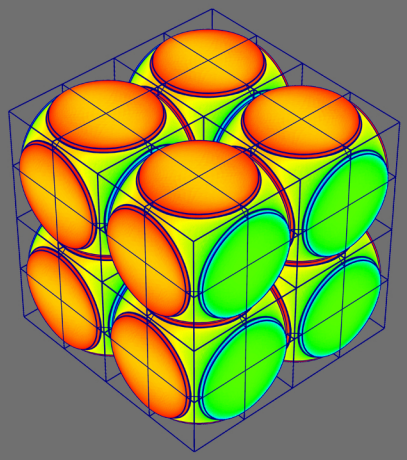
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Савин А.С., Конев К.М. Численное моделирование воздействия на ледяной покров точечного импульсного источника в жидкости конечной глубины. Математическое моделирование и численные методы, 2025, № 3, с. 3–14.

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/379/

Параметры загрузки:
IP: 3.41.188.32
17.11.2026 08:12:43

УДК 532.5+551.465 DOI: 10.18698/2309-3684-2025-3-314

Численное моделирование воздействия на ледяной покров точечного импульсного источника в жидкости конечной глубины

© А.С. Савин, К.М. Конев

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Рассмотрена пространственная задача о возмущении ледяного покрова точечным импульсным источником, локализованным в толще жидкости конечной глубины. Проведено численное исследование возмущений ледяного покрова разной толщины источниками, находящимися на разных глубинах. Основное внимание уделено исследованию возмущений ледяного покрова, возникающих непосредственно над источником.

Ключевые слова: *жидкость с ледяным покровом, точечный источник, возмущения ледяного покрова*

Введение. Численное моделирование является ключевым инструментом для исследования сложных процессов, которые трудно или невозможно наблюдать. Актуальность данного исследования связана с перспективностью арктического региона, характерной особенностью которого является наличие ледяного покрова. Точные модели поведения льда под воздействия внешних факторов, таких как взрывы, акустические импульсы или подводные удары, могут быть использованы для разработки методов предотвращения разрушений ледяных покровов, а также для решения задач, связанных с безопасностью, транспортом, энергетикой и охраной окружающей среды.

Основные теоретические результаты о распространении волн на ледяном покрове изложены в работе [1], однако там не уделено внимание вопросам генерации таких волн. С другой стороны, известны решения задач о генерации волн в жидкости без ледяного покрова [2–5]. С помощью изложенных там методов в работах [6–7] получены выражения для отклонений границы раздела жидкости и льда под воздействием пульсирующего и точечного источника в жидкости бесконечной глубины. Исследования [8–12] посвящены динамике ледяного покрова в присутствии внешних и внутренних воздействий, включая нагрузки, колебания тел и сдвиговые течения. Задачи рассмотрены в линейной постановке для жидкости бесконечной глубины, а ледяной покров моделируется упругой пластиной. Получены аналитические и численные решения, которые описывают волны, деформации и прогибы в различных условиях, например, под влиянием движущихся и периодических нагрузок [8], неравномерного сжатия

ледяного покрова [9], наличия трещин и неоднородностей [10], а также взаимодействие с жидкостью, характеризующейся сдвиговыми течениями [11–12]. Исследование [13] посвящено задаче о движении тонких тел в жидкости под плавающей пластиной. В недавней работе [14] проведено исследование фазовой структуры волновых возмущений, возбуждаемых пульсирующим источником на поверхности раздела потока жидкости конечной глубины и ледяного покрова. Эти результаты демонстрируют важность учета конечности глубины жидкости и динамических характеристик источника для точного моделирования взаимодействия с ледяным покровом. Новые методы моделирования сред, находящихся в напряженно-деформируемом состоянии [15–16], могут лечь в основу других подходов к задачам динамики ледяного покрова на основе более полного учета его многообразных физических свойств. Особенно полезными такие подходы могут быть в задачах о воздействии на лед разрушающих воздействий.

В работе [7] рассмотрена задача о воздействии на ледяной покров точечного импульсного источника, находящегося в бесконечно глубокой жидкости. Такая модель отвечает случаю больших глубин открытого моря. При этом прибрежные участки акваторий северных морей имеют небольшую глубину. Таким образом, для более точного описания необходимо учитывать конечность глубины жидкости. Целью настоящей работы является изучение влияния на ледяной покров точечных импульсных источников, расположенных в жидкости конечной глубины. В настоящей статье представлены результаты численного моделирования воздействия на ледяной покров мгновенного выброса жидкости импульсным источником в жидкости конечной глубины. Эта задача решалась в предположении, что на границе раздела жидкости и льда возникают волны, амплитуда которых много меньше их длины, а течение жидкости потенциально всюду, кроме точки локализации источника. Ледяной покров рассматривался как тонкая упругая пластина постоянной толщины, плавающая на поверхности жидкости.

