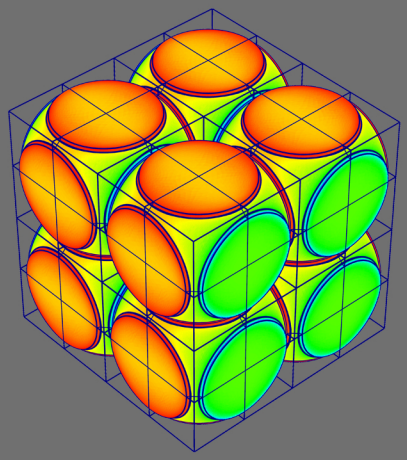
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Димитриенко Ю. И., Губарева Е. А., Сборщиков С. В., Ерасов В. С., Яковлев Н. О. Численное моделирование и экпериментальное исследование деформирования упругопластических пластин при смятии. Математическое моделирование и численные методы, 2015, №1 (5), с. 67-82

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/38/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.216.214
29.01.2026 00:59:27

УДК 539.3

Численное моделирование и экпериментальное исследование деформирования упругопластических пластин при смятии

© Ю.И. Димитриенко[1], Е.А. Губарева[1], С.В. Сборщиков[1], В.С. Ерасов[2], Н.О. Яковлев[2]

[1] МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия
[2] ФГУП «ВИАМ» ГНЦ РФ, Москва, 119049, Россия

Предложена методика численного конечно-элементного решения задачи овализации, которую используют при экспериментальной отработке новых материалов для авиационной промышленности, в целях определения сопротивления деформированию элементов конструкций с наличием концентраторов напряжений, главным образом, соединительных элементов. Методика основана на трехмерном конечно-элементном решении задачи упругопластического деформирования пластин с отверстием при смятии и предназначена для сокращения экспериментальных исследований путей замены их на численные эксперименты. Используется модель малых упругопластических деформаций Ильюшина. Представлены результаты численного моделирования трехмерного напряженно-деформированного состояния упругопластических пластин при смятии, а также результаты экспериментальных исследований деформирования пластин из алюминиевого сплава 163. Показано, что результаты численного и экспериментального моделирования деформирования пластин при смятии достаточно хорошо совпадают.

Ключевые слова: *задача овализации, смятие пластин, численное моделирование, метод конечных элементов, упругость, пластичность, диаграммы деформирования.*

Введение. При экспериментальной отработке новых материалов для авиационной промышленности в целях определения сопротивления деформированию элементов конструкций с наличием концентраторов напряжений, главным образом соединительных элементов, в промышленности применяют стандарт ASTM D 5961/D 5961M, в соответствии с которым проводят испытания образца в виде пластины с отверстием. Пластина одним краем жестко закреплена, на другом крае в отверстие вставлен цилиндрический стержень, к которому приложена нагрузка (рис. 1). При определенной нагрузке P пластина начинает деформироваться — возникает эффект овализации отверстия, или происходит смятие пластины. По стандарту ASTM D 5961/D 5961M используется пластина прямоугольного сечения шириной 36 ± 1 мм, длиной не менее 135 мм и толщиной 3…5 мм. Применяется цилиндрический стальной (сталь Р6М5) стержень диаметром 5,99 ± 0,02 мм. Испытание проводят до деформации 5 %

или момента разрушения, если оно наступает ранее. В процессе испытания записывают диаграмму деформирования $P = P(\delta)$ «напряжение смятия — деформация смятия δ (овализация отверстия)». Диаграмма деформирования является характеристикой материала в составе конструкции и характеризует сопротивляемость материала воздействию нагрузок в зоне концентраторов напряжений, главным образом соединительных элементов конструкций.

Цель исследования — разработка численного алгоритма решения задачи смятия пластин на основе трехмерного конечно-элементного анализа напряженно-деформированного состояния (НДС) пластины вплоть до разрушения.

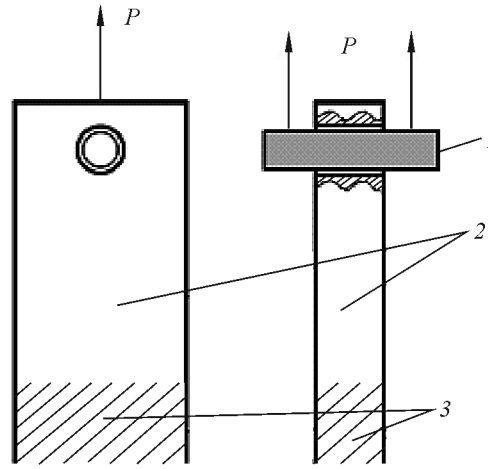


Рис. 1. Схема проведения испытания и вид образца при испытании на смятие

Алгоритм основан на трехмерном конечно-элементном решении задачи упруго-пластического деформирования пластин с отверстием при смятии и предназначен для возможности проведения численных экспериментов. Используется модель малых упругопластических деформаций Ильюшина [1]. Решение задачи овализации отверстия пластины при растяжении рассматривается в рамках трехмерной постановки задачи теории пластичности. С помощью этой теории вычисляют поля напряжений, деформаций и перемещений в пластине, а также строят диаграмму деформирования.

