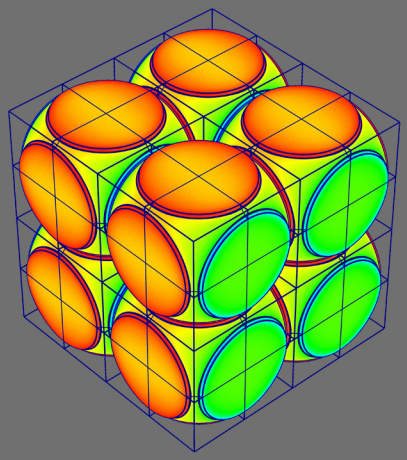
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Носенко Н.А., Харченко Н.А. Определение газодинамических параметров сверхзвуковой горячей струи в ходе процедуры валидации вычислительной схемы с использованием RANS подход. Математическое моделирование и численные методы, 2025, № 2, с. 102–129.

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/377/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.217.61
09.11.2026 04:41:46

УДК 533.6.011.5 DOI: 10.18698/2309-3684-2025-2-102129

Определение газодинамических параметров сверхзвуковой горячей струи в ходе процедуры валидации вычислительной схемы с использованием RANS подхода

© Н.А. Носенко, Н.А. Харченко

МАИ, Москва, 125993, Россия

В данной работе представлена валидационная задача численного определения газодинамических параметров при сверхзвуковом истечении турбулентной горячей струи в затопленное пространство. В основе используемой вычислительной схемы лежит модифицированная в части определения члена генерации турбулентности двухпараметрическая модель Ментера, дополненная поправкой на сжимаемость Саркара с корректировкой на малые значения турбулентного числа Маха. Проводится сравнение газодинамических параметров течения вдоль оси струи с экспериментальными данными Сейнера и результатами численного моделирования других авторов. Модель турбулентности k-ω SST с модифицированной поправкой на сжимаемость Саркара демонстрирует лучшее согласие с результатами экспериментальных данных, чем модели турбулентности со стандартным вариантом данной поправки.

Ключевые слова: *сверхзвуковое моделирование, турбулентные течения, поправка на сжимаемость, вычислительная аэрогазодинамика, неструктурированные сетки*

Введение. Современные технологии проектирования высокоскоростных летательных аппаратов сложной конфигурации достигли высокого уровня развития. Дальнейшее усовершенствование, касающееся распространения шума или расхода топлива, становится все более сложной задачей. Если несколько десятилетий назад получение и оценка экспериментальных данных были основной частью процесса разработки авиационного двигателя, то сегодня существенная часть разработки проводится с использованием современных методов численного моделирования. Несмотря на использование современных суперкомпьютеров, применение методов вычислительной гидродинамики (CFD) ограничено и зависит от сложности решаемой задачи. Средством решения проблемы является доработка и упрощение математических моделей, достоверно описывающих физические процессы в исследуемом классе задач.

Эффективность турбулентного смешения горячего ядра сверхзвуковой струи с холодным спутным потоком играет важную роль с точки зрения генерации шума в окружающем пространстве [1]. Одним из известных подходов в моделировании сжимаемых турбулент-

ных течений является решение системы уравнений Навье – Стокса, осредненной по Фавру. Данный метод (RANS) основывается на осреднении газодинамических параметров течения по времени, что приводит к появлению дополнительных слагаемых, связанных с пульсационными составляющими параметров потока. В связи с этим требуется использовать дополнительные соотношения для замыкания получаемой системы дифференциальных уравнений. На данный момент для решения данной проблемы широко распространенным методом является использование моделей турбулентности, основанных на гипотезе Буссинеска.

В целом можно сказать, что RANS модели, основанные на гипотезе Буссинеска, переоценивают скорость затухания слоев смешения в задачах истечения сверхзвуковых струй в затопленное пространство. Эта проблема возрастает в случае наличия больших градиентов температур в слоях смешения, не позволяя корректно описать поля в турбулентных течениях [2-7]. Одной из первопричин является то, что указанные выше стандартные модели турбулентности создавались в предположении несжимаемых потоков. Таким образом, величины турбулентных пульсаций плотности, связанные с эффектами сжимаемости, в осредненных по Фавру уравнениях считаются пренебрежимо малыми.

Как указано в работе [8], основной эффект сжимаемости – это уменьшение производства энергии турбулентности и увеличение анизотропии напряжений Рейнольдса в слоях смешения. Рабочим, но не совершенным методом решения данной проблемы является использование поправок на сжимаемость [9-11]. Применение таких поправок позволяет замкнуть систему дифференциальных уравнений в части описания слагаемых, связанных со сжимаемой диссипацией. Однако остается проблема учета влияния дополнительных эффектов на генерацию турбулентности в течениях с интенсивным нагревом потока.

Томас и Сейнер в своих работах [4] и [5] показали, что высокие градиенты температуры приводят к более интенсивному перемешиванию потока в слоях смешения. Несколько авторов в работах [12-14] пытались улучшить прогнозирование поля течения в высокоскоростных струях, где требовался учет высокотемпературных эффектов. Они изменяли как коэффициенты в моделях, так и сами члены в уравнениях, описывающих перенос турбулентных параметров. Однако такие модификации уравнений могут привести к снижению точности прогнозирования течения для других задач. Абдоль Хамид [15] выбрал более общий подход. На основе эмпирических данных была предложена модификация хорошо известной модели турбулентности $k-\varepsilon$ [16]. Идея модификации данной модели заключается в увеличении турбулентной вязкости в области больших градиентов темпе-

ратуры для усиления интенсивности турбулентного смешения. В областях, где градиент температуры торможения становится достаточно низким, например, в пограничном слое при отсутствии теплообмена со стенкой, модель турбулентности возвращается к своему первоначальному виду.

Модификация Абдоль Хамида нашла развитие в работах и других авторов. Зегелер предложил [17] использовать поправку на температуру совместно с моделью Ментера $k-\omega$ SST [18], поскольку данная модель турбулентности хорошо зарекомендовала себя при решении достаточно большого количества задач аэрогазодинамики. Трумнер в работах [19-21] представил свой вариант поправки, а также применил ее в моделях турбулентности, основанных на решении дифференциальных уравнений переноса касательных напряжений Рейнольдса (DRSM). В тоже время Алама интересовало истечение холодной струи в нагретое пространство [22], [23]. Он предложил вариант модификации поправки Абдоль Хамида для решения такого типа задач.

Все вышеприведенные работы, как экспериментальные, так и выполненные с использованием инструментов численного моделирования, позволяют оценить надежность и точность вычислительных схем, описывающих газодинамические параметры в интересующих областях струйных течений, которые характеризуются высокотемпературными эффектами.

В данной работе проводилось сравнение результатов численного моделирования с экспериментальными данными Сейнера и с результатами расчетов других авторов. Используемая вычислительная схема включает в себя модифицированную модель турбулентности Ментера, которая дополнена поправкой на сжимаемость Саркара с корректировкой на малые значения турбулентного числа Маха.

Математическая постановка задачи. Расчеты турбулентного истечения сверхзвуковой горячей струи из осесимметричного сопла проводились с использованием компьютерного кода ГАЛА, который является вариантом модификации программного решения ГРАТ [24-26], численно решающего трехмерную нестационарную систему уравнений движения вязкого теплопроводного газа, дополненную двухпараметрической RANS моделью турбулентности Ментера $k-\omega$ SST [18] с поправкой на сжимаемость, предложенной Саркаром [9]. Система уравнений Навье – Стокса, выражающая законы сохранения массы, импульсов и полной энергии, записывается в следующем виде:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u_j)}{\partial x_j}=0;$$

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j}+\frac{\partial p}{\partial x_i}=\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j},\quad i=1,2,3; \tag{1}$$

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u_j E)}{\partial x_j}+\frac{\partial(p u_j)}{\partial x_j}=\frac{\partial(u_i\tau_{ij}-q_j)}{\partial x_j},$$

где ρ — плотность, кг/м^3; p — давление, Па; E — полная энергия, отнесенная к единице массы, Дж/кг; t — время, с; u_i — компоненты вектора скорости, м/с; x_i – компоненты пространственной координаты, м; q_i — компоненты вектора теплового потока, Вт/м^2; τ_{ij} — компоненты тензора напряжений, Па. Здесь и далее используется соглашение Эйнштейна о суммировании по повторяющимся индексам.

В задачах сверхзвукового моделирования, не требующих учета физико-химических процессов в газе, решаемая система уравнений замыкается термическим и калорическим уравнениями состояния.

В случае исследования поведения рабочего газа – воздуха при температуре до 1500 К можно использовать уравнение идеального газа с постоянными значениями теплоемкостей (совершенный газ) [27]. Термическое уравнение состояния в данном случае имеет вид:

$$\frac{p}{\rho}=(\gamma-1)e,\ \gamma=\frac{c_p}{c_V}=1.4, \tag{2}$$

где γ — показатель адиабаты; c_p, c_V — удельные теплоемкости при постоянном давлении и объеме, Дж/(кг·К); e — удельная внутренняя энергия, Дж/кг, а калорическое уравнение состояния принимает форму:

$$e=c_V T, \tag{3}$$

при этом удельная энергия определяется как:

$$E=e+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}u_i^2. \tag{4}$$

Для замыкания системы уравнений газовой динамики, описывающей турбулентное движение, в данной работе используется вариант модели, в основе которого лежат дифференциальные уравнения переноса кинетической энергии турбулентности k (м^2/с^2) и удельной скорости диссипации турбулентных пульсаций ω (1/с) с дополнительными членами, учитывающими влияние сжимаемости течения.

Компоненты тензора напряжений и вектора теплового потока в модели турбулентности Ментера определяются как:

$$\tau_{ij} = 2\mu\left(S_{ij} - \frac{1}{3}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\delta_{ij} \right), \quad q_i = -\lambda\frac{\partial T}{\partial x_i}, \quad S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right); \qquad (5)$$
$$\mu = \mu_L + \mu_T, \quad \lambda = \lambda_L + \lambda_T,$$

где T — температура, К; μ — эффективная динамическая вязкость, Па·с; λ — эффективный коэффициент теплопроводности, Вт/(м·К); S_{ij} — тензор скоростей деформации, 1/с; δ_{ij} — символ Кронекера; $(.)_L$ и $(.)_T$ — ламинарная (молекулярная) и турбулентная составляющие эффективного параметра.