Постановка задачи и основные соотношения. Рассмотрим взаимодействие точечного импульсного источника, расположенного в толще жидкости, с ледяным покровом, который представлен в виде тонкой упругой пластины, свободно плавающей на поверхности воды. Для описания системы будем использовать декартову систему координат (x, y, z), где плоскость $z = 0$ совпадает с невозмущённой поверхностью раздела льда и жидкости, а ось z направлена вверх. Источник с интенсивностью $Q = Q(t)$ примем локализованным в точке $(0, 0, -l)$, где $l > 0$ задает глубину погружения. Считая, что течение жидкости потенциально во всей области Ω, за исключением точ-

ки расположения источника $\boldsymbol{r_0}$, где возникает характерная для точечного источника особенность, потенциал скорости $\Phi = \Phi(\boldsymbol{r}, t)$, $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ удовлетворяет уравнению Лапласа. На глубине L примем условие непротекания дна:

$$\Phi_{xx} + \Phi_{yy} + \Phi_{zz} = 0, (\boldsymbol{r} \in \Omega \setminus \boldsymbol{r_0}),$$
$$\Phi(\boldsymbol{r}, t) \sim \frac{Q(t)}{4\pi} \frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r_0}|}, (\boldsymbol{r} \to \boldsymbol{r_0}), , \tag{1}$$
$$\Phi_z = 0, (z = -L).$$

Обозначим отклонение границы раздела жидкости и льда от её равновесного положения $z = 0$ через $\eta = \eta(x, y, t)$. Волны на поверхности льда будем рассматривать как малые по амплитуде относительно их длин. Тогда граничные условия на границе раздела $z = 0$ примут вид [1]:

$$\Phi_t + g\eta - C\Delta_- \eta + B\Delta_-^2 \eta + A\eta_{tt} = 0, \eta_t = \Phi_z, \tag{2}$$

где $\Delta_- = \partial_{xx} + \partial_{yy}$ — горизонтальный оператор Лапласа, g — ускорение свободного падения, A, B, C — постоянные коэффициенты, зависящие от упругих свойств льда, его плотности и толщины, определяемые выражениями:

$$A = \frac{\rho_1 h}{\rho_0}, B = \frac{Eh^3}{12\rho_0(1-\nu^2)}, C = \frac{\sigma_{11} h}{\rho_0}, \tag{3}$$

где ρ_0 — плотность воды, ρ_1 — плотность льда, h — толщина льда, E — модуль Юнга льда, ν — коэффициент Пуассона льда, σ_{11} — начальное напряжение льда. В морских условиях эти величины имеют следующие характерные значения:

$$\rho_0 = 1025 \text{ кг/м}^3, \ \rho_1 = 0,9\rho_0, \ E = 3 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2,$$
$$\nu = 0,3, \ \sigma_{11} = 10^5 \text{ Н/м}^2.$$

Введем цилиндрическую систему координат (r, φ, z) так, чтобы ось z проходила через источник. Тогда, в силу цилиндрической симметрии источника поля скорости, ни одна из величин, возникающих в задаче, не будет зависеть от полярного угла φ. В предположении, что источник начинает свою работу в невозмущенной среде, следуя общим подходом статей [6-7,17], с помощью преобразования Ханкеля из решения задач (1) и (2) можно найти выражение для возникающего на ледяном покрове возмущения:

$$\eta(r,t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{ch}\left[(L-l)k\right]J_0(rk)k}{\left(1+Ak\mathrm{th}(Lk)\right)\mathrm{ch}(Lk)}\int_{-\infty}^{t}Q(\tau)\cos\left[\omega(t-\tau)\right]d\tau dk,$$
$$\omega=\sqrt{\frac{(g+Ck^2+Bk^4)k\mathrm{th}(Lk)}{1+Ak\mathrm{th}(Lk)}}, \qquad (4)$$