Математическая задача деформирования упругопластических пластин при смятии. Рассмотрим постановку трехмерной задачи деформационной теории пластичности при активном нагружении [2]:

$$\begin{cases} \sigma_{ij,j} = 0 \quad \text{в } V; \\ \sigma_{ij} = F_{ij}(\varepsilon_{kl}) \ \text{ в } V \cup \Sigma; \\ \varepsilon_{ij} = \dfrac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \ \text{ в } V; \\ u_i = u_i^e \ \text{ на } \Sigma_{u1};\ u_i = 0 \text{ на } \Sigma_{u2}; \\ \sigma_{ij} n_j = 0 \ \text{ на } \Sigma_\sigma, \end{cases} \tag{1}$$

где σ_{ij}, ε_{kl} — декартовы компоненты тензоров напряжений и деформаций; u_i — компоненты вектора перемещений; $F_{ij}(\varepsilon_{kl})$ — нелинейная тензорная функция, описывающая модель пластичности; $u_{i,j}$ — частные производные; u_i^e — заданные перемещения на части Σ_{u1} поверхности тела; часть поверхности Σ_{u2} полагаем жесткозащемленной, на ней заданы нулевые перемещения. Для плоской пластины, представляющей собой тонкий параллелепипед с отверстием, ребра которого ориентированы по осям координат, эти перемещения были заданы на половине поверхности отверстия пластины и направлены по оси Ox_1, поэтому

$$u_1^e = U(t) = \dot{U}_0 t\,; \quad u_2^e = u_3^e = 0\,. \tag{2}$$

Задаваемое перемещение $U(t)$ изменяется по линейному закону во времени (постоянная скорость нагружения $\dot{U}_0$ в «жестком» режиме). После решения задачи (1) для каждого момента времени t вычисляем силу, действующую на полуповерхности отверстия,

$$P_1(t) = \int\limits_{\Sigma_0} \sigma_{1i} n_i d\Sigma_0, \tag{3}$$

где Σ_0 — полуповерхность отверстия, к которой приложено нагружающее устройство (стержень). Далее определяем среднее напряжение $\bar{\sigma}_{11}$ и деформацию овализации отверстия δ_1 в пластине:

$$\bar{\sigma}_{11} = \frac{1}{\Sigma_0} P(t)\,; \qquad \delta_1 = \frac{D(t) - D_0}{D_0}\,, \tag{4}$$

где D_0 — начальный диаметр отверстия в пластине; $D(t)$ — текущее значение диаметра отверстия в направлении оси растяжения.

Материал пластины полагаем изотропным, подчиняющимся деформационной теории малых упругопластических деформаций Иль-

юшина для активного нагружения [1]. В этом случае функция $F_{ij}(\varepsilon_{kl})$ имеет следующий вид:

$$\sigma_{ij} = F_{ij}(\varepsilon_{pq}) = K - \frac{2}{3}G[1-\omega(Y_2(\varepsilon))]\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2G[1-\omega(Y_2(\varepsilon))]\varepsilon_{ij}, \quad (5)$$

где $Y_2(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{(\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22})^2 + (\varepsilon_{22}-\varepsilon_{33})^2 + (\varepsilon_{33}-\varepsilon_{11})^2 + 6(\varepsilon_{12}{}^2 + \varepsilon_{13}{}^2 + \varepsilon_{23}{}^2)}$ — второй инвариант (интенсивность) [3] тензора деформации; K — модуль объемного сжатия материала; G — модуль сдвига; ω — функция пластичности Ильюшина, которую представим в степенном виде [2]:

$$\omega(Y_2(\varepsilon)) = \begin{cases} 0, & Y_2(\varepsilon) \le \varepsilon_{\text{т}}; \\ 1 - (\frac{\varepsilon_{\text{т}}}{Y_2(\varepsilon)})^{1-n}; & Y_2(\varepsilon) > \varepsilon_{\text{т}}, \end{cases} \quad (6)$$

где n — показатель упрочнения; $\varepsilon_{\text{т}}$ — деформация начала текучести материала. Такой выбор функции пластичности характерен для материалов со степенным упрочнением диаграммы деформирования, например для некоторых марок алюминиевых сплавов и сталей. Вводя тензор четвертого ранга

$$C(Y_2(\varepsilon))_{ijkl} = (K - \frac{2}{3}G(1-\omega(Y_2(\varepsilon))))\delta_{kl}\delta_{ij} + G(1-\omega(Y_2(\varepsilon)))(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}), \quad (7)$$

определяющее соотношение (5), записываем в следующем псевдолинейном виде:

$$\sigma_{ij} = C(Y_2(\varepsilon))_{ijkl}\varepsilon_{kl}. \quad (8)$$

Это соотношение в частном случае $\omega = 0$ переходит в закон Гука для изотропного материала: $\sigma_{ij} = (K - \frac{2}{3}G)\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2G\varepsilon_{ij}$.

Численный метод решения задачи деформирования при смятии. Для решения задачи теории пластичности (1)–(8) применим один из вариантов метода упругих решений [1, 4], согласно которому определяющее соотношение (8) линеаризуем с помощью итерационного алгоритма

$$\sigma_{ij}^{(m)} = C(Y_2(\varepsilon^{(m-1)}))_{ijkl}\varepsilon_{kl}^{(m)}, \quad (9)$$

где $\sigma_{ij}^{(m)}$ и $\varepsilon_{kl}^{(m)}$ — тензоры напряжений и деформаций на m-м шаге итерации.

В качестве критерия выбора числа необходимых итераций выбираем условие достижения заданного значения Δ — относительного отклонения напряжений

$$\max_{x_k \in V} \frac{\sum_{i,j} |\sigma_{ij}^{(m)}(x_k) - \sigma_{ij}^{(m-1)}(x_k)|}{\sum_{i,j} |\sigma_{ij}^{(m-1)}(x_k)|} < \Delta. \tag{10}$$

