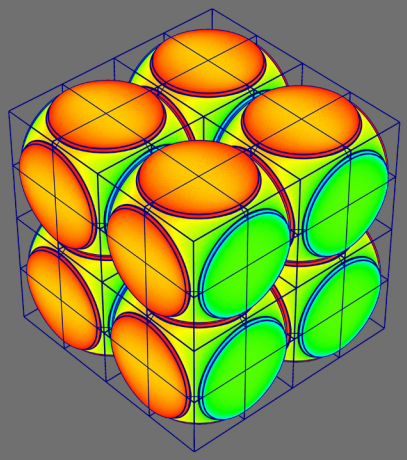
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Баринова Е.В., Тимбай И.А., Миронов Е. Численное исследование устойчивости положений равновесия наноспутника стандарта CubeSat под действием аэродинамического и гравитационного моментов. Математическое моделирование и численные методы, 2025, № 2, с. 82–101.

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/376/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.216.58
14.03.2026 22:02:27

УДК 629.78 DOI: 10.18698/2309-3684-2025-2-82101

Численное исследование устойчивости положений равновесия наноспутника стандарта CubeSat под действием аэродинамического и гравитационного моментов

© Е.В. Баринова, И.А. Тимбай, Е. Миронов

Самарский университет, Самара, 443086, Россия

Для выполнения многих целевых задач полёта требуется обеспечение заданной ориентации космического аппарата в пространстве. В случае малых космических аппаратов ввиду низких энергетических запасов целесообразно использовать пассивные или комбинированные системы стабилизации. При этом важным вопросом является определение устойчивых положений равновесия относительно центра масс аппарата. Особенностью динамики наноспутников формата CubeSat является то, что аэродинамическая сила лобового сопротивления зависит от двух углов ориентации – угла атаки и угла собственного вращения, что обусловлено формой прямоугольного параллелепипеда. Также вследствие малых размеров нанопутников влияние аэродинамического момента сопоставимо с влиянием гравитационного момента для большего диапазона высот по сравнению с крупногабаритными аппаратами. В работе предложен алгоритм численно-аналитического определения положений равновесия динамически несимметричного наноспутника стандарта CubeSat при смещении его центра давления относительно центра масс по трём осям связанной системы координат. Кроме того, разработанный алгоритм позволяет учитывать наличие центробежных моментов инерции в связанной системе координат, оси которой ориентированы по строительным осям наноспутника. Также в данной работе предложен алгоритм численного исследования устойчивости найденных положений равновесия. Представленные алгоритмы определения положений равновесия и исследования их устойчивости позволяют изучать неуправляемое движение под действием гравитационного и аэродинамического моментов для наноспутников с различными проектными параметрами за сравнительно небольшой промежуток времени. Данная работа может быть полезна при разработке систем стабилизации и управления угловым движением.

Ключевые слова: *наноспутник стандарта CubeSat, аэродинамический момент, гравитационный момент, угол атаки, угол собственного вращения, устойчивость положения равновесия*

Введение. За последние десятилетия популярность миссий малоразмерных космических аппаратов значительно возросла. Вклад подобных миссий в исследование космоса и обучение нового поколения учёных и инженеров невозможно переоценить. Стандарт CubeSat – наиболее популярный в настоящее время стандарт наноспутников (НС) [1]. Его характерными отличиями от прочих космических аппа-

ратов является относительно малый размер и форма прямоугольного параллелепипеда.

Для успешного выполнения большинства целевых задач полёта требуется определённая ориентация НС. Ввиду малых размеров НС и низких энергетических запасов, целесообразно обеспечивать необходимую ориентацию с помощью пассивных или комбинированных систем стабилизации [2-6]. Поскольку большинство НС выводятся на низкие околоземное орбиты, на которых преобладает влияние гравитационного и аэродинамического моментов, целесообразно использовать их при создании систем стабилизации. Основополагающие исследования влияния моментов гравитационных и аэродинамических моментов на движение спутника относительно центра масс проведены рядом авторов, например, в работах [7,8].