где $J_0(rk)$ — функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

Если предположить, что в момент времени $t=0$ источник выбрасывает объем жидкости W, то интенсивность источника определяется равенством $Q(t)=W\delta(t)$, где $\delta(t)$ — дельта-функция. Тогда возмущения на ледяном покрове при $t>0$ можно найти из выражения:

$$\eta(r,t)=\frac{W}{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{k\mathrm{ch}\left[(L-l)k\right]}{\left(1+Ak\mathrm{th}(Lk)\right)\mathrm{ch}(Lk)}J_0(rk)\cos\left[\omega(t-\tau)\right]dk,$$
$$\omega=\sqrt{\frac{(g+Ck^2+Bk^4)k\mathrm{th}(Lk)}{1+Ak\mathrm{th}(Lk)}}. \qquad (5)$$

Заметим, что при $L\to\infty$ (случай бесконечно глубокой жидкости) формула (5) совпадает с результатами статьи [7].

$$\lim_{L\to\infty}\eta(r,t)=\frac{W}{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{k\exp(-lk)}{1+Ak}J_0(rk)\cos\left[\omega(t-\tau)\right]dk,$$
$$\omega=\sqrt{\frac{(g+Ck^2+Bk^4)k}{1+Ak}}. \qquad (6)$$

Как видно из формулы (5) величина отклонения границы раздела жидкости и льда от равновесного положения $\eta(r,t)$ линейно зависит от объема выбрасываемой жидкости W.

Численное исследование. Для упрощения расчетов примем $W=2\pi$ м^3. На рис. 1 и 2 представлены профили волн на ледяном покрове для случаев: неглубокого дна в моменты времени t, равные 0, 0,1; 0,3; 1 секунд, рассчитанные по формуле (5) для глубины дна $L=5$ м, глубины погружения источника $l=1$ м и толщины льда $h=0,3$м; и глубокого дна — $L=100$ м, $l=10$ м, $h=0,3$ м для моментов t равных 0, 5; 10; 25 секунд.

Как видно из рис. 1 и 2, наибольшее отклонение точки поверхности льда проявляется непосредственно над источником. Как и ожидалось, отклонения в случае неглубокого дна существенно больше.

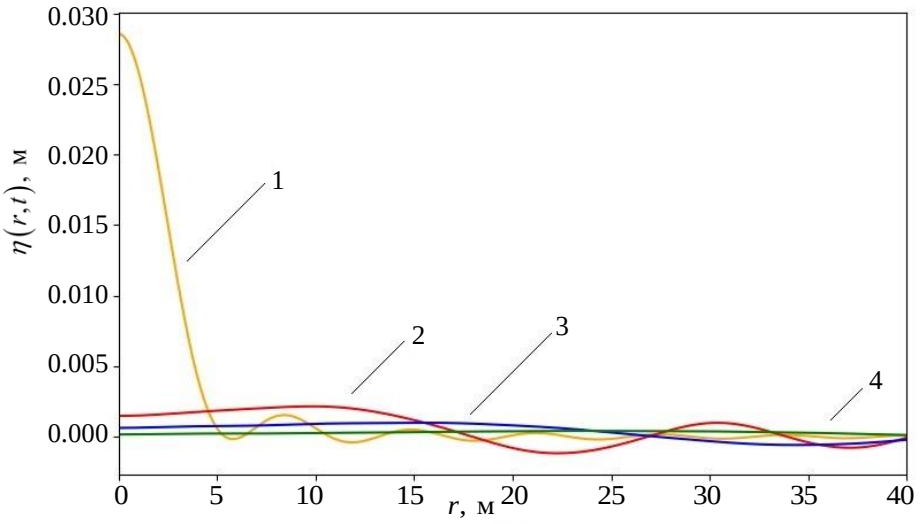


Рис. 1. Профили волн на ледяном покрове в различные моменты времени (мелкая вода) t (с): 1 — $t=0$ с; 2 — $t=0{,}1$ с; 3 — $t=0{,}3$ с; 4 — $t=1$ с