Текущая модель турбулентности содержит в себе адаптированную под задачи с дозвуковыми областями течения поправку Саркара, позволяющую ограничить влияние сжимаемости, где числа Маха невелики, и записывается следующим образом [11], [28]:

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j k)}{\partial x_j} = P - \beta_k \rho\omega k\left[1 + \alpha_1 M_T^2 (1 - F_1)\right] + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu_L + \sigma_k \mu_T \frac{\partial k}{\partial x_j} \right);$$
$$\frac{\partial(\rho\omega)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j \omega)}{\partial x_j} = P\frac{\eta\rho}{\mu_T} - \beta_\omega \rho\omega^2 + (1 - F_1)\beta_k \alpha_1 M_T^2 \rho\omega^2 + \qquad (6)$$
$$+ \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu_L + \sigma_\omega \mu_T \frac{\partial\omega}{\partial x_j} \right) + 2(1 - F_1)\frac{\partial k}{\partial x_j}\frac{\partial\omega}{\partial x_j}\frac{\rho\sigma_{\omega 2}}{\omega};$$
$$M_T^2 = \max(M_t^2 - M_{t_0}^2, 0), \quad M_{t_0}^2 = 0.01,$$

где μ_T определяется соотношением:

$$\mu_T = \frac{ak\rho}{\max(a\omega, SF_2)}. \qquad (7)$$

Модифицированный член генерации турбулентности P с учетом сжимаемости имеет вид:

$$P = \min\left\langle \mu_T\left[\Omega^2 F_1 + S^2(1 - F_1) \right], 10\beta_k \rho\omega k \right\rangle;$$
$$S^2 = 2S_{ij}S_{ij} - \frac{2}{3}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)^2, \quad \Omega^2 = 2\Omega_{ij}\Omega_{ij}, \quad \Omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \qquad (8)$$

где F_1 — функция смешения Ментера в модели $k-\omega$ SST, а Ω_{ij} — тензор завихренности, 1/с.

Как можно видеть, в уравнении для генерации турбулентности присутствует тензор завихренности Ω_{ij} с функцией смешения F_1, что отсутствует в оригинальной модели Ментера [18]. Предполагается,

что данная модификация привносит в модель турбулентности эффект уменьшения физически необоснованной генерации турбулентной вязкости в областях с наличием разрывов и торможения потока [29].

Функции F_1 и F_2 определяются как:

$$\begin{gathered} F_1 = \tanh\left(\arg_1^4\right), \quad F_2 = \tanh\left(\arg_2^2\right); \\ \arg_1 = \min\left[\max\left(\frac{\sqrt{k}}{\beta_k \omega d}, \frac{500\mu_L}{\rho\omega d^2}\right), \frac{4\rho\sigma_{\omega_2} k}{CD_{k\omega} d^2}\right]; \\ \arg_2 = \max\left(\frac{2\sqrt{k}}{\beta_k \omega d}, \frac{500\mu_L}{\rho\omega d^2}\right); \\ CD_{k\omega} = \max\left(2\rho\sigma_{\omega_2}\frac{1}{\omega}\frac{\partial k}{\partial x_j}\frac{\partial \omega}{\partial x_j}, 10^{-10}\right), \end{gathered} \tag{9}$$

где d — кратчайшее расстояние до стенки, м.

Квадрат турбулентного числа Маха M_t записывается как:

$$M_t^2 = \frac{2k}{\gamma p / \rho}. \tag{10}$$

Константы модели турбулентности определяются через функцию смешения:

$$\begin{gathered} \varphi(\sigma_k, \sigma_\omega, \beta_\omega, \eta) = F_1\varphi_1 + (1 - F_1)\varphi_2; \\ \sigma_{k1} = 0.85, \quad \sigma_{\omega 1} = 0.5, \qquad \beta_{\omega 1} = 0.075, \qquad \eta_1 = 0.55; \\ \sigma_{k2} = 1.0, \qquad \sigma_{\omega 2} = 0.856, \quad \beta_{\omega 2} = 0.0828, \quad \eta_2 = 0.44, \end{gathered} \tag{11}$$

где остальные величины:

$$\beta_k = 0.09, \quad a = 0.31, \quad \alpha_1 = 1. \tag{12}$$

Для расчета свойств переноса, коэффициентов вязкости и теплопроводности, используются соотношения:

$$\begin{gathered} \mu_L = C\frac{T^{3/2}}{T + 110.4}, \quad C = 1.458 \cdot 10^{-6} \text{ кг}/\left(\text{м} \cdot \text{с} \cdot \text{К}^{1/2}\right); \\ \lambda = c_p\left(\frac{\mu_L}{\text{Pr}} + \frac{\mu_T}{\text{Pr}_T}\right), \quad c_p = \frac{\gamma}{(\gamma - 1)}R, \end{gathered} \tag{13}$$

где $Pr = 0.72$ — число Прандтля; $Pr_T = 0.9$ — турбулентное число Прандтля; $R = 286.7$ — газовая постоянная воздуха, Дж/(кг·К).

Численный алгоритм решения задачи. Численный алгоритм построен на реализации метода контрольного объема с использова-

нием неструктурированных сеток [30], [31], где в качестве контрольных объемов выступают: тетраэдры, пирамиды и треугольные призмы.

Определение свойств данных геометрических фигур проводится путем разбиения объемных и плоских объектов на тетраэдры и треугольники. Центры масс элементов неструктурированных сеток вычисляются с помощью средневзвешенного значения:

$$\overline{r} = \frac{\sum_{j=1}^{N} \overline{r}_j f_j}{\sum_{j=1}^{N} f_j}, \tag{14}$$

где $\overline{r}$ — радиус-вектор, определяющий положение центров масс объемных и плоских геометрических объектов; $\overline{r}_j$ — радиус-вектор, определяющий положение центров масс составных частей соответствующего геометрического объекта; f_j — составная часть объема или площади геометрического объекта.

Численное интегрирование системы уравнений газовой динамики проводилось с использованием модифицированного метода AUSM+ [32]. Используемый для численного интегрирования метод AUSM+ является методом расщепления потоков на конвективную и акустическую составляющие в зависимости от числа Маха. Такой подход является альтернативой методам, основанным на идеи вычисления потоков через грани конечного объема из решения задачи о распаде произвольного разрыва, предложенной С.К. Годуновым [33].

Численный поток методом AUSM+ определяется из соотношения [34]:

$$\begin{gathered} F_{AUSM} = \begin{cases} \mathrm{w}_L M_{1/2}\, \mathrm{c}_{1/2} + \Phi_L, & M_{1/2} \geq 0; \\ \mathrm{w}_R M_{1/2}\, \mathrm{c}_{1/2} + \Phi_R, & M_{1/2} < 0, \end{cases} \\ \mathrm{w}_{L/R} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u_i \\ \rho E \end{pmatrix}, \quad \Phi_{L/R} = \begin{pmatrix} 0 \\ P_{1/2} \cdot n_i - P_i \\ p M_{1/2}\, \mathrm{c}_{1/2} \end{pmatrix}, \quad i = 1,2,3, \end{gathered} \tag{15}$$

где n_i — компонента единичного вектора внешней нормали.

Расщепление потока на вклады конвекции и давления выражается посредством представления числа Маха в виде двух состояний:

$$\begin{gathered} M_{1/2} = M_L^{+} + M_R^{-} - M_P; \\ P_{1/2} = P_L^{+} p_L + P_R^{-} p_R. \end{gathered} \tag{16}$$

Конвективная и акустическая составляющие расщепленного потока аппроксимируются полиномами четвертого и третьего порядка:

$$M_{L/R}^{\pm}=\begin{cases}\pm\dfrac{1}{4}\left(M_{L/R}\pm 1\right)^2\pm\dfrac{1}{8}\left(M_{L/R}^2-1\right)^2, & |M_{L/R}|<1;\\ \dfrac{1}{2}\left(M_{L/R}\pm|M_{L/R}|\right), & |M_{L/R}|\geq 1,\end{cases}$$
$$P_{L/R}^{\pm}=\begin{cases}\dfrac{1}{4}\left(M_{L/R}\pm 1\right)^2\left(2\mp M_{L/R}\right)^2, & |M_{L/R}|<1;\\ \dfrac{\left(M_{L/R}\pm|M_{L/R}|\right)}{2M_{L/R}}, & |M_{L/R}|\geq 1.\end{cases} \tag{17}$$

Для сохранения устойчивости численной схемы при расчетах течений с большими числами Маха в выражения для вкладов конвекции и давления добавляются диффузионные слагаемые [35], обеспечивающие дополнительную диффузию для подавления численной неустойчивости сильных ударных волн:

$$M_P=(1-g)(1-\zeta)\frac{p_R-p_L}{(\rho_L+\rho_R)\mathrm{c}_{1/2}^2};$$
$$P_i=\frac{0.75g\left(p_L+p_R\right)}{\mathrm{c}_{1/2}}P_L^{+}P_R^{-}\left(u_{i_R}-u_{i_L}\right),\quad i=1,2,3, \tag{18}$$

где функции g и ζ определяются как:

$$g=\frac{1+\cos\left[\min\left(h_L,h_R\right)\pi\right]}{2},\quad h=\min_j\left(\frac{p_{Lj}}{p_{Rj}},\frac{p_{Rj}}{p_{Lj}}\right);$$
$$\zeta=\frac{1-\cos\left(\pi M\right)}{2},\quad M=\min\left[\max\left(|M_L|,|M_R|\right),1\right]. \tag{19}$$

В результате численных исследований предложено следующее выражение для определения скорости звука, позволяющее увеличить диссипацию путем уменьшения $c_{1/2}$ в области течения, где $|U_{L/R}|>c_{L/R}$:

$$\tilde{c}_{1/2}=\frac{\max\left(|U_L|,c_L\right)+\max\left(|U_R|,c_R\right)}{\max\left(\left|U_L\right|/c_L,1\right)+\max\left(\left|U_R\right|/c_R,1\right)};$$
$$c_{1/2}=\begin{cases}\dfrac{\tilde{c}_{1/2}^2}{\max\left(|U_L|,\tilde{c}_{1/2}\right)}, & U_L+U_R\geq 0;\\ \dfrac{\tilde{c}_{1/2}^2}{\max\left(|U_R|,\tilde{c}_{1/2}\right)}, & U_L+U_R<0,\end{cases} \tag{20}$$
$$M_{L/R}=\frac{U_{L/R}}{\mathrm{c}_{1/2}},\quad U_{L/R}=u_{i_{L/R}}n_i,\quad c_{L/R}=\left(\gamma\frac{p_{L/R}}{\rho_{L/R}}\right)^{1/2}.$$

Для получения более высокого порядка точности численного решения по пространству задается линейное распределение газодинамических параметров внутри ячейки [36]:

$$f_j = f_l + \alpha\left[\frac{\partial f_l}{\partial x}\left(x_j - x_l\right) + \frac{\partial f_l}{\partial y}\left(y_j - y_l\right) + \frac{\partial f_l}{\partial z}\left(z_j - z_l\right)\right], \qquad (21)$$

где α — коэффициент ограничения градиента в центре расчетной ячейки; f_l и f_j — значения функций в центрах расчетной ячейки и ее грани.