С помощью итерационного процесса (9) задачу (1) можно представить в виде последовательности линейных задач

$$\begin{cases} \sigma_{ij,j}^{(m)} = 0 \quad \text{в} \ V; \\ \sigma_{ij}^{(m)} = C(Y_2(\varepsilon^{(m-1)}))_{ijkl}\varepsilon_{kl}^{(m)} \quad \text{в} \ V \cup \Sigma; \\ \varepsilon_{ij}^{(m)} = \dfrac{1}{2}(u_{i,j}^{(m)} + u_{j,i}^{(m)}) \ \text{в} \ V; \\ u_i^{(m)} = u_i^e \ \text{на} \ \Sigma_{u1}; \ u_i^{(m)} = 0 \ \text{на} \ \Sigma_{u2}; \\ \sigma_{ij}^{(m)} n_j = 0 \ \text{на} \ \Sigma_\sigma. \end{cases} \tag{11}$$

Для численного решения каждой задачи (11) на каждой итерации был применен метод конечных элементов (МКЭ). Вариационную формулировку задачи (11) можно записать стандартным образом:

$$\int_V \delta\varepsilon^{(m)\mathrm{T}}\sigma^{(m)} dV = \int_{\partial V} \delta u^{(m)\mathrm{T}} S^{(m)} d\Sigma, \tag{12}$$

куда введены координатные столбцы для компонент вектора перемещений, тензоров напряжений и деформаций:

$$u^{(m)} = [u_1^{(m)}, u_2^{(m)}, u_3^{(m)}]^{\mathrm{T}};$$
$$\sigma^{(m)} = [\sigma_{11}^{(m)}, \sigma_{22}^{(m)}, \sigma_{33}^{(m)}, \sigma_{12}^{(m)}, \sigma_{23}^{(m)}, \sigma_{31}^{(m)}]^{\mathrm{T}};$$
$$\varepsilon^{(m)} = [\varepsilon_{11}^{(m)}, \varepsilon_{22}^{(m)}, \varepsilon_{33}^{(m)}, 2\varepsilon_{12}^{(m)}, 2\varepsilon_{23}^{(m)}, 2\varepsilon_{13}^{(m)}]^{\mathrm{T}},$$

а $S^{(m)}=[S_1^{(m)}, S_2^{(m)}, S_3^{(m)}]^{\mathrm{T}}$ — координатный столбец вектора поверхностных сил. Запишем определяющие соотношения и соотношения Коши в системе (11) в матричном виде: $\sigma^{(m)} = C^{(m)}\varepsilon^{(m)}$; $\varepsilon^{(m)} = Du^{(m)}$, где $C^{(m)}$ — матрица размером [6×6], составленная из компонент тензора $C(Y_2(\varepsilon^{(m-1)}))_{ijkl}$; D — матрица размером [3×6] дифференциальных операторов [5, 6].

Тогда вариационное уравнение (12) примет следующий вид:

$$\int_V (D\delta u^{(m)})^{\mathrm{T}} C^{(m)} D u^{(m)} dV = \int_W \delta u^{(m)\mathrm{T}} S^{(m)} d\Sigma. \qquad (13)$$

Разбивая всю область V на конечные элементы, аппроксимируем перемещения $u^{(m)}$ в каждом КЭ в следующем виде: $u^{(m)} = \Phi(x_k) q^{(m)}$, где $\Phi(x_k)$ — матрица функций формы размером $[3\times n]$ ($n = 3m$, где m — число узлов конечного элемента); $q^{(m)}$ — перемещения в узлах КЭ. Для деформаций и напряжений имеем следующие аппроксимации: $\sigma^{(m)} = C^{(m)} B q^{(m)}$; $\varepsilon^{(m)} = D\Phi(x_k) q^{(m)}$; $B = D\Phi(x_s)$. Тогда вариационное уравнение (13) приводим к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) для каждого КЭ: $K_e^{(m)} q^{(m)} = f_e$, где $K_e^{(m)} = V_k B^{\mathrm{T}} C^{(m)} B; f_e = \int_{V_k} \Phi(x_s)^{\mathrm{T}} S^{(m)} d\Sigma$. Путем стандартной процедуры ансамблирования СЛАУ собираются в глобальную систему $K^{(m)} q^{(m)} = f$. Для решения такой СЛАУ большой размерности применяют метод сопряженных градиентов, который в совокупности с разреженным методом хранения СЛАУ [7] обеспечивает хорошую скорость решения.

В рамках проведенного исследования применены конечные элементы в виде тетраэдра с четырьмя узлами ($m = 4$, $n = 12$) в вершинах, которые обеспечивают линейную аппроксимацию перемещений $u^{(m)}$ и приводят к постоянным напряжениям $\sigma^{(m)}$ и деформациям $\varepsilon^{(m)}$ в каждом КЭ. Программная реализация разработанного алгоритма осуществлялась на базе программного обеспечения Научно-образовательного центра «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов» МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Экспериментальные диаграммы деформирования алюминиевых сплавов. Тестирование разработанного алгоритма численного моделирования осуществлялось путем сравнения расчетных и экспериментальных данных в задаче смятия. На рис. 2 представлены экспериментальные диаграммы деформирования алюминиевого сплава 1163 при растяжении и сжатии, использованного в качестве тестового материала.

Эти диаграммы были использованы для определения констант пластичности в рамках степенной модели (6), (7) $E, \nu, \varepsilon_{\mathrm{T}}, K, n$. Значения этих параметров для сплава 1163: $E = 70$ ГПа, $K = 63$ ГПа, $G = 26{,}3$ ГПа, $\nu = 0{,}33$, $\varepsilon_{\mathrm{T}} = 0{,}004$, $n = 0{,}31$.