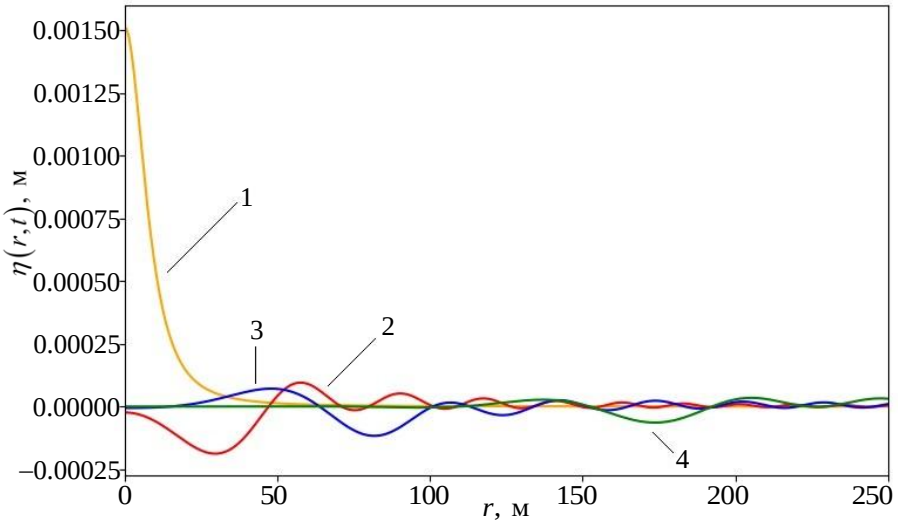


Рис. 2. Профили волн на ледяном покрове в различные моменты времени (глубокая вода) t (с): 1 — $t=0$ с; 2 — $t=5$ с; 3 — $t=10$ с; 4 — $t=25$ с

Максимальное значение отклонения точки поверхности льда, находящейся непосредственно над источником, достигается в начальный момент времени $t=0$ с. Поэтому рассмотрим взаимодействие источника с ледяным покровом, находящимся прямо над источником, т.е. в точке $r=0$ м. Графики зависимостей величины отклонения поверхности льда от равновесного положения $\eta(0,t)$ от времени при глу-

бине источника $l = 10$ м различных характерных значений для моря Лаптевых и Восточно-Сибирского: толщина льда $h = 0,25$ м и глубина дна $L = 570$ м и Баренцева моря: толщина льда $h = 0,7$ м и глубина жидкости $L = 230$ м представлены на рис. 3. Как и ожидалось, максимальное значение отклонения точки поверхности льда достигается в начальный момент времени, после чего совершаются быстро затухающие колебания, и точка стремится к положению равновесия. По результатам численных расчетов можно заключить, что максимальное значение отклонение точки поверхности льда достигается в начальный момент.

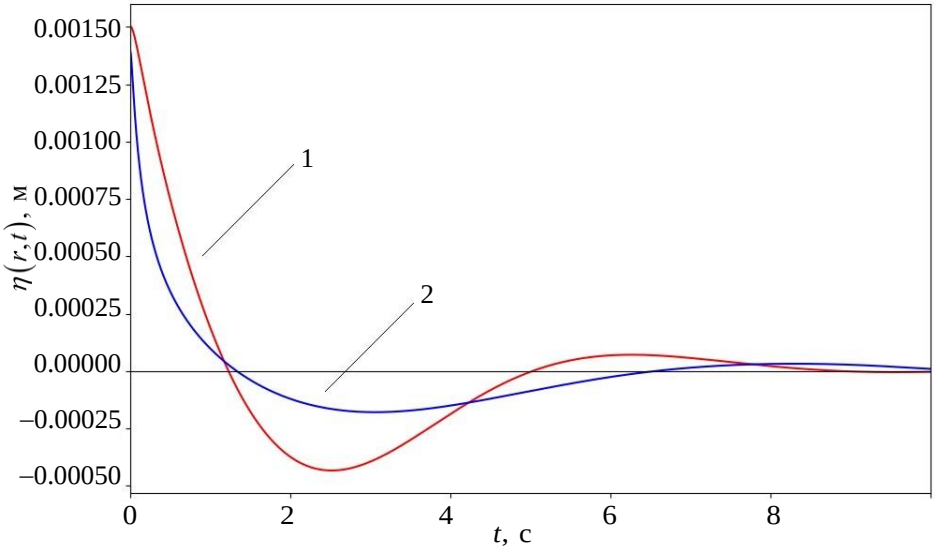


Рис. 3. Зависимость отклонения точки поверхности льда, находящейся непосредственно над источником ($r = 0$ м) от времени t (с) при различных параметрах: 1 — $h = 0,25$ м; $L = 570$ м; 2 — $h = 0,7$ м; $L = 230$ м

Рассмотрим подробнее влияние различных параметров на максимальное отклонение $\eta(0,0)$: на рис. 4 и 5 представлены графики зависимости толщины льда h при различных глубинах погружения источника для случаев малой глубины жидкости ($L = 5$ м — рис. 4) и большой ($L = 100$ м — рис. 5). Из рис. 4 и 5 видно, что отклонения ледяного покрова для случая малой глубины жидкости существенно больше.