Линейная реконструкция проводится по неконсервативным переменным: u, v, w, p, ρ, e, T, k, ω, а значения газодинамических параметров, используемые для вычисления потоков через грани конечного объема, определяются на каждой грани из задаваемого распределения, что приводит к схеме второго порядка в областях, где решение гладкое. Но при этом для сохранения свойства монотонности численной схемы на газодинамических разрывах необходимо использовать ограничитель задаваемого распределения [36].

Коэффициент ограничения α задаваемого распределения вычисляется из соотношения:

$$\alpha_j = \begin{cases} \dfrac{\max\limits_{\eta}\left(f_\eta, f_l\right) - f_l}{f_j - f_l}, & \text{если } f_j - f_l > 0; \\ \dfrac{\min\limits_{\eta}\left(f_\eta, f_l\right) - f_l}{f_j - f_l}, & \text{если } f_j - f_l < 0; \\ 1.5, & \text{если } f_j - f_l = 0, \end{cases} \qquad (22)$$

где с индексами «l» и «η» указаны значения функций в центрах расчетной и соседней ячеек, а с индексом «j» – значения функций, вычисленные в центре j-ой грани.

Но отсутствие дифференцируемости записанной функции-ограничителя приводит к ухудшению монотонности схемы. Обеспечить монотонность численной схемы позволило использование дополнительной дифференцируемой функции-ограничителя [37]:

$$\alpha = \begin{cases} \min\limits_j\left(\alpha_j\right) - \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\min\limits_j\left(\alpha_j\right)}{1.5}\right]^3, & \text{если } \min\limits_j\left(\alpha_j\right) < 1.5; \\ 1, & \text{иначе.} \end{cases} \qquad (23)$$

Для расчета вязких слагаемых необходимо вычислять производные скорости, температуры и турбулентных параметров в центрах

граней конечного объема. Вычисление производных основывалось на численном интегрирование по конечному объему, состоящему из двух смежных ячеек, относительно центра общей грани и является решением следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_l}{\partial x}\sum\limits_{j=1}^{N}\varphi_j \mathrm{X}_j^2 + \dfrac{\partial f_l}{\partial y}\sum\limits_{j=1}^{N}\varphi_j \mathrm{X}_j \mathrm{Y}_j + \dfrac{\partial f_l}{\partial z}\sum\limits_{j=1}^{N}\varphi_j \mathrm{X}_j \mathrm{Z}_j = \sum\limits_{j=1}^{N}\varphi_j \mathrm{X}_j \mathrm{F}_j; \\ \dfrac{\partial f_l}{\partial x}\sum\limits_{j=1}^{N}\varphi_j \mathrm{X}_j \mathrm{Y}_j + \dfrac{\partial f_l}{\partial y}\sum\limits_{j=1}^{N}\varphi_j \mathrm{Y}_j^2 + \dfrac{\partial f_l}{\partial z}\sum\limits_{j=1}^{N}\varphi_j \mathrm{Y}_j \mathrm{Z}_j = \sum\limits_{j=1}^{N}\varphi_j \mathrm{Y}_j \mathrm{F}_j; \\ \dfrac{\partial f_l}{\partial x}\sum\limits_{j=1}^{N}\varphi_j \mathrm{X}_j \mathrm{Z}_j + \dfrac{\partial f_l}{\partial y}\sum\limits_{j=1}^{N}\varphi_j \mathrm{Y}_j \mathrm{Z}_j + \dfrac{\partial f_l}{\partial z}\sum\limits_{j=1}^{N}\varphi_j \mathrm{Z}_j^2 = \sum\limits_{j=1}^{N}\varphi_j \mathrm{Z}_j \mathrm{F}_j, \end{cases} \tag{24}$$

где

$$\mathrm{X}_j = \left(x_j - x_l\right),\ \mathrm{Y}_j = \left(y_j - y_l\right),\ \mathrm{Z}_j = \left(z_j - z_l\right),\ \mathrm{F}_j = \left(f_j - f_l\right);$$
$$\varphi_j = \frac{1}{\mathrm{X}_j^2 + \mathrm{Y}_j^2 + \mathrm{Z}_j^2}. \tag{25}$$

Расчетные соотношения для численного интегрирования решаемой системы уравнений методом конечного объема приведены в работе [25].

Численная реализация граничных условий основана на использование фиктивных ячеек, прилегающих к каждой границе расчетной области. В фиктивных ячейках задаются значения функций, соответствующие типу граничных условий:

– для свободной дозвуковой границы, располагаемой вдали от исследуемой области течения (невозмущенный поток), значения функций в фиктивных ячейках задаются в соответствии с зависимостями в виде инвариантов Римана [38];

– на выходной сверхзвуковой границе значения функций в фиктивных ячейках задаются линейной экстраполяцией переменных из расчетной области;

– в случае выходной границы, имеющей области с числами Маха меньше и больше единицы, используется гибридное граничное условие;

– в соответствии с нормальной скоростью на выходной границе ограничивается возможность наличия обратного потока в расчетную область: проводится смена направления течения на обратное, если скалярное произведение векторов скорости и внешней нормали меньше нуля;

– на границе симметрии обеспечивается условие равенства нулю вектора скорости и нормальных производных. Значения осталь-

ных функций в фиктивных ячейках задаются линейной экстраполяцией переменных из расчетной области;

– на поверхность тела накладываются условия прилипания, постоянное значение удельной диссипации турбулентности и равенство нулю кинетической энергии турбулентности. В случае адиабатной стенки температура в фиктивной ячейке приравнивается значению в прилегающей расчетной ячейке.

Описанный численный метод имеет первый порядок аппроксимации по времени и второй порядок аппроксимации по пространству. Численное интегрирование решаемой системы уравнений газовой динамики проводилось методом установления.

Исходные данные для численного моделирования. Для проведения газодинамических расчетов была создана трехмерная поверхность, которая состояла из осесимметричного сопла, а также крупногабаритной области, соединяемой со срезом сопла, игравшей роль «затопленного» пространства с минимально возможной для получения стабильного численного решения скоростью течения.

Сверхзвуковая часть данного сопла спрофилирована на число Маха 2 методом характеристик [39], являющимся основой методики, описанной в работах [40], [41].

Плавный контур сужающегося дозвукового участка сопла строился по варианту Ветошинского [42] для получения близкого к равномерному профилю скорости в критике:

$$r = r_{кр}\left\{1-\left(1-\frac{r_{кр}^2}{r_{вх}^2}\right)\frac{\left[1-\left(\frac{x}{x_{кр}}\right)^2\right]^2}{\left[1+\frac{1}{3}\left(\frac{x}{x_{кр}}\right)^2\right]^3}\right\}^{-1/2}, \qquad (26)$$

где r — радиальная координата сопла, м; x — осевая координата сопла, м; $r_{вх}$ — радиус цилиндрической части сопла (форкамеры), м; $r_{кр}$ — критический радиус сопла, м; $x_{вх}$ — координата критики сопла, м.

В данной работе к радиусу изоэнтропического контура (радиальной координате r) сверхзвукового участка сопла, получаемого в результате использования метода характеристик, добавлялась толщина вытеснения турбулентного пограничного слоя, определяемая по эмпирической формуле [40]:

$$\frac{\delta^*}{x}\mathrm{Re}_x^{0.2} = \left(0.65+0.35\overline{T}_w\right) f_T(M);$$
$$f_T(M) = 0.046+0.014(M-1)+0.0047(M-1)^2+0.00015(M-1)^3, \qquad (27)$$

где $\delta^* = \delta^*(x)$ — толщина вытеснения турбулентного пограничного слоя, м; x — продольная координата сечения сверхзвукового участка сопла, м; Re_x — безразмерное число Рейнольдса, определяемое по параметрам потока на изоэнтропическом контуре сопла и координате сечения; $M = M(x)$ — число Маха на изоэнтропическом контуре сопла; $\overline{T}_w = \overline{T}_w(x)$ — температурный фактор, $^\circ K$, который вычисляется через отношение температуры стенки в текущем сечении к температуре торможения в форкамере:

$$\overline{T}_w = \frac{T_w}{T_o}, \tag{28}$$

где T_w — температура стенки в сечении, К; T_o — температура торможения в камере сопла, К.

Температура торможения в форкамере при проектировании сопла принималась равной 1366 $^\circ K$, что соответствует условиям эксперимента [5].

Температура стенки приравнивалась к равновесной температуре, которая вычислялась с помощью газодинамических параметров на изоэнтропическом контуре сопла по формуле [43]:

$$T_e = T\left(1 + \sqrt[3]{\mathrm{Pr}}\,\frac{\gamma - 1}{2} M^2\right), \tag{29}$$

где T_e — равновесная температура стенки, К.

Размер критики выбирался исходя из данных эксперимента Сейнера [5]: диаметр выходного сечения D_{jet} равнялся 91.44 мм, а размер критического сечения $D_{кр}$ — 69.53 мм. Диаметр цилиндрической части сопла $D_{вх}$ принимался равным 120 мм. Кромка сопла представляла собой поверхность с прямыми углами и толщиной в 1 мм.

Как отмечают авторы работы [44], в общем случае необходимо добавлять вышеуказанный параметр δ^*, характеризующий турбулентность у стенок сопла, по нормали к стенке. Однако это зависит от метода определения толщины вытеснения и рекомендаций по его использованию. Помимо этого, в работе [44] указано, что подход, связанный с добавлением толщины вытеснения для профилированных сопел с относительно небольшим числом Маха на срезе ($M < 6$), с большой степенью точности позволяет корректно описывать профиль сверхзвукового участка сопла, поскольку для таких режимов течения пограничный слой относительно тонкий.