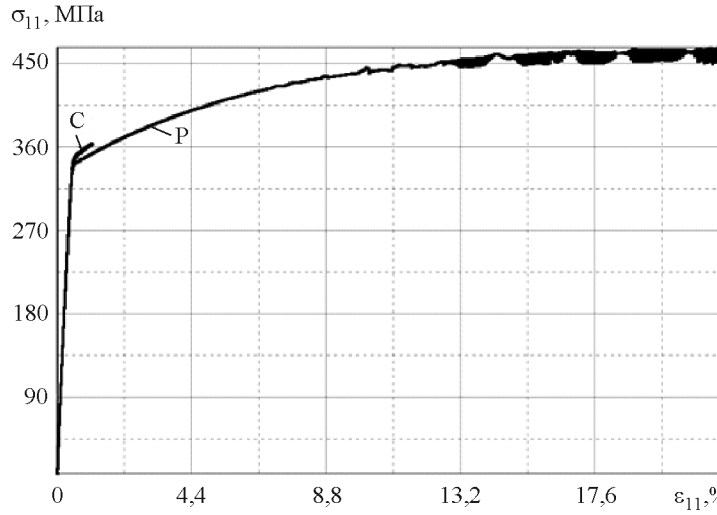


Рис. 2. Диаграммы деформирования алюминиевого сплава 1163, полученные на разных образцах при сжатии (С) и растяжении (Р)

Результаты численного моделирования НДС в задаче овализации. Для численного моделирования НДС в задаче овализации при смятии с помощью программы SolidWorks была создана геометрия пластины с отверстием, затем с помощью программы NetGEN была сгенерирована конечно-элементная сетка для решения данной задачи (рис. 3).

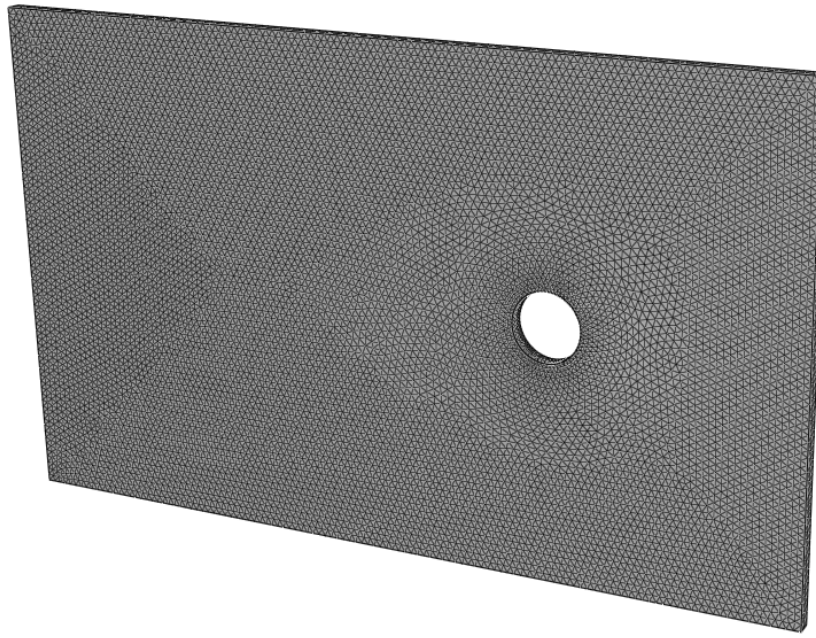


Рис. 3. Конечно-элементная сетка, построенная для решения задачи овализации

Параметры и значения сетки:

Используемый тип КЭ …… Четырехузловой тетраэдр
Число КЭ в сетке ……..…. 41 044
Число узлов в сетке ……..……. 25 088
Точность определения решения …….…. 0,00001
Максимальное число итераций в методе
решения СЛАУ ……..… 250
Размер шага по методу упругих решений … 0,0001
Число точек расчета …….……. 30
Среднее число итераций для вычисления
одной точки ……..….. 25

На рис. 4–6 представлены некоторые из результатов расчетов: поля нормальных напряжений σ_{11} и σ_{22}, касательного напряжения σ_{12} в пластине в задаче овализации. Максимальные значения всех напряжений достигаются непосредственно на поверхности отверстия пластины, в той ее части, где эта поверхность контактирует с растягивающим устройством. От отверстия в сторону передней свободной поверхности (на рис. 4 справа) направлены линии — условные границы максимальных напряжений в пластине. Особенно заметны эти линии на рис. 4 для касательных напряжений.

Определим параметр повреждаемости упругопластического материала

$$z = \frac{Y_2(\sigma)}{\sigma_т} h\left(\frac{\sigma}{\sigma_т}\right) + \frac{Y_2(\sigma)}{\sigma_с} h\left(-\frac{\sigma}{\sigma_с}\right) +$$

$$+(B_0\sigma + B_1\sigma^2 + B_2 Y_2^2(\sigma))\left(1 - h\left(\frac{\sigma}{\sigma_т}\right)\right)\left(1 - h\left(-\frac{\sigma}{\sigma_с}\right)\right),$$

где коэффициенты $B_0 = \frac{1}{\sigma_с\sigma_т} - \frac{1}{3\sigma^2_s}$, $B_1 = \frac{\sigma_с - \sigma_т}{\sigma_с\sigma_т}$, $B_2 = \frac{1}{3\sigma^2_s}$;

$Y_2(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2}}((\sigma_{11}-\sigma_{22})^2 + (\sigma_{11}-\sigma_{33})^2 + (\sigma_{22}-\sigma_{33})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2))^{1/2}$ — интенсивность тензора напряжений; $\sigma = \sigma_{ii}$ — первый инвариант тензора напряжений; $\sigma_т, \sigma_s, \sigma_с$ — пределы прочности материала при одноосном растяжении, сдвиге и сжатии соответственно; $h(y)$ — функция Хевисайда ($h(y) = 1$ при $y > 0$, и $h(y) = 0$ при $y < 0$). Разрушение материала начинается, когда параметр повреждаемости $z = 1$.