Важным этапом при проектировании систем пассивной стабилизации является определение устойчивых положений углового равновесия НС. В литературе подробно изучены положения равновесия относительно центра масс под действием гравитационного и аэродинамического моментов для спутников, имеющих форму близкую к сферической [9-11]. Для таких спутников сила аэродинамического сопротивления не зависит от ориентации аппарата относительно набегающего потока. В работе [10] предложен символьно-численный метод определения всех положений равновесия сферического спутника в орбитальной системе координат, когда его центр давления смещён относительно центра масс по трём координатам и три главные моменты инерции не равны друг другу. В работе [11] для каждой равновесной ориентации получены достаточные условия устойчивости с использованием в качестве функции Ляпунова обобщенного интеграла энергии.

Важной особенностью НС стандарта CubeSat является то, что они имеют форму прямоугольного параллелепипеда и, как следствие, аэродинамическая сила лобового сопротивления зависит от ориентации спутника относительно набегающего потока (углов атаки и собственного вращения). В работах [12,13] авторами были получены аналитические выражения для определения положений равновесия для двух частных случаев: смещения центра давления динамически симметричного НС от его центра масс по трём координатам; смещения центра давления НС с тремя разными главными моментами инерции от его центра масс по одной из главных осей инерции. Также было показано, что для динамически симметричного НС возможно 8, 12 или 16 положений равновесия, а для динамически несимметричного 8, 12, 16, 20 или 24.

В развитие проведённых ранее исследований в данной работе рассматривается задача определения положений равновесия и исследование их устойчивости для более общего случая, когда центр дав-

ления динамически несимметричного НС смещён относительно центра масс по трём координатам. Кроме того, поскольку для компоновки НС, в том числе и для размещения полезной нагрузки, используется связанная система координат, ориентированная по строительным осям НС, то важно учитывать наличие центробежных моментов инерции.

В данной работе разработан алгоритм численно-аналитического определения положений равновесия динамически несимметричного НС стандарта CubeSat под действием аэродинамического и гравитационного моментов, при движении по круговым орбитам, с учётом центробежных моментов инерции при этом центр масс может быть смещён относительно геометричекого центра по трём координатам. В работе рассматриваются НС, имеющие форму прямоугольного параллелепипеда, например, CubeSat 1–3U, 6U. Также предложен алгоритм численного исследования устойчивости найденных положений равновесия. Данный алгоритм применим для диапазона высот 250 – 700 км.

Математическая постановка задачи, принятые допущения. Для описания движения наноспутника относительно центра масс введены две системы координат (СК): траекторная $OX_kY_kZ_k$ (совпадающая с орбитальной в случае круговой орбиты) и связанная $Oxyz$ СК, ось Ox которой направлена по продольной оси аппарата, оси Oy и Oz перпендикуляры его боковым сторонам (рис. 1). Связь между траекторной и связанной СК определяется с помощью углов Эйлера, где α — пространственный угол атаки, ψ — угол прецессии, φ — угол собственного вращения. Коэффициенты матрицы перехода от траекторной системы координат к связанной определяется следующим образом:

$$b_{11} = \cos\alpha,\ b_{12} = \sin\alpha\sin\psi,\ b_{13} = -\sin\alpha\cos\psi,\ b_{21} = \sin\alpha\sin\varphi,$$

$$b_{22} = \cos\varphi\cos\psi - \cos\alpha\sin\varphi\sin\psi,\ b_{23} = \cos\varphi\sin\psi + \cos\alpha\sin\varphi\cos\psi,$$

$$b_{31} = \sin\alpha\cos\varphi,\ b_{32} = -\sin\varphi\cos\psi - \cos\alpha\cos\varphi\sin\psi,$$

$$b_{33} = -\sin\varphi\sin\psi + \cos\alpha\cos\varphi\cos\psi.$$

Гравитационный момент в связанной с наноспутником системе координат имеет следующие проекции [14]:

$$M_{gx} = 3\frac{\mu}{R^3}(J_{xy}b_{13}b_{33} + J_{yz}(b_{33}^2 - b_{23}^2) - \\ -J_{xz}b_{13}b_{23} + (J_z - J_y)b_{23}b_{33}),$$