Для использования граничного условия типа инвариантов Римана на входе в форкамеру требовалась точная информация о характери-

стиках потока. Для этого было сделано предположение, что присутствует равномерное распределение газодинамических параметров.

Однородное по сечению число Маха на входе в сопло определялось исходя из решения трансцендентного уравнения для совершенного газа – воздуха, получаемого по одномерной теории, с применением известных геометрических размеров критического и входного сечений [45]:

$$\left(\frac{r_{вх}}{r_{кр}}\right)^2 = \frac{\left(1+0.2M_{вх}^2\right)^3}{1.73M_{вх}}, \tag{30}$$

где $M_{вх}$ — число Маха на входе в форкамеру, предполагаемое меньше 1.

Значения статических давления и температуры вычислялись по известным формулам для сжимаемого газа [45]:

$$\begin{aligned} \frac{p_o}{p_{вх}} &= \left(1+0.2M_{вх}^2\right)^{3.5}; \\ \frac{T_o}{T_{вх}} &= 1+0.2M_{вх}^2, \end{aligned} \tag{31}$$

где $p_{вх}$ — статическое давление на входе в сопло, Па; p_o — давление торможения в камере сопла, Па; $T_{вх}$ — статическая температура на входе в сопло, К.

Стоит отметить, что давление торможения p_o определялось путем использования известного числа Маха на срезе и значения статического давления p спутного потока, равного атмосферному, исходя из предположения о расчетном режиме работы сопла. Температура торможения в форкамере T_o для исследуемого в данной работе режима считалась заданной и в ходе эксперимента равнялась 1116 К.

Геометрические размеры исследуемого сопла и расчетной области показаны на рис. 1 и 2.

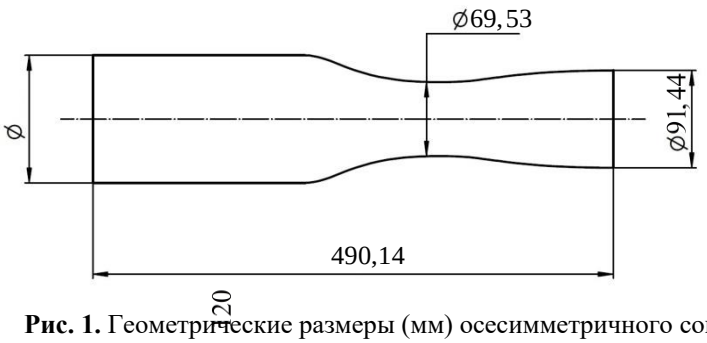


Рис. 1. Геометрические размеры (мм) осесимметричного сопла

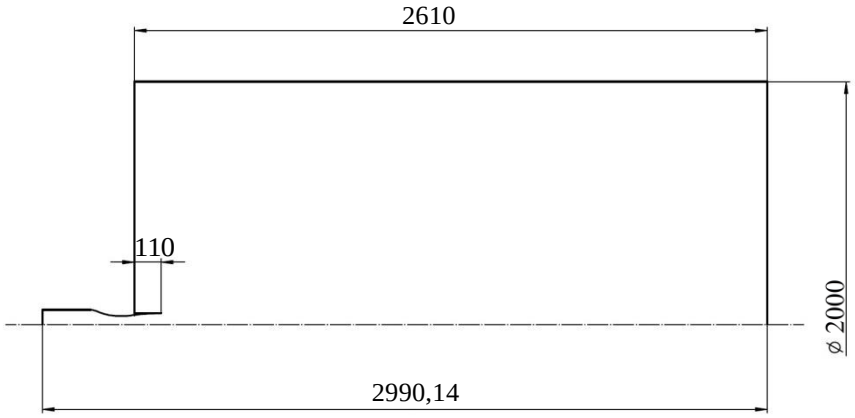


Рис. 2. Габаритные размеры (мм) осесимметричной расчетной области

На стенке сопла задавались граничные условия прилипания и отсутствия турбулентных пульсаций. Вследствие относительно высокой продолжительности эксперимента использовалось условие отсутствия теплообмена на твердых поверхностях.

На входной границе расчетной области вне геометрии сопла применялось граничное условие типа «спутный поток» с небольшим числом Маха для уменьшения времени сходимости и увеличения стабильности расчета. Влияние относительно малой величины данного газодинамического параметра на результаты численного моделирования, как показано в работе [6], минимально. Значения таких статических параметров, как температура и давление, на данной границе соответствовали нормальным условиям.

На остальные границы расчетной области накладывалось смешанное граничное условие.

Начальные условия соответствовали значениям параметров спутного потока.

Исходные данные, используемые для численного моделирования сверхзвуковой горячей турбулентной струи, истекаемой в затопленное пространство из профилированного осесимметричного сопла, представлены в таблице 1.

Таблица 1

Исходные параметры для численного моделирования

Параметры	Давление, кПа	Температура, К	Число Маха
Форкамера	773	1108	0.2
Спутный поток	101	278	0.025

На рис. 3 и 4 представлен вид квазирегулярной неструктурированной расчетной сетки с количеством ячеек 12871077. Такое количество сеточных элементов позволило достичь сходимости решения

по сетке. Структура турбулентной струи, истекающей из осесимметричного сопла, разрешалась с использованием квазирегулярного распределения тетраэдральных ячеек для увеличения точности решения. С поверхности сопла выдавливались призматические элементы с фиксированным коэффициентом роста, что обеспечило безразмерное значение параметра $y^+ < 1$.

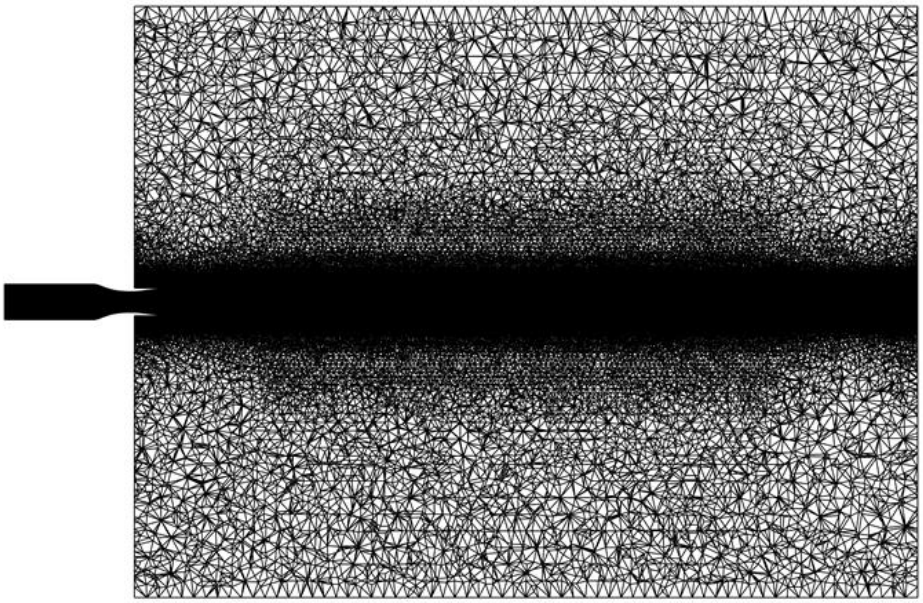


Рис. 3. Вид квазирегулярной сетки расчетной области

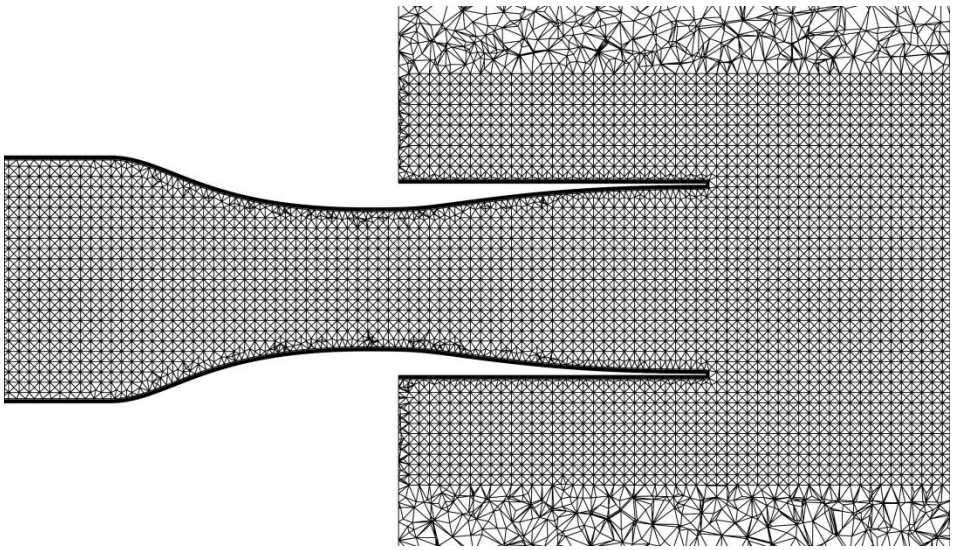


Рис. 4. Увеличенный вид квазирегулярной сетки

В рамках перекрестной верификации приведенной в данной работе вычислительной схемы проводится сравнение газодинамических

параметров течения вдоль оси струи с результатами, полученными компьютерными кодами других авторов:

– FUN3D [7]: стандартная модель Спаларта-Аллмарэса (SA);

– WIND [6]: стандартная низкорейнольдсовая модель Чиена (Chien $k-\varepsilon$) и модель Чиена с поправкой на сжимаемость Саркара (Chien $k-\varepsilon$ S);

– PAB3D [15]: высокорейнольдсовая модель $k-\varepsilon$ Лаундера и Сполдинга с поправками на сжимаемость Саркара и температуру Абдоль Хамида ($k-\varepsilon$ ST).

Валидация текущей модели была основана на сравнении результатов численного моделирования с соответствующими параметрами потока, полученными в ходе эксперимента Сейнера [5].

Результаты численного моделирования. На рис. 5 и 6 представлены пространственные распределения полей течения: числа Маха, температуры и турбулентной вязкости, полученные в результате численного моделирования сверхзвукового истечения турбулентной горячей струи из осесимметричного сопла в затопленное пространство.