Такой параметр повреждаемости соответствует критерию прочности Писаренко — Лебедева [5, 6]. При $\sigma > \sigma_т$ и $\sigma < -\sigma_с$ параметр z

представляет собой отношение интенсивности напряжений к соответствующему пределу прочности при растяжении или сжатии, что соответствует критерию прочности Мизеса. А при $-\sigma_c < \sigma < \sigma_т$ параметр повреждаемости соответствует критерию прочности Ягна.

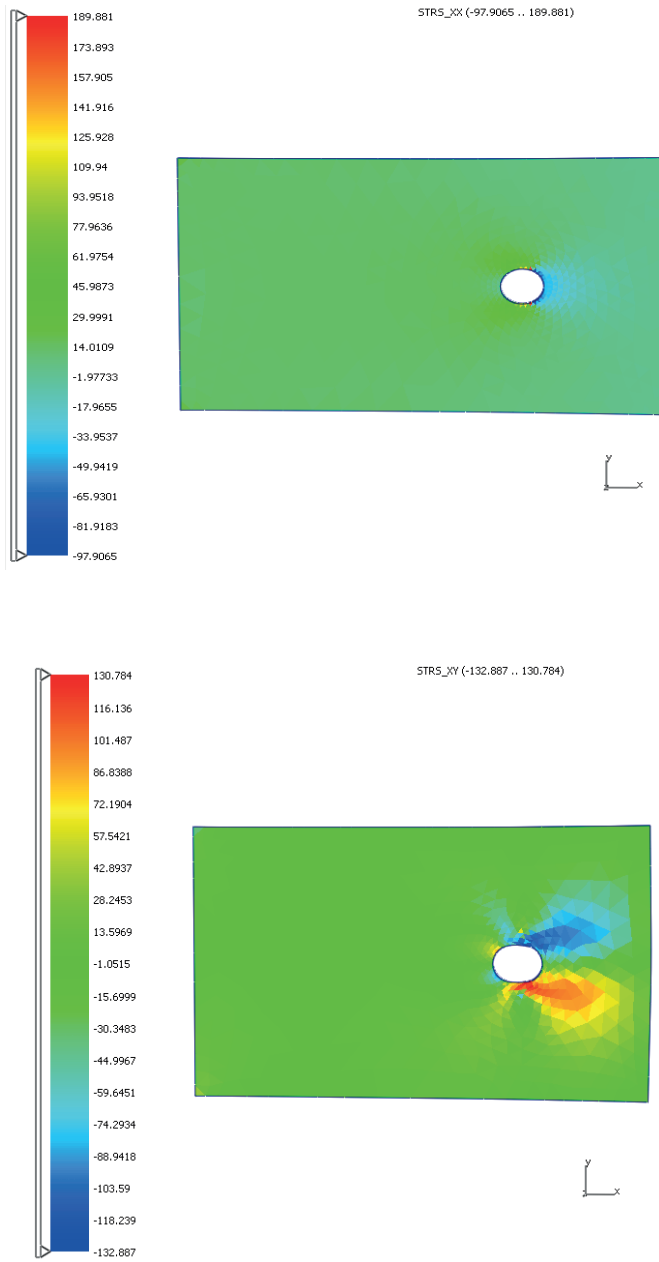


Рис. 4. Поля напряжений σ_{11} и σ_{12}, МПа, в пластине в задаче овализации

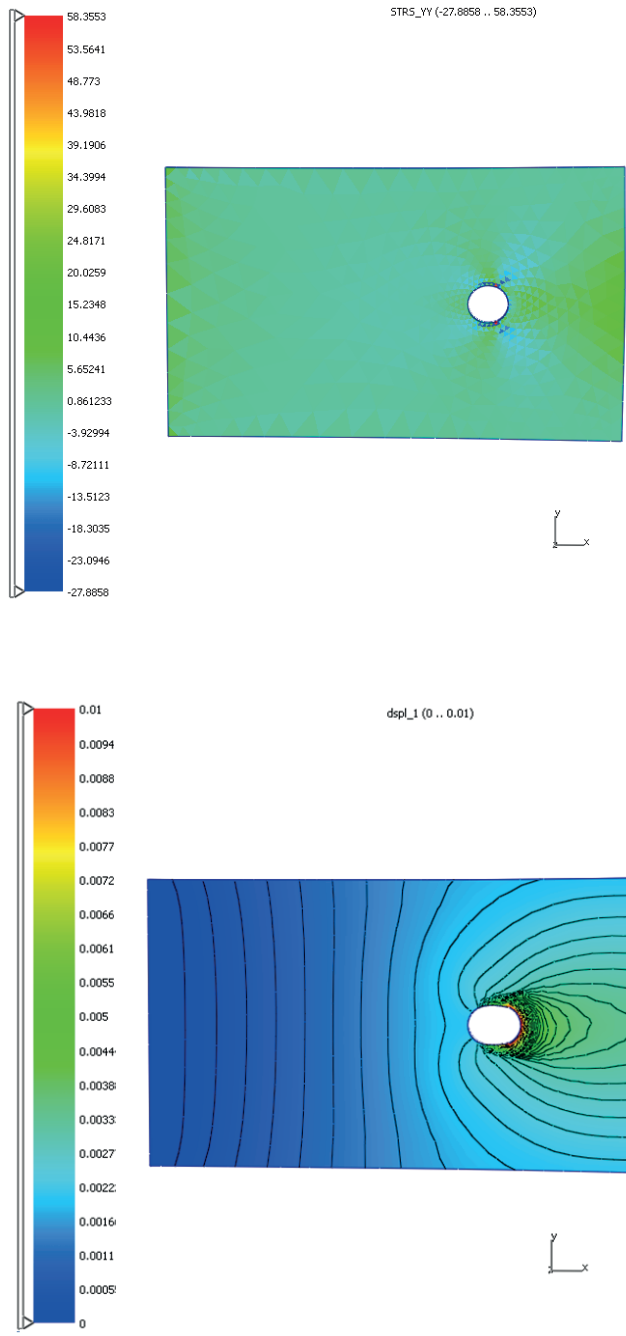


Рис. 5. Поля поперечного нормального напряжения σ_{22}, МПа, и продольного перемещения u_1, м, в пластине в задаче овализации