$$M_{gy} = 3\frac{\mu}{R^3}(-J_{xy}b_{23}b_{33} + J_{xz}(b_{13}^2 - b_{33}^2) + \\ + J_{yz}b_{13}b_{23} + (J_x - J_z)b_{13}b_{33}), \tag{1}$$

$$M_{gz} = 3\frac{\mu}{R^3}(J_{xy}(b_{23}^2 - b_{13}^2) + J_{xz}b_{23}b_{33} - \\ - J_{yz}b_{13}b_{33} + (J_y - J_x)b_{13}b_{23}),$$

где J_x, J_y, J_z — осевые моменты инерции НС; J_{xy}, J_{xz}, J_{yz} — центробежные моменты инерции НС; μ — гравитационная постоянная Земли; $R = R_З + H$ — расстояние центра масс спутника от центра притяжения; $R_З$ — радиус Земли; H — высота полёта.

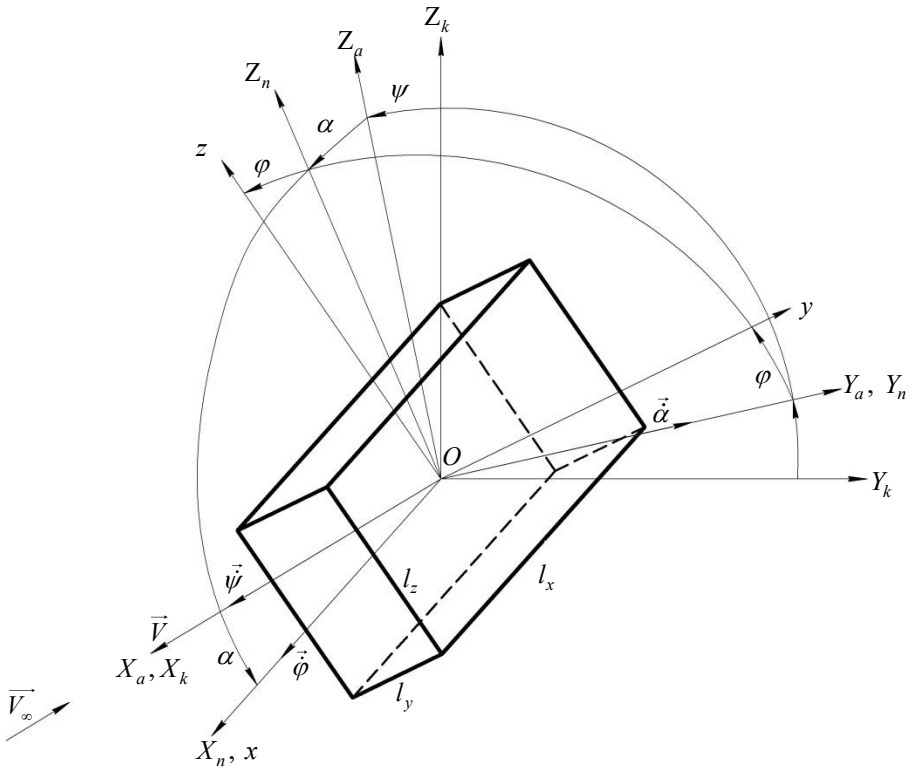


Рис. 1. Взаимное расположение траекторной $OX_kY_kZ_k$ и связанной с наноспутником $Oxyz$ систем координат

На рассматриваемых высотах движения принято считать, что обтекание наноспутника является свободномолекулярным и удар молекул газа абсолютно неупругий. В этом случае аэродинамическая сила представляет собой силу сопротивления, которая определяется площадью проекции наноспутника на плоскость, перпендикулярную вектору скорости набегающего потока [15].