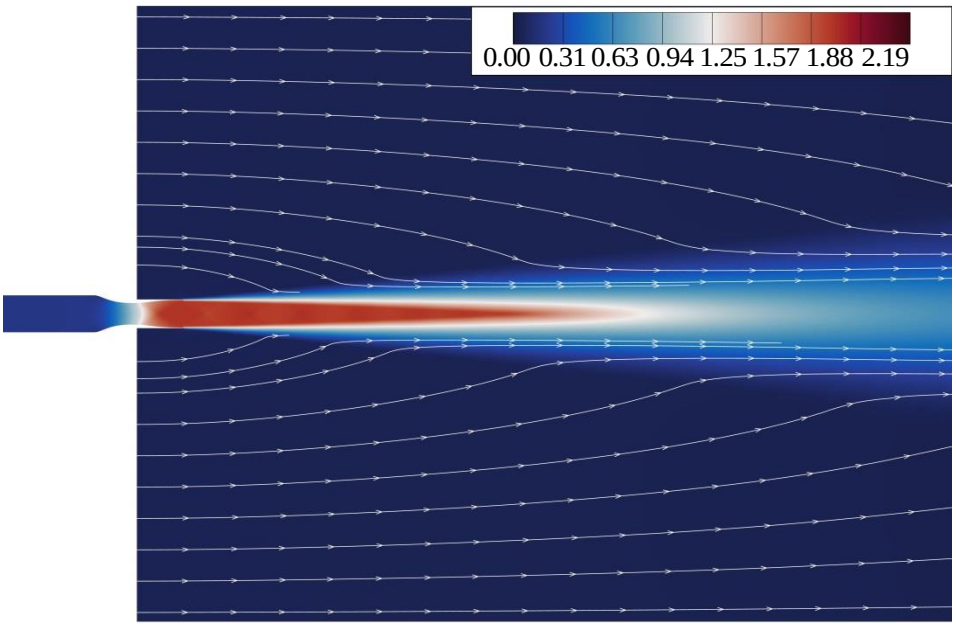
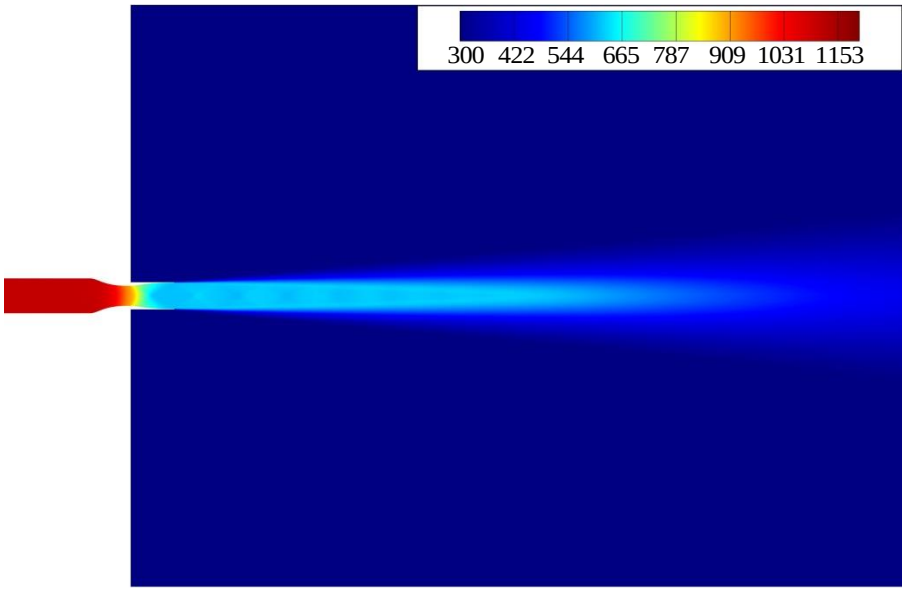


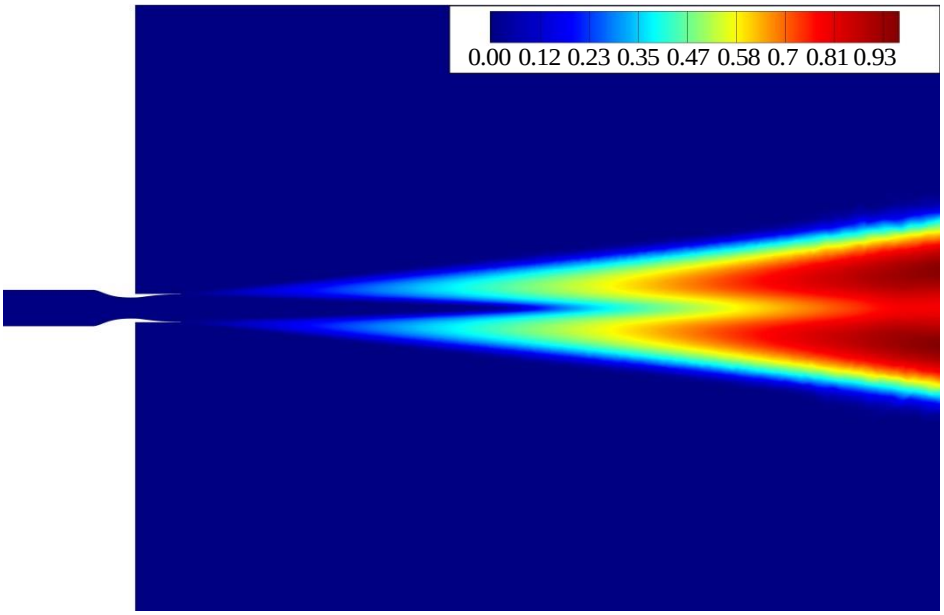
Рис. 5. Пространственное распределение числа Маха с линиями тока

На графиках ниже (рис. 7-9) показаны распределения вдоль оси струи безразмерных газодинамических параметров: числа Маха, продольной компоненты скорости, давления и температуры торможения. Сравнение полученных в данной работе распределений проводится с результатами других авторов и экспериментальными данными Сейнера [5]. Представленные на графиках значения газодинамических

параметров отнесены к соответствующим величинам на срезе сопла. Осевая координата отсчитывалась от выходного сечения и отнесена к величине диаметра среза сопла D_{jet}.

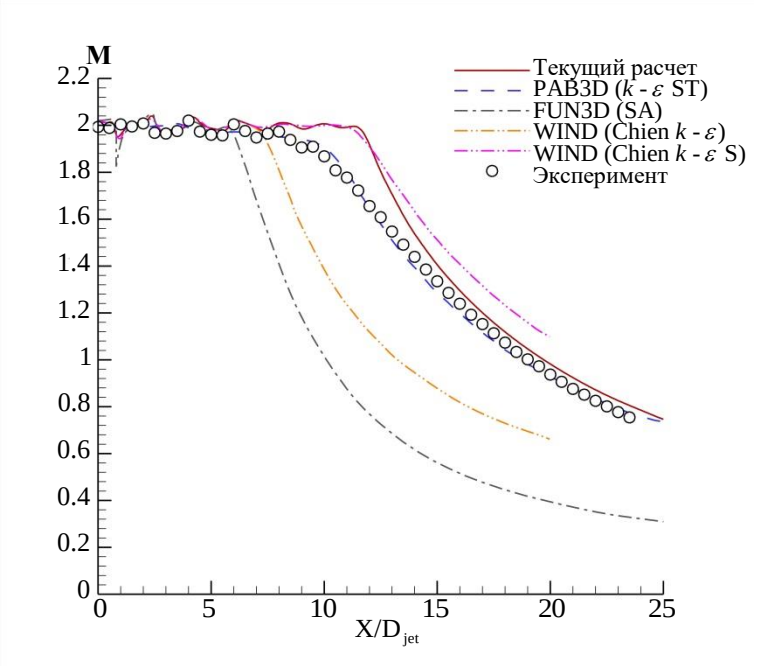


а)

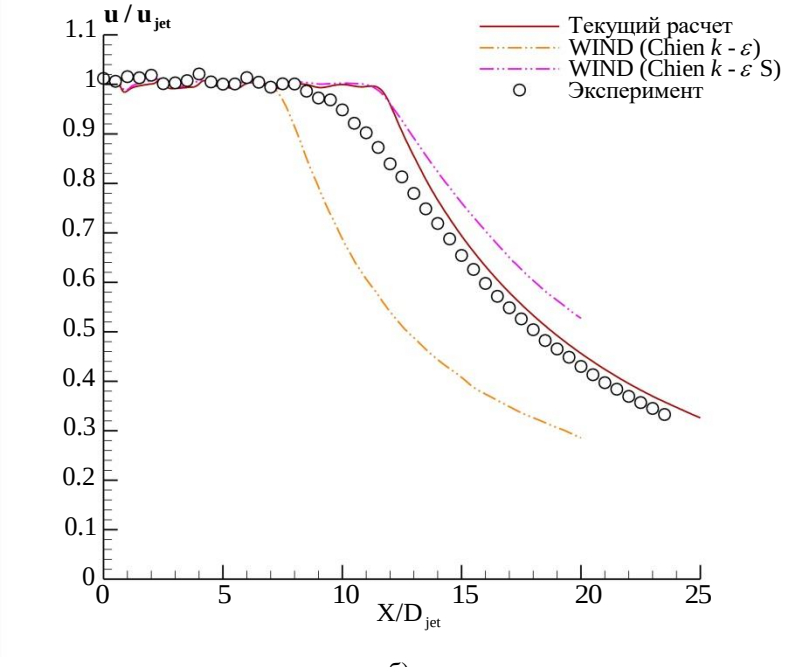


б)

Рис. 6. Пространственные распределения полей течения:
а) – температура (К); б) – турбулентная вязкость (Па·с)