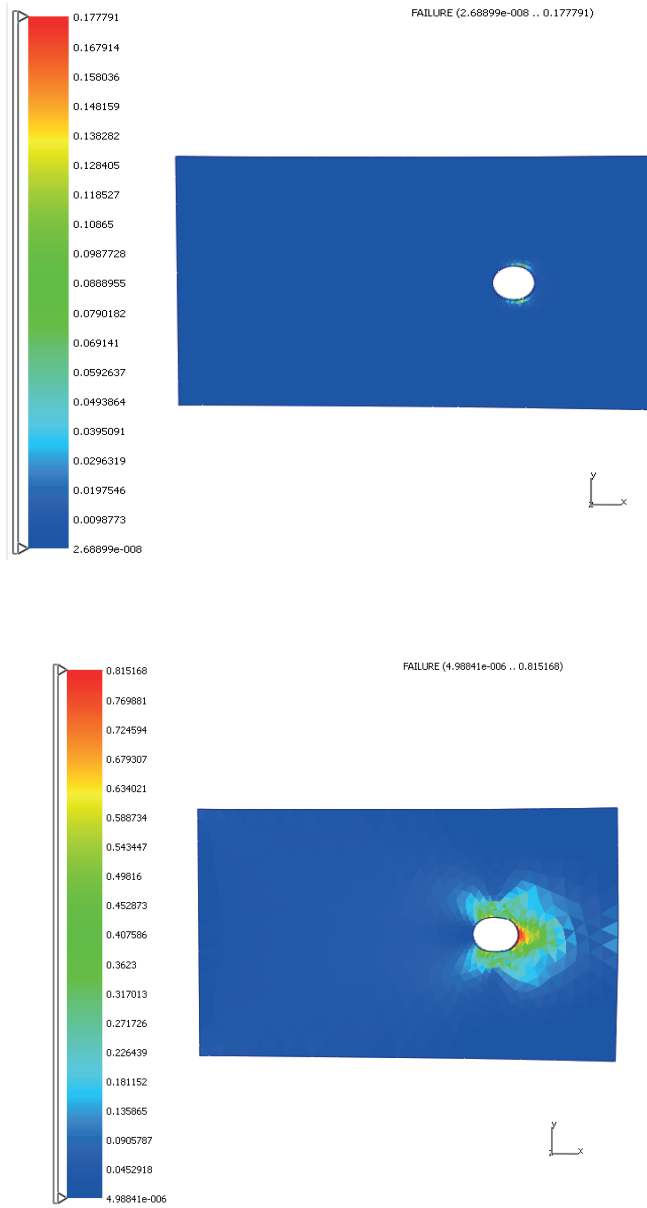


Рис. 6. Поле параметра повреждаемости материала в пластине при двух значениях растягивающего перемещения $U(t)$

На рис. 6 показано поле параметра повреждаемости материала в пластине при двух значениях растягивающего перемещения $U(t)$, максимум этого параметра достигается на поверхности контакта растягивающего устройства и отверстия пластины, в передней ее точке.

В этой точке и начинается разрушение материала, когда параметр повреждаемости $z = 1$.

На рис. 7 показаны экспериментальная и расчетная диаграммы деформирования $\overline{\sigma}_{11} \sim \delta_1$ алюминиевого сплава 1163 при смятии. Видно, что совпадение экспериментальных и расчетных результатов достаточно хорошее, что позволяет говорить об адекватности разработанной вычислительной модели.

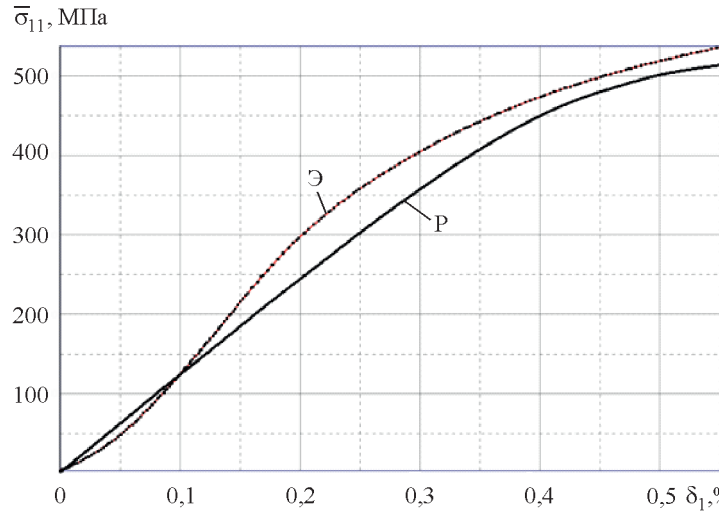


Рис. 7. Экспериментальная (Э) и расчетная (Р) диаграммы деформирования алюминиевого сплава 1163 при смятии

Разработанный алгоритм может быть применен для расчета НДС тонких пластин [8–14], содержащих конструктивные отверстия, соединительные элементы и другие неоднородности конструкции.

Выводы. Разработан численный конечно-элементный алгоритм решения трехмерной задачи овализации отверстия при смятии образца для упругопластических материалов, деформирование которых подчиняется теории малых упругопластических деформаций Ильюшина.

Численным путем получены поля нормальных напряжений σ_{33} и σ_{22} и касательного напряжения σ_{23} в пластине из алюминиевого сплава 1163, а также поле параметра повреждаемости материала в пластине. Установлено, что максимум этого параметра достигается на поверхности контакта растягивающего устройства и отверстия пластины, в передней ее точке. В этой точке и начинается разрушение материала, когда параметр повреждаемости достигает единицы.