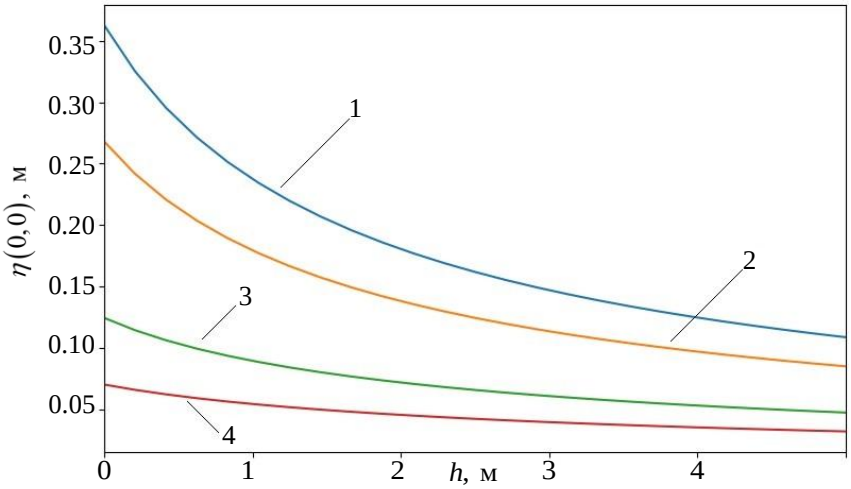


Рис. 4. Зависимость максимального отклонения точки поверхности льда $\eta(0,0)$ (м) от толщины льда h (м) при $L=5$ м и различных глубинах источника: 1 — $l=0,5$ м; 2 — $l=1$ м; 3 — $l=2,5$ м; 4 — $l=5$ м

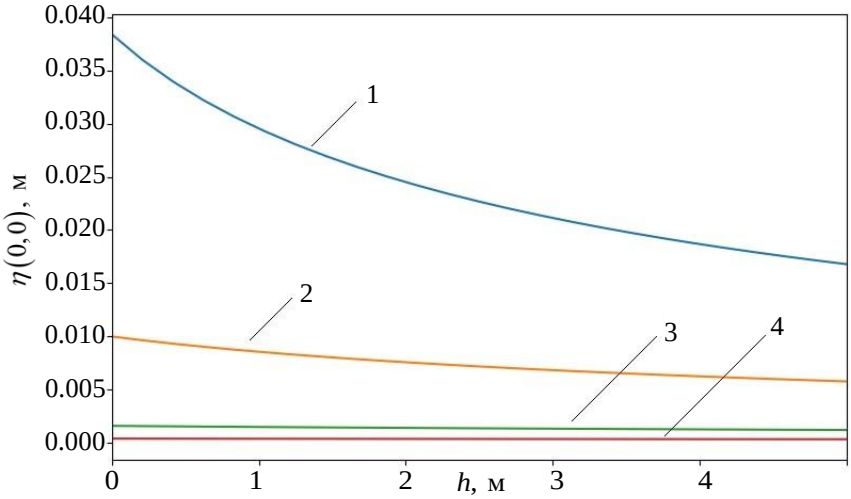


Рис. 5. Зависимость максимального отклонения точки поверхности льда $\eta(0,0)$ (м) от толщины льда h (м) при $L=100$ м и различных глубинах источника: 1 — $l=5$ м ; 2 — $l=10$ м ; 3 — $l=25$ м ; 4 — $l=50$ м

На рис. 6 представлен график зависимости максимального отклонения ледяного покрова от толщины льда h при различных глубинах жидкости ($l=1$ м). Имеется монотонное убывание $\eta(0,0)$ при увеличении толщины льда при всех глубинах источника и жидкости. На рис. 6 видно, что при увеличении глубины жидкости $L\geq 100$ м изменение величины отклонения становится практически незаметным.