Аэродинамический момент для наноспутников, имеющих форму прямоугольного параллелепипеда, в связанной с наноспутником системе координат можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} M_{ax} &= -c_0 q S_x \cdot \tilde{S}(\alpha,\varphi)\cdot(\Delta y b_{31} - \Delta z b_{21}), \\ M_{ay} &= -c_0 q S_x \cdot \tilde{S}(\alpha,\varphi)\cdot(\Delta z b_{11} - \Delta x b_{31}), \\ M_{az} &= -c_0 q S_x \cdot \tilde{S}(\alpha,\varphi)\cdot(\Delta x b_{21} - \Delta y b_{11}), \end{aligned} \tag{2}$$

где c_0 — коэффициент, который может принимать значения от 2 до 3 в зависимости от физических свойств газа и поверхности наноспутника, для проектных проработок принимается равным 2,2; $q = \rho V^2/2$ — скоростной напор; ρ — плотность атмосферы на данной высоте; V — скорость полёта НС; $\tilde{S}(\alpha,\varphi) = |\cos\alpha| + \sin\alpha\left(\frac{l_x}{l_z}|\sin\varphi| + \frac{l_x}{l_y}|\cos\varphi|\right)$ — площадь проекции НС на плоскость перпендикулярную вектору скорости набегающего потока, отнесённая к характерной площади НС $S_x = l_y l_z$ [4]; $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ — положение центра давления относительно центра масс; l_x, l_y, l_z — длины соответствующих граней НС.

Уравнения пространственного движения наноспутника относительно центра масс под действием аэродинамического и гравитационного моментов на круговой орбите можно записать в следующем виде [14]:

$$\begin{aligned} &J_x\dot{\omega}_x - J_{xy}\dot{\omega}_y - J_{xz}\dot{\omega}_z - J_{yz}(\omega_y^2 - \omega_z^2) - \\ &-J_{xz}\omega_x\omega_y + J_{xy}\omega_x\omega_z + (J_z - J_y)\omega_y\omega_z = M_{gx} + M_{ax}, \\ &J_y\dot{\omega}_y - J_{xy}\dot{\omega}_x - J_{yz}\dot{\omega}_z - J_{xz}(\omega_z^2 - \omega_x^2) - \\ &-J_{xy}\omega_y\omega_z + J_{yz}\omega_x\omega_y + (J_x - J_z)\omega_z\omega_x = M_{gy} + M_{ay}, \\ &J_z\dot{\omega}_z - J_{xz}\dot{\omega}_x - J_{yz}\dot{\omega}_y - J_{xy}(\omega_x^2 - \omega_y^2) - \\ &-J_{yz}\omega_x\omega_z + J_{xz}\omega_y\omega_z + (J_y - J_x)\omega_x\omega_y = M_{gz} + M_{az}, \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\psi}\cos\alpha + \dot{\varphi} + \omega_0 b_{12}, \\ \omega_y &= \dot{\psi}\sin\varphi\sin\alpha + \dot{\alpha}\cos\varphi + \omega_0 b_{22}, \\ \omega_z &= \dot{\psi}\cos\varphi\sin\alpha - \dot{\alpha}\sin\varphi + \omega_0 b_{32}. \end{aligned} \tag{4}$$

Здесь ω_x, ω_y, ω_z — проекции абсолютной угловой скорости на оси связанной СК; $\omega_0 = \sqrt{\mu / R^3}$ — орбитальная угловая скорость при движении по круговой орбите.

Положением равновесия называется такое положение НС, в котором НС будет находиться всё время, если в начальный момент времени он находился в этом положении и скорости всех его точек были равны нулю [16]. Из определения следует, что скорости изменения углов равны нулю ($\dot{\alpha}=0$, $\dot{\psi}=0$, $\dot{\varphi}=0$), тогда уравнения (4) примут вид:

$$\begin{aligned} \omega_x &= \omega_0 \cdot b_{12}, \\ \omega_y &= \omega_0 \cdot b_{22}, \\ \omega_z &= \omega_0 \cdot b_{32}. \end{aligned} \tag{5}$$