Численным путем получены диаграммы деформирования при смятии образца с отверстием из алюминиевого сплава 1163. Показано, что имеет место достаточно хорошее совпадение эксперимен-

тальных и расчетных диаграмм овализации, что позволяет говорить об адекватности разработанной вычислительной модели.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ильюшин А.А. *Механика сплошной среды*. Москва, УРСС, 2014, 320 с.
[2] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. В 4 т. Т. 4: Основы механики твердого тела.* Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013, 624 с.
[3] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. В 4 т. Т. 1: Тензорный анализ.* Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011, 463 с.
[4] Биргер И. А., Мавлютов Р. Р. *Сопротивление материалов*. Москва, Наука, 1986, 560 с.
[5] Димитриенко Ю.И., Яковлев Н.О., Ерасов В.С., Федонюк Н.Н., Сборщиков С.В., Губарева Е.А., Крылов В.Д., Григорьев М.М., Прозоровский А.А. Разработка многослойного полимерного композиционного материала с дискретным конструктивно-ортотропным заполнителем. *Композиты и наноструктуры*, 2014, т. 6, № 1, с. 32–48.
[6] Димитриенко Ю.И., Федонюк Н.Н., Губарева Е.А., Сборщиков С.В., Прозоровский А.А. Многомасштабное конечно-элементное моделирование трехслойных сотовых композитных конструкций. *Наука и образование: электронное научно-техническое издание,* 2014, № 10. doi: 10.7463/1014.0730105
[7] Димитриенко Ю.И., Соколов А.П. Многомасштабное моделирование упругих композиционных материалов. *Математическое моделирование*, 2012, т. 24, № 5, с. 3–20.
[8] Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Сборщиков С.В. Асимптотическая теория конструктивно-ортотропных пластин с двухпериодической структурой. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 1, с. 36–57.
[9] Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Сборщиков С.В. Конечно-элементное моделирование эффективных вязкоупругих свойств однонаправленных композиционных материалов. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 2, с. 28–48.
[10] Димитриенко Ю.И., Соколов А.П. Разработка системы автоматизированного вычисления эффективных упругих характеристик композитов. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2008, № 2, с. 57–67.
[11] Димитриенко Ю.И., Соколов А.П. Система автоматизированного прогнозирования свойств композиционных материалов. *Информационные технологии*, 2008, № 8, с. 31–38.
[12] Димитриенко Ю.И., Сборщиков С.В., Соколов А.П., Садовничий Д.Н., Гафаров Б.Р. Численное и экспериментальное моделирование прочностных характеристик сферопластиков. *Композиты и наноструктуры*, 2013, № 3, с. 35–51.
[13] Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Юрин Ю.В. Асимптотическая теория термоползучести многослойных тонких пластин. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 4, с. 18–36.
[14] Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Яковлев Д.О. Асимптотическая теория вязкоупругости многослойных тонких композитных пластин. *Наука и образование: электронное научно-техническое издание*, 2014, № 10. doi: 10.7463/1014.0730105

Статья поступила в редакцию 31.01.2015

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:
Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Сборщиков С.В., Ерасов В.С., Яковлев Н.О. Численное моделирование и экспериментальное исследование деформирования упругопластических пластин при смятии. *Математическое моделирование и численные методы*, 2015, № 1, с. 67–82.

Димитриенко Юрий Иванович родился в 1962 г., окончил МГУ им. М.В. Ломоносова в 1984 г. Д-р физ.-мат. наук, профессор, директор Научно-образовательного центра «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов» МГТУ им. Н.Э. Баумана; заведующий кафедрой «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 300 научных работ в области механики сплошных сред, вычислительной механики, механики и термомеханики композитов, математического моделирования в науке о материалах, вычислительной газодинамики. e-mail: dimit.bmstu@gmail.com

Губарева Елена Александровна родилась в 1982 г., окончила МГУ им. М.В. Ломоносова в 2004 г. Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор 30 научных работ в области механики сплошных сред, механики контактного взаимодействия, математического моделирования, механики композитов. e-mail: gubareva_ea@pochta.ru

Сборщиков Сергей Васильевич родился в 1989 г., окончил МГТУ им. Н.Э. Баумана в 2012 г. Аспирант кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор 12 научных работ в области вычислительной механики композитов. e-mail: servasbor@gmail.com

Ерасов Владимир Сергеевич родился в 1950 г., окончил МИФИ в 1974 г. Канд. техн. наук, начальник лаборатории «Прочность и надежность материалов воздушного судна» ФГУП «ВИАМ» ГНЦ РФ. Автор более 105 научных работ в области механики материалов и физики прочности.

Яковлев Николай Олегович родился в 1984 г., окончил МИСиС в 2007 г. Канд. техн. наук, научный сотрудник лаборатории «Прочность и надежность материалов воздушного судна» ФГУП «ВИАМ» ГНЦ РФ. Автор более 20 научных работ в области прочности и надежности материалов, методов механических испытаний полимерных, полимерных композиционных и металлических материалов.

Computational modeling and experimental investigation of elastic-plastic plates deforming under crushing

© Yu.I. Dimitrienko[1], E.A. Gubareva[1], S.V. Sborschikov[1], V.S. Erasov[2], N.O. Yakovlev[2]

[1] Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia
[2] Federal State Unitary Enterprise “All-Russian Scientific Research Institute of Aviation Materials”, Moscow, 105005, Russia

The article presents a suggested method of numerical finite-element solving the ‘hole ovalization’ problem. This method can be applied for experimental development of advanced aviation materials with the aim of determining structure element resistance against deforming with stress concentrators, mainly, connectors. The method is based on three-dimensional finite element solution of the problem of elastoplastic deformation of plates with a hole under crushing. It is appropriate for reduction of experimental studies

and replacing them by the numerical experiments. The Ilyushin model of small elasto-plastic deformations has been used. The results of numerical simulation of a three-dimensional stress-strain state of elastoplastic plates under crushing are presented as well as results of experimental investigations of deforming plates of Al-alloy 163. It is shown that the results of numerical and experimental modeling for deforming plates under crushing agree quite well.