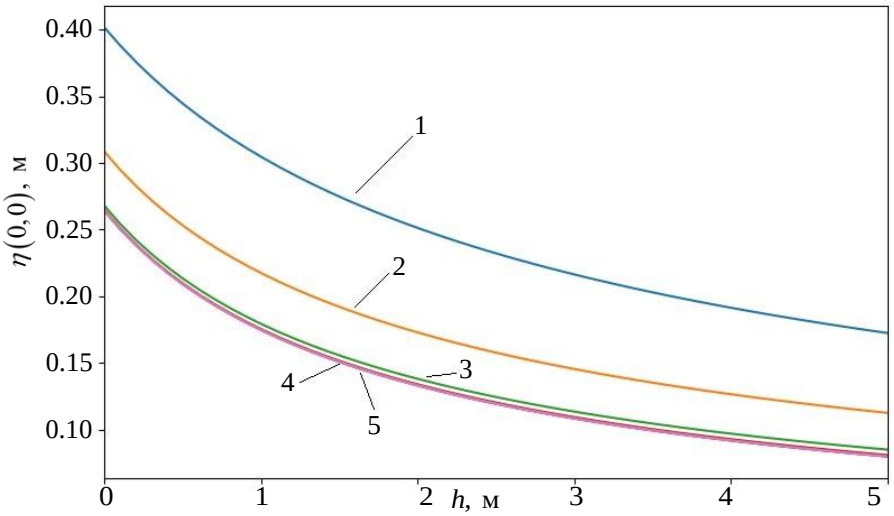


Рис. 6. Зависимость максимального отклонения точки поверхности льда $\eta(0,0)$ (м) от толщины льда h (м) при различных глубинах жидкости:
1 — $L=1$ м; 2 — $L=2{,}5$ м; 3 — $L=50$ м; 4 — $L=100$ м; 5 — $L=300$ м

На рис. 7 приведены графики зависимостей величины максимального отклонения ледяного покрова $\eta(0,0)$ от глубины погружения источника l при различных толщинах льда ($L=100$ м). При глубоком расположении источника ($l \geq 30$ м) различия в максимальных отклонениях становятся незначительны.

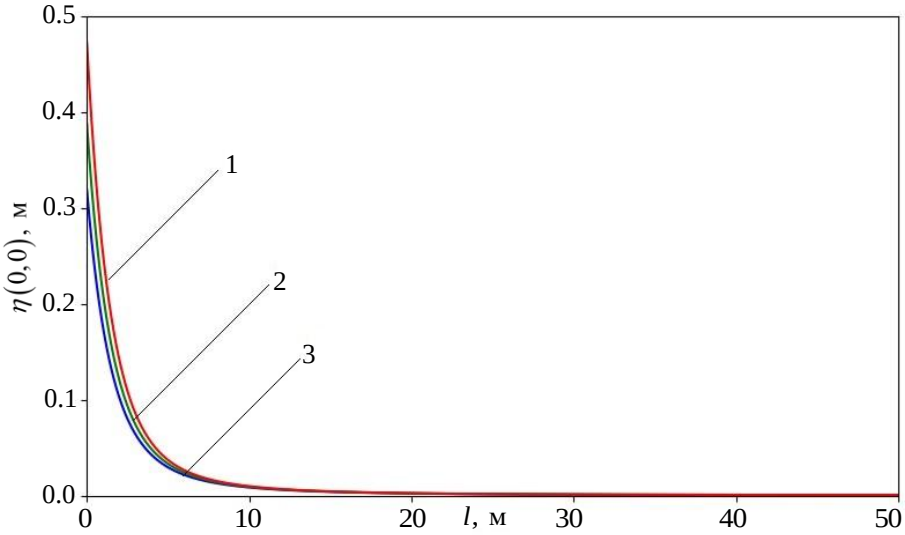


Рис. 7. Зависимость максимального отклонения точки поверхности льда $\eta(0,0)$ (м) от глубины источника l (м) при различных толщинах льда:
1 — $h=1$ м; 2 — $h=0{,}5$ м; 3 — $h=0{,}1$ м

На рис. 8 приведены графики зависимостей величины максимального отклонения ледяного покрова $\eta(0,0)$ от глубины жидкости L при различных толщинах льда ($l=1$ м), видно что уже при $L \geq 10$ м изменения величины максимального отклонения неразличимы.

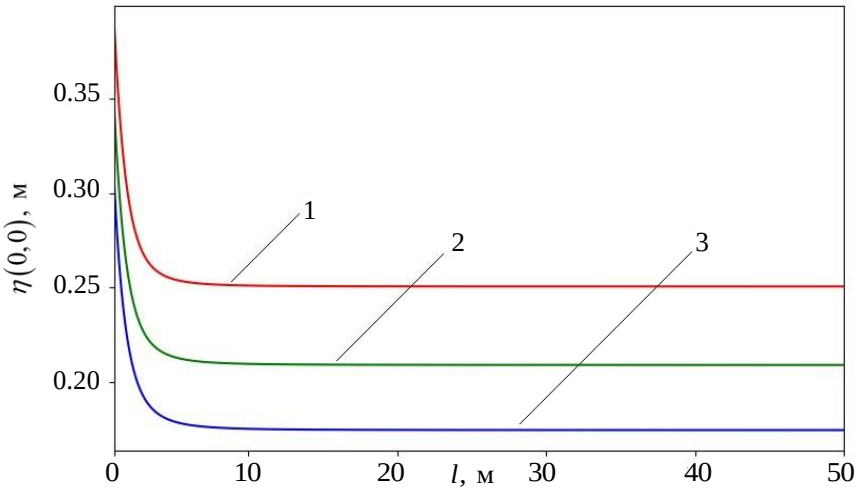


Рис. 8. Зависимость максимального отклонения точки поверхности льда $\eta(0,0)$ (м) от глубины дна L (м) при различных толщинах льда:
1 — $h=1$ м; 2 — $h=0{,}5$ м; 3 — $h=0{,}1$ м