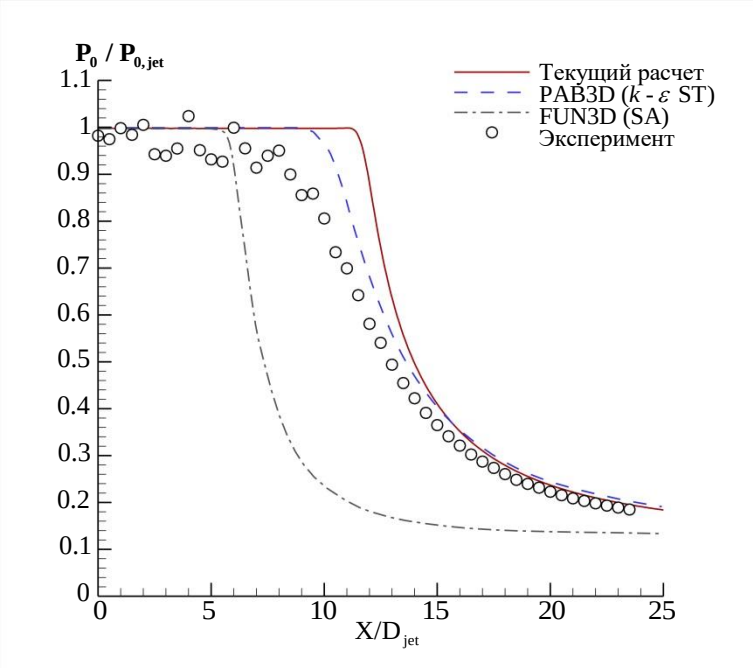


а)

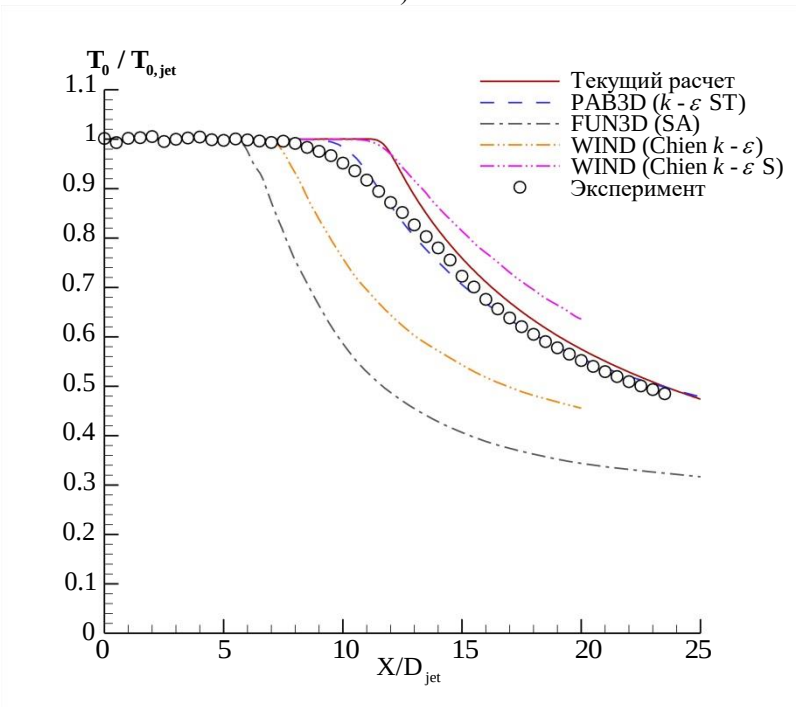


б)

Рис. 7. Распределения безразмерных параметров вдоль оси струи:
а) — число Маха; б) — продольная компонента скорости

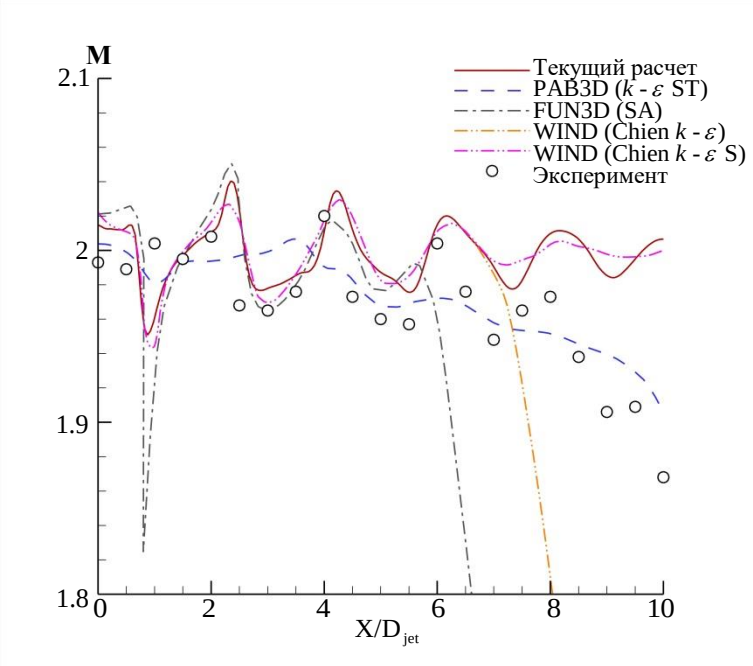


а)

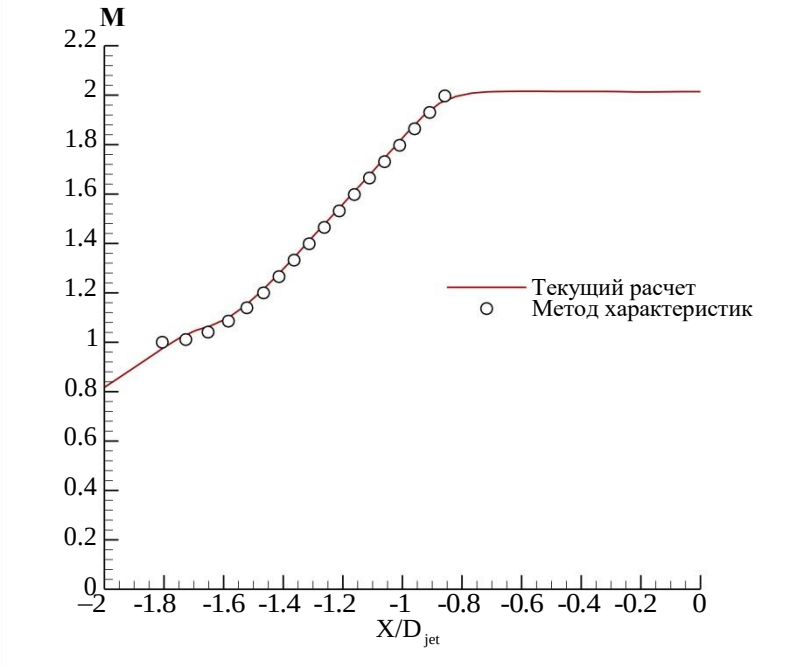


б)

Рис. 8. Распределения безразмерных параметров вдоль оси струи
а) — давление торможения; б) — температура торможения



а)



б)

Рис. 9. Распределение числа Маха вдоль оси симметрии:
а) — в окрестности среза сопла; б) — в сверхзвуковом участке сопла

На рис. 9 дополнительно приведено задаваемое распределение числа Маха, требуемое для профилирования сверхзвукового участка сопла методом характеристик [40], а также его сравнение с аналогичным параметром течения, полученным численно в рамках данной работы.

Как видно на представленных графиках (рис. 7-9), распределения газодинамических параметров, полученные в результате численного моделирования с использованием описанной вычислительной схемы, имеют расхождение при сравнении с экспериментальными данными. Использование одной модифицированной поправки Саркара завышает длину начального участка струи, где осредненные параметры потока по сечению остаются в целом постоянными. Однако поведение представленных на графиках величин вниз по потоку хорошо согласуется с данными экспериментальных исследований.

Сравнение с результатами других авторов в окрестности среза сопла (рис. 9) показало в целом хорошее согласие по расположению пиков в распределении числа Маха, что говорит о сеточной сходимости решения. Однако можно заметить, что вычислительная схема, реализованная в компьютерном коде PAB3D [15], вносит в решение большую диссипацию, тем самым значительно уменьшая амплитуду колебаний в получаемых распределениях.

Проведенный анализ (рис.7-9) показал, что используемая в данной работе модифицированная поправка Саркара дает аналогичный результат по величине длины начального участка струи в сравнении с данными, полученными кодом WIND [6]. Помимо этого, описанная в данной работе вычислительная модель позволяет получить хорошую корреляцию с экспериментальными данными по скорости затухания газодинамических параметров сверхзвуковой горячей струи вниз по потоку. Результаты, полученные другими авторами без использования поправки на сжимаемость, дают существенное отличие при сравнении осевых распределений с экспериментальными данными.

Заключение. В результате проведенных численных исследований турбулентного истечения горячей сверхзвуковой струи из осесимметричного сопла получены пространственные распределения полей газодинамических функций.

Проведенное численное исследование показало хорошее согласие полученных в результате моделирования осевых распределений с экспериментальными данными Сейнера. Вычислительная схема, представленная в данной работе, позволяет получить экспериментальную скорость затухания газодинамических параметров вниз по потоку без использования дополнительной поправки на температуру. Величина длины начального участка струи, где осредненные параметры потока по сечению остаются в целом постоянными, оказалась несколько завышенной, что говорит о необходимости дальнейшей модификации используемой модели турбулентности.

Сравнение с результатами программных решений других авторов показало качественное соответствие по наличию колебаний числа Маха в области начального участка струи. Вариант вычислительной схемы, реализованный в компьютерном коде PAB3D, включающий в себя поправку на температуру Абдоль Хамида, вносит в решение большую диссипацию, тем самым значительно уменьшая амплитуду колебаний в осевых распределениях.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Mundt C., Lieser J. Performance improvement of propulsion systems by optimization of the mixing efficiency and pressure loss of forced mixers. In: *The 8th European propulsion forum «Affordability and the Environment-Key Challenges for Propulsion in the 21thCentury»*, Nottingham, UK, 26–28 March 2001.

[2] Koch L.D., Bridges J. Flow field comparisons from three Navier-Stokes solvers for an axisymmetric separate flow jet. *40th Aerospace Science Meeting and Exhibit, AIAA*, 2002, art. 2002-0672.

[3] Engblom W.A., Khavaran A., Bridges J. Numerical prediction of chevron nozzle noise reduction using WIND-MGBK methodology. *10th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, AIAA*, 2001, art. 2001-2979.

[4] Thomas R.H., Kinzie K.W. and Pao S.P. Computational analysis of a pylon-chevron core nozzle interaction. *7th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, AIAA*, 2002, art. 2002-2185.

[5] Seiner J.M., Ponton M.K., Jansen B.J., Lagen T.N. The effects of temperature on supersonic jet noise emission. *14th Aeroacoustics Conference, AIAA*, art. 92-02-046.