Keywords: *' hole ovalization' problem, plate crumpling, numerical modeling, finite element method, elasticity, plasticity, deforming diagram.*

REFERENCES

[1] Ilyushin A.A. *Mekhanika sploshnoy sredy* [Continuum Mechanics]. Moscow, URSS Publ., 2014, 320 p.

[2] Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika sploshnoi sredy* [Continuum Mechanics]. *In 4 vols. Vol. 4. Osnovy mekhaniki tverdogo tela* [Fundamentals of Solid Mechanics]. Moscow, BMSTU Publ., 2013, 624 p.

[3] Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika sploshnoi sredy* [Continuum Mechanics]. *In 4 vols. Vol. 1. Tenzornyy analiz* [Tensor analysis]. Moscow, BMSTU Publ., 367 p.

[4] Birger I.A., Mavlyutov R.R. *Soprotivlenie materialov* [Strength of Materials]. Moscow, Nauka Publ., 1986, 560 c.

[5] Dimitrienko Yu.I., Yakovlev N.O., Erasov V.S., Fedonuk N.N., Sborschikov S.V., Gubareva E.A., Krylov V.D., Grigoryev M.M., Prozorovskiy A.A. *Kompozity i nanostruktury – Composites and Nanostructures*, 2014, no. 1, vol. 6, pp. 32–48.

[6] Dimitrienko Yu.I, Fedonuk N.N., Gubareva E.A., Sborschikov S.V, Prozorovsky A.A. *Nauka i obrazovanie. Elektronnoe nauchno-tekhnicheskoe izdanie — Science and Education. Electronic Scientific and Technical Journal*, 2014, no. 10. doi: 10.7464/1014.0730105

[7] Dimitrienko Yu.I., Sokolov A.P. *Matematicheskoe modelirovanie – Mathematical Modeling*, 2012, no. 5, vol. 24, pp. 3–20.

[8] Dimitrienko Yu.I., Gubareva E.A., Sborschikov S.V. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye menody – Mathematical modeling and Numerical Methods*, 2014, no. 1, pp. 36–57.

[9] Dimitrienko Y.I., Gubareva E.A., Sborschikov S.V. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye menody – Mathematical modeling and Numerical Methods,* 2014, no. 2, pp. 28–48.

[10] Dimitrienko Yu.I., Sokolov A.P. *Vestnic MGTU im. N.E. Baumana. Seria Estestvennye nauki – Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series: Natural Sciences*, 2008, no. 2, pp. 57–67.

[11] Dimitrienko Yu.I., Sokolov A.P. *Informatsionnye Tekhnologii – Information Technologies*, 2008, no. 8, pp. 31–38.

[12] Dimitrienko Yu.I., Sborschikov S.V., Sokolov A.P., Sadovnichiy D.N., Gafarov B.R. *Kompozity i nanostruktury – Composites and Nanostructures*, 2013, no. 3, pp. 35–51.

[13] Dimitrienko Yu.I., Gubareva E.A., Yurin Yu.V. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye menody – Mathematical modeling and Numerical Methods*, 2014, no. 4, pp.28–48.

[14] Dimitrienko Yu.I., Gubareva E.A., Yakovlev D.O. *Nauka i obrazovanie. Elektronnoe nauchno-tekhnicheskoe izdanie — Science and Education. Electronic Scientific and Technical Journal*, 2014, no. 10. doi: 10.7463/1014.0730105.

Dimitrienko Yu. I. (b.1962) graduated from Lomonosov Moscow State University in 1984. Dr. Sci. (Phys. & Math.), Professor, Head of the Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Director of Scientific-Educational Center of Supercomputer Engineering Modeling and Program Software Development at Bauman Moscow State Technical University. Member of the Russian Academy of Engineering Science. The author of more than 300 publications in the field of computational mechanics, gasdynamics, thermomechanics of composite materials, mathematical simulations in material science. e-mail: dimit.bmstu@gmail.com.

Gubareva E.A. (b.1982) graduated from Lomonosov Moscow State University in 2004. Candidate of sciences (Phys. & Math.), associated professor at the Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, at Bauman Moscow State Technical University. The author of more than 30 publications in the field of continuum mechanics, trybology, mathematical modeling and composite mechanics.
e-mail: gubareva_ea@pochta.ru.

Sborschikov S.V. (b.1989) graduated from Bauman Moscow State Technical University in 2012. A Ph.D. student at the Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, at Bauman Moscow State Technical University. The author of 12 publications in the field of continuum mechanics of composites.
e-mail: servasbor@gmail.com.

Erasov V.S. (b.1950) graduated from Moscow Engineering Physics Institute in 1974. Candidate of Engineering Sciences, head of the laboratory of “Durability and reliability of the aircraft materials” at the Federal State Unitary Enterprise “All-Russian Scientific Research Institute of Aviation Materials”. The author of more than 105 publications in the field of mechanics of materials and physics of strength.

Yakovlev N.O. (b.1984) graduated from Moscow Institute of Steels and Alloys in 2007. Candidate of Engineering Sciences, researcher at the laboratory of “Durability and reliability of the aircraft materials” at the Federal State Unitary Enterprise “All-Russian Scientific Research Institute of Aviation Materials”. The author of more than 20 publications in the field of durability and reliability of the materials, techniques of mechanical testing polymer, polymer composite and metallic materials.

.