandeya Raju P., Pavan Kumar M., Adiseshu S., Sai Sravan Kumar V.V. Mathematical model for natural frequency of prestressed concrete beam using STAAD.Pro. *IOP Conference Series Materials Science and Engineering*, 2021, art. no. 012008.

[3] Hussam K. Risan, Rana I. K. Zaki. Meta-Analysis for influence of prestress force on the natural frequency and prestress loss of concrete member. *European Journal of Engineering and Technology Research*, 2022, vol. 7, iss. 1, pp. 90-95

[4] Li Peng, Ying Wang. Differential quadrature method for vibration analysis of prestressed beams. *E3S Web of Conferences*, 2021, vol. 237, art. no. 03029.

[5] Ojo S. O., Zucco G., Weaver P. M. Free vibration analysis of thermally prestressed constant and variable stiffness laminated beams using strong unified formulation. *9th ECCOMAS Thematic Conference on the Mechanical Response of Composites*, 2023. DOI: 10.23967/c.composites.2023.002.

[6] Nguyen S. N., Nguyen X.C., Nguyen T. H. Free vibration analysis of prestressed timoshenko beams using the modal analysis method. *Advances in Science and Technology – Research Journal*, 2024, vol. 18, no. 8, pp. 125-141.

[7] Orlowska A., Graczykowski C., Gałęzia A. Numerical and experimental investigation of prestress effect on natural frequencies of composite beams. *Proceedings of ISMA2018 and USD2018*, 2018, pp. 2239–2248.

[8] Hamed E., Frostig Y. Natural frequencies of bonded and unbonded prestressed beamsprestress force effects. *Journal of Sound and Vibration*, 2006, vol. 295, pp. 28-39.

[9] Kohnke P. *ANSYS. Theory references*. ANSYS, Inc., 1994, 1286 p.

[10] Димитриенко Ю.И. Обобщенная трехмерная теория устойчивости упругих тел. Часть 1: конечные деформации. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия естественные науки*, 2013, № 4, с.79–95.

[11] Димитриенко Ю.И. Обобщенная трехмерная теория устойчивости упругих тел. Часть 2: малые деформации. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия естественные науки*, 2014, № 1, с. 17–26.

[12] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. Т. 4. Основы механики твердых сред*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013, 624 с.

[13] Димитриенко Ю.И., Богданов И.О. Конечно-элементный метод решения трехмерных задач теории устойчивости упругих конструкций. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия естественные науки*, 2016, № 6, с. 73-92.

[14] Димитриенко Ю.И., Богданов И.О., Юрин Ю.В., Маремшаова А.А., Анохин Д. Конечно-элементное моделирование нестационарной термоустойчивости композитных конструкций. *Математическое моделирование и численные методы,* 2024, № 1, с. 38–54.

[15] Свидетельство № 2022682614 Программа Stability_3D_Manipula для конечно-элементного расчета устойчивости конструкций из полимерных композиционных материалов, с учетом криволинейной анизотропии: свидетельство о офиц. регистрации программы для ЭВМ/Димитриенко Ю.И., Сборщиков С.В., Юрин Ю.В., Богданов И.О.; заявитель и правообладатель МГТУ им. Н.Э. Баумана — № 2022682614; заявл. от 23.11.2022.

Статья поступила в редакцию 28.04.2025

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:
Димитриенко Ю.И., Богданов И.О. Модальный анализ предварительно нагруженных 3D конструкций на основе конечно-элементного моделирования. *Математическое моделирование и численные методы*, 2025, № 3, с. 32–46.

Димитриенко Юрий Иванович — д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, директор Научно-образовательного центра «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: dimit.bmstu@mail.ru

Богданов Илья Олегович — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, старший научный сотрудник Научно-образовательного центра «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов» МГТУ им. Н.Э. Баумана.e-mail: biofamily_7394@mail.ru

Modal analysis of prestressed 3D structures based on finite element modeling

© Yu. I. Dimitrienko, I.O. Bogdanov

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

A formulation of a three-dimensional problem for calculating the natural frequencies and natural modes of vibrations of elastic structures is proposed, taking into account their preliminary loading. The problem statement is written in a tensorial index-free form and is derived using the general theory of geometrically nonlinear deformation of structures. The derivation is based on an analogy with the derivation of a three-dimensional problem of the theory of stability of elastic structures, which was proposed earlier by Yu.I. Dimitrienko. A variational formulation of the problem of model analysis of prestressed three-dimensional structures, as well as a methodology for a finite element solution of the

problem, are proposed. A software module for solving problems of modal analysis of prestressed structures has been developed as part of the Manipula/SMCM software package, developed at the REC "SIMPLEX" of Bauman Moscow State Technical University. Based on the developed software module, an example of a numerical solution of the modal analysis problem is given for the case of a plate preloaded with a longitudinal compressive load. It is shown that preloading for this problem significantly affects the natural frequencies of vibrations of the plate. A comparison was made with the results of calculations in the Ansys software package, and it was shown that there is good agreement between the results of calculating natural frequencies.