Заключение. Проведенное исследование показало, что максимальное отклонение ледяного покрова наблюдается непосредственно над источником в начальный момент времени, после чего оно быстро затухает. Увеличение толщины льда, глубины погружения источника и глубины жидкости приводит к уменьшению отклонения ледяного покрова от положения равновесия. Существенное влияние на возмущения ледяного покрова оказывает конечность глубины жидкости, что отличает полученные результаты от результатов, полученных ранее в рамках модели жидкости бесконечной глубины.

Полученные результаты могут быть полезны для мониторинга состояния ледяного покрова и разработки методов предотвращения его разрушений, что особенно актуально для судоходства, нефтегазовых платформ и экологической безопасности арктического региона. Кроме того, результаты могут быть применимы при разработке методов идентификации подобных источников, на основе вызываемых ими возмущений ледяного покрова.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ильичев А.Т. *Уединённые волны в моделях гидромеханики*. Москва, Физматлит, 2003, 256 с.

[2] Ламб Г. *Гидродинамика*. Москва, Ленинград, Гостехиздат, 1947, 928 с.

[3] Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. *Теоретическая гидромеханика. Т.1.* Ленинград, Москва, Гостехиздат, 1948, 535 с.

[4] Сретенский Л.Н. *Теория волновых движений жидкости*. Москва, Наука, 1977, 815 с.

[5] Милн-Томпсон Л.М. *Теоретическая гидродинамика*. Москва, Мир, 1964, 660 с.

[6] Савин А.А., Савин А.С. Генерация волн на ледяном покрове пульсирующим в жидкости источником. *Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа*, 2013, № 3, с. 24–30.

[7] Савин А.С., Горлова Н.Е., Струнин П.А. Численное моделирование воздействия точечного импульсного источника в жидкости на ледяной покров. *Математическое моделирование и численные методы*, 2017, № 1, с. 78–90.

[8] Стурова И.В. Движение нагрузки по ледяному покрову с неравномерным сжатием. *Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа*, 2021, № 4, с. 63–72.

[9] Стурова И.В. Задача Коши-Пуассона для жидкости со сдвиговым течением и неравномерно сжатым ледяным покровом. *Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа*, 2022, № 4, с. 69–76.

[10] Стурова И.В. Влияние трещины в ледяном покрове на гидродинамические характеристики погруженного колеблющегося цилиндра. *Прикладная математика и механика*, 2015, т. 79, № 2, с. 251–263.

[11] Стурова И.В. Действие пульсирующего источника в жидкости при наличии сдвигового слоя. *Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа*, 2023, № 4, с. 14–26.

[12] Булатов В.В., Владимиров И.Ю. Силовое воздействие потока бесконечно глубокой жидкости на источник под ледяным покровом. *Фундаментальная и прикладная гидрофизика*, 2023, т. 16, № 3, с. 120–128.

[13] Погорелова А.В., Козин В.М., Земляк В.Л. Движение тонкого тела в жидкости под плавающей пластиной. *Прикладная математика и техническая физика*, 2012, т. 53, № 1. с. 32-44.

[14] Булатов В.В., Владимиров И.Ю. Фазовая структура волновых возмущений, возбуждаемых пульсирующим источником на поверхности раздела потока жидкости конечной глубины и ледяного покрова. *Прикладная математика и механика*, 2024, т. 88, № 3, с. 392–405.

[15] Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Юрин Ю.В. Асимптотическая теория термоползучести многослойных тонких пластин. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 4, с. 18–36.

[16] Димитриенко Ю.И., Юрин Ю.В. Конечно-элементное моделирование напряженно-деформированного состояния горных пород с учетом ползучести. *Математическое моделирование и численные методы*, 2015, № 3, с. 101–118.

[17] Савин А.С., Сидняев Н.И., Теделури М.М. Исследование воздействия подводного взрыва на ледовый покров. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2021, № 2 (110). DOI: 10.18698/2308-6033-2021-2-2052

Статья поступила в редакцию 29.03.2025

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Савин А.С., Конев К.М. Численное моделирование воздействия на ледяной покров точечного импульсного источника в жидкости конечной глубины. *Математическое моделирование и численные методы*, 2025, № 3, с. 3–14.