[6] Dembowski M.A., Georgiadis N.J. *An evaluation of parameters influencing jet mixing using the WIND Navier-Stokes code*. Report/Patent Number: NASA/TM-2002-211727, 2002.

[7] Axisymmetric Hot Supersonic Jet Validation Case (2024). Режим доступа: https://turbmodels.larc.nasa.gov/jetsupersonichot_val_sa.html. Дата обращения: 23 November 2024.

[8] Глушко Г.С., Иванов И.Э., Крюков И.А. Моделирование турбулентности в сверхзвуковых струйных течениях. *Физико-химическая кинетика в газовой динамике*, 2010, т. 9, № 1, с. 164-171.

[9] Sarkar S., Erlebacher G., Hussaini M.Y., Kreiss H.O. Analysis and modelling of dilatational terms in compressible turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 1991, vol. 227, no. 1, pp. 473-493.

[10] Dash S.M., Kenzakowski D.C. A compressible-dissipation extension of the k-epsilon turbulence model and building-block data for its validation. AIAA and SDIO, Annual Interceptor Technology Conference, Huntsville, AL, 1992, 28 p.

[11] Suzen Y., Hoffmann K. Investigation of supersonic jet exhaust flow by one-and two-equation turbulence models. *36th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Reno, NV, U.S.A., 1998. DOI: https://doi.org/10.2514/6.1998-322.

[12] Engblom W., Georgiadis N., Khavaran A. Investigation of variable-diffusion turbulence model correction for round jets. 11th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, Monterey, California, 2005. DOI: https://doi.org/10.2514/6.2005-3085.

[13] Thies A.T., Tam C. K.W. Computation of turbulent axisymmetric and nonaxisymmetric jet flows using the K-epsilon model. *AIAA Journal*, 1996, vol. 34, no. 2, pp. 309-316.

[14] Tam C. K. W., Ganesan A. Modified kappa-epsilon turbulence model for calculating hot jet mean flows and noise. *AIAA Journal*, 2004, vol. 42, 1, pp. 26-34.

[15] Abdol-Hamid K. S. et al. Temperature corrected turbulence model for high temperature jet flow. *Journal of Fluids Engineering*, 2004, vol. 126, no. 5, pp. 844-850.

[16] Jones W.P., Launder B.E. The prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence. *International journal of heat and mass transfer*, 1972, vol. 15, no. 2, pp. 301-314.

[17] Saegeler S., Lieser J., Mundt C. Improved modelling of vortical mixing for the simulation of efficient propulsion systems. *28th International Congress of the Aeronautical Sciences*, 2012, vol. 3, art. 2466.

[18] Menter F.R., Kuntz M., Langtry R.B. Ten years of industrial experience with the SST turbulence model. *Turbulence. Heat and Mass Transfer*, 2003, vol. 4, no. 1, pp. 625-632.

[19] Truemner J., Mundt C. Advanced Modelling of Turbulent Heat-Flux in Turbofan Engines with Lobed Mixers. *46th AIAA Fluid Dynamics Conference*, 2016. DOI: https://doi.org/10.2514/6.2016-4389.

[20] Truemner J., Mundt C. Total temperature-based correction of the turbulence production in hot jets. *American Society of Mechanical Engineers*, 2017. DOI: 10.1115/GT2017-63084.

[21] Truemner J., Mundt C. Numerical methods for heated and unheated supersonic jets. *53rd 3AF International Conference on Applied Aerodynamics*, 2018.

[22] Alam M., Naser J., Brooks G. CFD simulation of supersonic oxygen jet behaviour inside a high temperature field. *7th International Conference on CFD in the Minerals and Process Industries*, 2009. DOI: 10.13140/2.1.4694.7520.

[23] Alam M., Naser J., Brooks G. Computational fluid dynamics simulation of supersonic oxygen jet behavior at steelmaking temperature. *Metallurgical and Materials Transactions B*, 2010, vol. 41, pp. 636-645.

[24] Харченко Н.А. *Численное моделирование аэротермодинамики высокоскоростных летательных аппаратов. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук: 01.02.05.* Москва, МФТИ, 2021, 112 с.

[25] Харченко Н.А., Носенко Н.А. Численное моделирование обтекания высокоскоростным потоком цилиндрически–конического тела и двойного конуса. *Математическое моделирование и численные методы*, 2022, № 3, с. 33-46.

[26] Харченко Н.А., Никонов А.М. Носенко Н.А. Численное решение задачи турбулентного обтекания высокоскоростным потоком цилиндрически-конического тела. *XXXIII научно-техническая конференция по аэродинамике*, ЦАГИ, 2022, с. 101-102.

[27] Лунев В.В. *Течение реальных газов с большими скоростями*. Москва, Физматлит, 2007, 759 с.

[28] Tang H., Gao Z. Investigation of turbulence models with compressibility corrections for hypersonic boundary flows. *Advances in Mechanical Engineering*, 2015, vol. 7, no. 12, p. 23.

[29] Родионов А.В. *Разработка методов и программ для численного*

моделирования неравновесных сверхзвуковых течений в приложении к аэрокосмическим и астрофизическим задачам. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук: 05.13.18. Саратов, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, 2019, 299 с.

[30] Димитриенко Ю.И., Коряков М.Н., Захаров А.А. Применение метода RKDG для численного решения трехмерных уравнений газовой динамики на неструктурированных сетках. *Математическое моделирование и численные методы*, 2015, № 4, с. 75–91.

[31] Димитриенко Ю.И., Коряков М.Н., Юрин Ю.В., Захаров А.А., Сборщиков С.В., Богданов И.О. Сопряженное моделирование высокоскоростной аэротермодинамики и внутреннего тепломассопереноса в композитных аэрокосмических конструкциях. *Математическое моделирование и численные методы*, 2021, № 3, с. 42 – 61.

[32] Liou M.-S. A sequal to AUSM: AUSM+. *Journal of Computational Physics, 1996*, vol. 129, issue 2, pp. 364 – 382

[33] Годунов С.К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики. *Математический сборник*, 1959, т. 47, № 3, с. 271 – 306.

[34] Kitamura K. *Advancement of Shock Capturing Computational Fluid Dynamics Methods: Numerical Flux Functions in Finite Volume Method*. Springer, 2020, 142 p.

[35] Chen SS, Cai FJ, Xue HC, Wang N., Yan C. An improved AUSM-family scheme with robustness and accuracy for all Mach number flows. *Appllied Mathematical Modelling*, 2020, vol. 77, no. 2, pp. 1065 – 1081.

[36] Крюков И.А., Иванов И.Э., Ларина Е.В. Программный комплекс расчета высокоскоростных течений hySol. *Физико-химическая кинетика в газовой динамике*, 2021, т. 22, № 1, 28 с.

[37] Michalak K., Ollivier-Gooch C. Limiters for unstructured higher-order accurate solutions of the Euler equations. *46th AIAA Aerospace Sciences Meeting*, 2008, 14 p. DOI: https://doi.org/10.2514/6.1990-13.

[38] Carlson J.R. *Inflow/outflow boundary conditions with application to FUN3D*. Report/Patent Number: NASA/TM-2011-217181, 2011.

[39] Кацкова О.Н. *Опыт расчета плоских и осесимметричных сверхзвуковых течений газа методом характеристик*. Москва, ВЦ АН СССР, 1961.

[40] Быркин А.П., Верховский В.П., Сосунов А.Ю. Расчет осесимметричных профилированных сопл для чисел M ≤ 10. *Ученые записки ЦАГИ*, 1993, т. 24, № 2, с. 76-86.

[41] Солодкин В.К. Росляков Г.С. Расчет осесимметричных сопел на быстродействующих счетных машинах. *Труды ЦАГИ*, 1963, № 864.

[42] Рябинков Г.М. Экспериментальное исследование сверхзвуковых сопел. *Ученые записки ЦАГИ*, 1970, т. 1, № 1, с. 34-47.

[43] Шлихтинг Г. *Теория пограничного слоя*. Москва, Наука, 1974, 711 с.

[44] Wang Y., Jiang Z. Theories and methods for designing hypersonic high-enthalpy flow nozzles. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2022, vol. 35, pp. 318-339.

[45] Аржанников Н.С., Садекова Г.С. *Аэродинамика летательных аппаратов*. Москва, Высшая школа, 1983, 359 с.

Статья поступила в редакцию 07.12.2024

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Носенко Н.А., Харченко Н.А. Определение газодинамических параметров сверхзвуковой горячей струи в ходе процедуры валидации вычислительной схемы с использованием RANS подход. *Математическое моделирование и численные методы*, 2025, № 2, с. 102–129.

Харченко Николай Анатольевич – канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Вычислительная математика и программирование» МАИ. e-mail: kharchenko.na@phystech.edu

Носенко Никита Андреевич – аспирант кафедры «Вычислительная математика и программирование» МАИ. e-mail: nick468@mail.ru

Determination of gas dynamic parameters of the supersonic hot jet during the computational scheme validation procedure using the RANS approach

© N.A. Nosenko, N.A. Kharchenko

Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, 125993, Russia

This paper presents the validation problem for the numerical determination of gas dynamic parameters in the supersonic flow of a turbulent hot jet into a flooded space. The computational scheme used is based on the two-parameter Menter model modified in terms of the determination of the turbulence generation term, supplemented by the Sarkar compressibility correction with correction for small values of the turbulent Mach number. Gas dynamic parameters of the flow along the jet axis are compared with experimental data of Seiner and results of numerical modelling of other authors. The k-ω SST turbulence model with a modified Sarkar compressibility correction shows better agreement with the experimental data results than turbulence models with the standard version of this correction.

***Keywords**: supersonic modelling, turbulent flows, compressibility correction, computational aerodynamics, unstructured meshes*

REFERENCES

[1] Mundt C., Lieser J. Performance improvement of propulsion systems by optimization of the mixing efficiency and pressure loss of forced mixers. In: *The 8th European propulsion forum «Affordability and the Environment-Key Challenges for Propulsion in the 21thCentury»*, Nottingham, UK, 26–28 March 2001.

[2] Koch L.D., Bridges J. Flow field comparisons from three Navier-Stokes solvers for an axisymmetric separate flow jet. *40th Aerospace Science Meeting and Exhibit, AIAA*, 2002, art. 2002-0672.

[3] Engblom W.A., Khavaran A., Bridges J. Numerical prediction of chevron nozzle noise reduction using WIND-MGBK methodology. *10th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, AIAA*, 2001, art. 2001-2979.