***Keywords**: thermal degradation, composites, periodicity cell, FEM, high temperatures, Manipula/SMCM*

REFERENCES

[1] Bezuevskij A.V. Vliyanie bol'shih deformacij konstrukcii kryla na ego modal'nye harakteristiki [The influence of large deformations of the wing structure on its modal characteristics]. *Trudy 55-j nauchnoj konferencii MFTI* [Proceedings of the 55th MIPT Scientific Conference], 2012, pp. 51-53.

[2] Markandeya Raju P., Pavan Kumar M., Adiseshu S., Sai Sravan Kumar V.V. Mathematical model for natural frequency of prestressed concrete beam using STAAD.Pro. *IOP Conference Series Materials Science and Engineering*, 2021, art. no. 012008.

[3] Hussam K. Risan, Rana I. K. Zaki. Meta-Analysis for influence of prestress force on the natural frequency and prestress loss of concrete member. *European Journal of Engineering and Technology Research*, 2022, vol. 7, iss. 1, pp. 90-95

[4] Li Peng, Ying Wang. Differential quadrature method for vibration analysis of prestressed beams. *E3S Web of Conferences*, 2021, vol. 237, art. no. 03029.

[5] Ojo S. O., Zucco G., Weaver P. M. Free vibration analysis of thermally prestressed constant and variable stiffness laminated beams using strong unified formulation. *9th ECCOMAS Thematic Conference on the Mechanical Response of Composites*, 2023. DOI: 10.23967/c.composites.2023.002.

[6] Nguyen S. N., Nguyen X.C., Nguyen T. H. Free vibration analysis of prestressed timoshenko beams using the modal analysis method. *Advances in Science and Technology – Research Journal*, 2024, vol. 18, no. 8, pp. 125-141.

[7] Orlowska A., Graczykowski C., Gałęzia A. Numerical and experimental investigation of prestress effect on natural frequencies of composite beams. *Proceedings of ISMA2018 and USD2018*, 2018, pp. 2239–2248.

[8] Hamed E., Frostig Y. Natural frequencies of bonded and unbonded prestressed beamsprestress force effects. *Journal of Sound and Vibration*, 2006, vol. 295, pp. 28-39.

[9] Kohnke P. *ANSYS. Theory references.* ANSYS, Inc., 1994, 1286 p.

[10] Dimitrienko Yu.I. Generalized three-dimensional theory of elastic bodies stability. Part 1. Theory of shell stability. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Natural Science*, 2014, iss. 2, pp. 77–89.

[11] Dimitrienko Yu.I. Generalized three-dimensional theory of elastic bodies stability. Part 2. Small deformations. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Natural Science*, 2014, iss. 1, pp.17-26.

[12] Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika sploshnoy sredy. Tom 4. Osnovy mekhaniki tverdogo tela* [Continuum Mechanics. Vol. 4. Fundamentals of solid mechanics]. Moscow, BMSTU Publ., 2013, 624 p.

[13] Dimitrienko Yu. I., Bogdanov I. O. Finite element method for threedimensional problems of elastic structures stability. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Natural Science*, 2016, iss. 6, pp.73- 92.

[14] Dimitrienko Y. I. Bogdanov I. O. , Yurin Y. V., Maremshaova A. A. , Anokhin D. S. Finite element modeling of non-stationary thermal buckling of composite structures *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2024, no. 1, pp. 38–54.

[15] Certificate no. 22022682614 Programma Stability_3D_Manipula dlya konechno-elementnogo rascheta ustojchivosti konstrukcij iz polimernyh kompozicionnyh materialov, s uchetom krivolinejnoj anizotropii [MultiScale_SMCM program for multiscale modeling of the stress-strain state of structures made of composite materials, based on the method of multilevel asymptotic homogenization and finite element solution of threedimensional problems of elasticity theory] / Yu.I. Dimitrienko, S.V. Sborshchikov, Yu.V. Yurin, I O Bogdanov; applicant and copyright holder: BMSTU — no. 22022682614; application 23.11.2022.

Dimitrienko Yu. I., Dr. Sci. (Phys. — Math.), Professor, Head of Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University, Director of Research and Education Center Scientific and Educational Centre of Supercomputer Engineering Modeling and Software Packages (Simplex), Bauman Moscow State Technical University. e-mail: dimit.bmtstu@mail.ru

Bogdanov I.O., Cand. Sc. (Phys. — Math.), Associate Professor, Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: biofamily_7394@mail.ru