Савин Александр Сергеевич — д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры «Высшая математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: savinas@bmstu.ru

Конев Кирилл Михайлович — магистр кафедры «Высшая математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Numerical modeling of the impact of a point impulse source in a finite-depth fluid on the ice cover

© A.S. Savin, K.M. Konev

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

This paper considers the three-dimensional problem of ice cover perturbation caused by a point impulse source localized in a finite-depth fluid. A numerical study was conducted to investigate ice cover disturbances of varying thicknesses caused by sources at different depths. Particular attention was paid to the disturbances occurring directly above the source.

***Keywords**: fluid with ice cover, point source, ice cover disturbances*

REFERENCES

[1] Il'ichev A.T. *Uedinyonnye volny v modelyah gidromekhaniki* [Solitary waves in fluid mechanics models]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2003, 256 p.

[2] Lamb G. *Gidrodinamika* [Hydrodynamics]. Moscow, Gostekhizdat Publ., 1947, 928 p.

[3] Kochin N.E., Kibel' I.A., Roze N.V. *Teoreticheskaya gidromekhanika. T.1* [heoretical hydromechanics. Vol.1.]. Leningrad, Moscow, Gostekhizdat Publ., 1948, 535 p.

[4] Sretenskij L.N. *Teoriya volnovyh dvizhenij zhidkosti* [Theory of wave motions of liquid]. Moscow, Nauka Publ., 1977, 815 p.

[5] Miln-Tompson L.M. *Teoreticheskaya gidrodinamika* [Theoretical hydrodynamics]. Moscow, MIR Publ., 1964, 660 p.

[6] Savin A.A., Savin A.S. Waves generated on an ice cover by a source pulsating in fluid. *Fluid Dynamics*, 2013, vol. 48, no. 3, pp. 303 - 309.

[7] Savin A.S., Gorlova N.E., Strunin P.A. Numerical simulation of the point pulse source impact in a liquid on the ice cover. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2017, no. 1(13), pp. 78–90.

[8] Sturova I.V. Motion of a Load over an Ice Sheet with Non-Uniform Compression. *Fluid Dynamics*, 2021, vol. 56, no. 4, pp. 503–512.

[9] Sturova I.V. The Cauchy–Poisson Problem for Fluid with Shear Current and Non-Uniformly Compressed Ice Cover. *Fluid Dynamics*, 2022, vol. 57, no. 4, pp. 486–493.

[10] Sturova I.V. The effect of a crack in an ice sheet on the hydrodynamic characteristics of a submerged oscillating cylinder. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2015, vol. 79, no. 2, pp. 251–263.

[11] Sturova I.V. Action of a Pulsating Source in a Fluid in the Presence of a Shear Layer. *Fluid Dynamics*, 2023, vol. 58, no. 4, pp. 14–26.

[12] Bulatov V.V., Vladimirov I. Yu. Force impact of a flow an infinitely deep liquid

on a source under ice cover. *Fundamental and Applied Hydrophysics*, 2023, vol. 16, no. 3, pp. 120–128.

[13] Pogorelova A.V., Kozin V.M., Zemlyak V.L. Motion of a slender body in a fluid under floating plate. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2012, vol. 53, no. 1. pp. 32-44.

[14] Bulatov V.V., Vladimirov I. Yu. The phase structure of wave disturbances excited by a pulsating source at the interface of a liquid flow of finite depth and an ice sheet. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2024, vol. 88, no. 3, pp. 392–405.

[15] Dimitrienko Y.I., Gubareva E.A., Yurin YU.V. Asymptotic theory of themocreep for multilayer thin plates. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2014, no. 4(4), pp. 18–36.

[16] Dimitrienko Y. I., Yurin Y. V. Finite element simulation of the rock stress-strain state under creep. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2015, no. 3(7), pp. 101–118.

[17] Savin A.S., Sidnyaev N.I., Tedeluri M.M. Study of the underwater explosion impact on the ice cover. *Engineering Journal: Science and Innovation*, 2021, no. 2 (110). DOI: 10.18698/2308-6033-2021-2-2052

Savin A.S., Dr. Sc. (Phys.-Math.), Professor, Department of Higher Mathematics at the Bauman Moscow State Technical University. e-mail: savinas@bmstu.ru

Konev K.M., Master's Degree student, Department of Higher Mathematics at the Bauman Moscow State Technical University