[4] Thomas R.H., Kinzie K.W. and Pao S.P. Computational analysis of a pylon-

chevron core nozzle interaction. *7th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, AIAA*, 2002, art. 2002-2185.

[5] Seiner J.M., Ponton M.K., Jansen B.J., Lagen T.N. The effects of temperature on supersonic jet noise emission. *14th Aeroacoustics Conference, AIAA*, art. 92-02-046.

[6] Dembowski M.A., Georgiadis N.J. *An evaluation of parameters influencing jet mixing using the WIND Navier-Stokes code*. Report/Patent Number: NASA/TM-2002-211727, 2002.

[7] Axisymmetric Hot Supersonic Jet Validation Case (2024). Available at: https://turbmodels.larc.nasa.gov/jetsupersonichot_val_sa.html. Last accessed: 23 November 2024.

[8] Glushko G.S., Ivanov I.E., Kryukov I.A. Turbulence modeling for supersonic jet flows. Physical-Chemical Kinetics in Gas Dynamics, 2010, vol. 9, no. 1, pp. 164-171.

[9] Sarkar S., Erlebacher G., Hussaini M.Y., Kreiss H.O. Analysis and modelling of dilatational terms in compressible turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 1991, vol. 227, no. 1, pp. 473-493.

[10] Dash S.M., Kenzakowski D.C. A compressible-dissipation extension of the k-epsilon turbulence model and building-block data for its validation. AIAA and SDIO, Annual Interceptor Technology Conference, Huntsville, AL, 1992, 28 p.

[11] Suzen Y., Hoffmann K. Investigation of supersonic jet exhaust flow by one-and two-equation turbulence models. *36th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Reno, NV, U.S.A., 1998. DOI: https://doi.org/10.2514/6.1998-322.

[12] Engblom W., Georgiadis N., Khavaran A. Investigation of variable-diffusion turbulence model correction for round jets. 11th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, Monterey, California, 2005. DOI: https://doi.org/10.2514/6.2005-3085.

[13] Thies A.T., Tam C. K.W. Computation of turbulent axisymmetric and nonaxisymmetric jet flows using the K-epsilon model. *AIAA Journal*, 1996, vol. 34, no. 2, pp. 309-316.

[14] Tam C. K. W., Ganesan A. Modified kappa-epsilon turbulence model for calculating hot jet mean flows and noise. *AIAA Journal*, 2004, vol. 42, 1, pp. 26-34.

[15] Abdol-Hamid K. S. et al. Temperature corrected turbulence model for high temperature jet flow. *Journal of Fluids Engineering*, 2004, vol. 126, no. 5, pp. 844-850.

[16] Jones W.P., Launder B.E. The prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence. *International journal of heat and mass transfer*, 1972, vol. 15, no. 2, pp. 301-314.

[17] Saegeler S., Lieser J., Mundt C. Improved modelling of vortical mixing for the simulation of efficient propulsion systems. *28th International Congress of the Aeronautical Sciences*, 2012, vol. 3, art. 2466.

[18] Menter F.R., Kuntz M., Langtry R.B. Ten years of industrial experience with the SST turbulence model. *Turbulence. Heat and Mass Transfer*, 2003, vol. 4, no. 1, pp. 625-632.

[19] Truemner J., Mundt C. Advanced Modelling of Turbulent Heat-Flux in Turbofan Engines with Lobed Mixers. *46th AIAA Fluid Dynamics Conference*, 2016. DOI: https://doi.org/10.2514/6.2016-4389.

[20] Truemner J., Mundt C. Total temperature-based correction of the turbulence production in hot jets. *American Society of Mechanical Engineers*, 2017. DOI:

10.1115/GT2017-63084.

[21] Truemner J., Mundt C. Numerical methods for heated and unheated supersonic jets. *53rd 3AF International Conference on Applied Aerodynamics*, 2018.

[22] Alam M., Naser J., Brooks G. CFD simulation of supersonic oxygen jet behaviour inside a high temperature field. *7th International Conference on CFD in the Minerals and Process Industries*, 2009. DOI: 10.13140/2.1.4694.7520.

[23] Alam M., Naser J., Brooks G. Computational fluid dynamics simulation of supersonic oxygen jet behavior at steelmaking temperature. *Metallurgical and Materials Transactions B*, 2010, vol. 41, pp. 636-645.

[24] Kharchenko N.A. *CHislennoe modelirovanie aerotermodinamiki vysokoskorostnyh letatel'nyh apparatov* [Numerical modelling of aerothermodynamics of high-speed aircraft]. *Phd Thesis (Phys. — Math.): 01.02.05*. Moscow, MIPT, 2021, p. 112.

[25] Kharchenko N.A., Nosenko N.A. Numerical simulation high-speed flow around a cylindrical-conical body and a double cone. *Mathematical modeling and computational methods*, 2022, no. 3, pp. 33 – 46.

[26] Kharchenko N.A., Nikonov A.M., Nosenko N.A. CHislennoe reshenie zadachi turbulentnogo obtekaniya vysokoskorostnym potokom cilindricheski – konicheskogo tela [Numerical solution of the problem of turbulent high-velocity flow around a cylindrical-conical body]. *XXXIII nauchno-tekhnicheskaya konferenciya po aerodinamike* [XXXIII Scientific and Technical Conference on Aerodynamics], CAGI [TsAGI], 2022, pp. 101 – 102.

[27] Lunev V.V. *Techenie real'nyh gazov s bol'shimi skorostyami* [Flow of real gases with high velocities]. Moscow, Fizmatlit, 2007, 759 p.

[28] Tang H., Gao Z. Investigation of turbulence models with compressibility corrections for hypersonic boundary flows. *Advances in Mechanical Engineering*, 2015, vol. 7, no. 12, p. 23.

[29] Rodionov A.V. *Razrabotka metodov i programm dlya chislennogo modelirovaniya neravnovesnyh sverhzvukovyh techenij v prilozhenii k aerokosmicheskim i astrofizicheskim zadacham* [Development of methods and programmes for numerical modelling of nonequilibrium supersonic flows in application to aerospace and astrophysical problems]. *Phd Thesis (Phys. — Math.): 05.13.18*. Sarov, KIAM RAS, 2019, 299 c.

[30] Dimitrienko Yu.I., Koryakov M.N., Zakharov A.A. Application of RKDG method for computational solution of three-dimensional gas-dynamic equations with non-structured grids. *Mathematical modeling and computational methods*, 2015, № 4, с. 75–91.

[31] Dimitrienko Yu.I., Koryakov M.N., Yurin Yu.V., Zakharov A.A., Sborshchikov S.V., Bogdanov I.O. Coupled modeling of high-speed aerothermodynamics and internal heat and mass transfer in composite aerospace structures. *Mathematical modeling and computational methods*, 2021, no. 3, pp. 42 – 61.

[32] Liou M.-S. A sequal to AUSM: AUSM+. *Journal of Computational Physics, 1996*, vol. 129, issue 2, pp. 364 – 382.

[33] Godunov S.K. Finite difference method for numerical computation of discontinuous solutions of the equations of fluid dynamics. *Matematicheskii sbornik* [Mathematical collection], 1959, vol. 47, no. 3, pp. 271 – 306.

[34] Kitamura K. *Advancement of Shock Capturing Computational Fluid Dynamics Methods: Numerical Flux Functions in Finite Volume Method*. Springer, 2020, 142 p.

[35] Chen SS, Cai FJ, Xue HC, Wang N., Yan C. An improved AUSM-family scheme with robustness and accuracy for all Mach number flows. *Applied*

Mathematical Modelling, 2020, vol. 77, no. 2, pp. 1065 – 1081.

[36] Kryukov I.A., Ivanov I.E., Larina E.V. Programmnyj kompleks rascheta vysokoskorostnyh techenij hySol [Software package HySol for the Numerical Simulation for High-Speed Flows]. *Fiziko-himicheskaya kinetika v gazovoj dinamike* [Physical and chemical kinetics in gas dynamics], 2021, vol. 22, no. 1, 28 p.

[37] Michalak K., Ollivier-Gooch C. Limiters for unstructured higher-order accurate solutions of the Euler equations. *46th AIAA Aerospace Sciences Meeting*, 2008, 14 p. DOI: https://doi.org/10.2514/6.1990-13.

[38] Carlson J.R. *Inflow/outflow boundary conditions with application to FUN3D*. Report/Patent Number: NASA/TM-2011-217181, 2011.

[39] Katskova O. N. *Opyt rascheta ploskih i osesimmetrichnyh sverhzvukovyh techenij gaza metodom harakteristik* [Experience of calculation of plane and axisymmetric supersonic gas flows by the method of characteristics]. Moscow, VC AN SSSR [Computing Centre of the Academy of Sciences], 1961.

[40] Byrkin A.P., Verkhovsky V.P., Sosunov A.Yu. Calculation of axisymmetric profiled nozzles for numbers M ≤ 10. *TsAGI Science Journal*, 1993, vol. 24, no. 2, pp. 76-86.

[41] Solodkin V.K., Roslyakov G.S. *Roslyakov G.S. Raschet osesimmetrichnyh sopel na bystrodejstvuyushchih schetnyh mashinah* [Calculation of axisymmetric nozzles on fast counting machines]. Trudy CAGI [Works of TsAGI], 1963, no. 864.

[42] Ryabinkov G.M. Experimental study of supersonic nozzles. *TsAGI Science Journal*, 1970, vol. 1, no. 1, pp. 34-47.

[43] Schlichting G. *Teoriya pogranichnogo sloya* [Boundary layer theory]. Moscow, Nauka Pupl., 1974, 711 p.

[44] Wang Y., Jiang Z. Theories and methods for designing hypersonic high-enthalpy flow nozzles. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2022, vol. 35, pp. 318-339.

[45] Arzhannikov N.S., Sadekova G.S. *Aerodinamika letatel'nyh apparatov* [Aerodynamics of flying machines]. Moscow, Higher School Publ., 1983, 359 p.

Kharchenko N.A., Cand. Sc. (Phys. — Math.), Associate Professor, Department of Computational Mathematics and Programming, Moscow Aviation Institute. e-mail: kharchenko.na@phystech.edu

Nosenko N.A., Postgraduate student, Department of Computational Mathematics and Programming, Moscow Aviation Institute. e-mail: nick468@mail.ru