Подставив (5) в систему (3) и дополнив шестью условиями ортогональности направляющих косинусов, получим систему для определения положений равновесия в элементах матрицы поворота:

$$\begin{gathered} \omega_0^2(-J_{yz}(b_{22}^2-b_{32}^2)-J_{xz}b_{12}b_{22}+J_{xy}b_{12}b_{32}+ \\ +(J_z-J_y)b_{22}b_{32})=M_{gx}+M_{ax}, \\ \omega_0^2(-J_{xz}(b_{32}^2-b_{12}^2)-J_{xy}b_{22}b_{32}+J_{yz}b_{12}b_{32}+ \\ +(J_x-J_z)b_{32}b_{12})=M_{gy}+M_{ay}, \\ \omega_0^2(-J_{xy}(b_{12}^2-b_{22}^2)-J_{yz}b_{12}b_{32}+J_{xz}b_{22}b_{32}+ \\ +(J_y-J_x)b_{12}b_{22})=M_{gz}+M_{az}, \\ b_{11}^2+b_{21}^2+b_{31}^2=1, \\ b_{12}^2+b_{22}^2+b_{33}^2=1, \\ b_{13}^2+b_{23}^2+b_{33}^2=1, \\ b_{22}b_{23}+b_{32}b_{33}+b_{12}b_{13}=0, \\ b_{22}b_{21}+b_{32}b_{31}+b_{12}b_{11}=0, \\ b_{21}b_{23}+b_{33}b_{31}+b_{13}b_{11}=0. \end{gathered} \tag{6}$$

Найти аналитическое решение системы (6) в общем виде не представляется возможным.

Определение положений равновесия НС стандарта CubeSat под действием аэродинамического и гравитационного моментов

Для двух частных случаев параметров НС авторами были получены аналитические выражения для определения положений равновесия [12,13].

Положения равновесия при смещении центра давления динамически симметричного НС от его центра масс по трём координатам.

Рассмотрим следующий частный случай [12]:

- оси связанной СК совпадают с главными осями инерции НС;

- НС формата CubeSat 1-3U (или 12U), то есть имеет квадратное поперечное сечение ($l_y = l_z$);
- НС является динамически симметричным, то есть $J_n = J_y = J_z$, $J_x \neq J_n$;
- центр давления смещён относительно центра масс по трём координатам $\left(\Delta x \neq 0,\ \Delta y \neq 0,\ \Delta z \neq 0\right)$.

В этом случае площадь проекции НС на плоскость перпендикулярную вектору скорости набегающего потока, отнесённая к характерной площади НС S_x примет вид:

$$\tilde{S}(\alpha,\varphi) = |\cos\alpha| + k_s \sin\alpha\left(|\sin\varphi| + |\cos\varphi|\right),$$

где $k_s = l_x / l_y$ — отношение площади одной из боковых поверхностей к характерной площади.

Первые три уравнения системы для определения положений равновесия (6) примут вид:

$$\begin{gathered} c_0 q S_x \cdot \tilde{S}(\alpha,\varphi)\cdot(\Delta y b_{31} - \Delta z b_{21}) = 0, \\ \omega_0^2 (J_x - J_n)(b_{32}b_{12} - 3b_{13}b_{33}) = \\ = -c_0 q S_x \cdot \tilde{S}(\alpha,\varphi)\cdot(\Delta z b_{11} - \Delta x b_{31}), \\ \omega_0^2 (J_n - J_x)(b_{12}b_{22} - 3b_{13}b_{23}) = \\ -c_0 q S_x \cdot \tilde{S}(\alpha,\varphi)\cdot(\Delta x b_{21} - \Delta y b_{11}). \end{gathered} \tag{7}$$

Результат аналитического решения данной системы приведён в таблице 1, в которой указаны сочетания углов прецессии, собственного вращения и атаки, соответствующие положениям углового равновесия. В таблице приняты следующие обозначения:

$$w = k_s\left(|\Delta y| + |\Delta z|\right),\ u = \left(\sqrt{w} + \sqrt{|\Delta x|}\right)^2,\ v = \frac{\omega_0^2 (J_y - J_x)}{c_0 q S_x}, \tag{8}$$

$$\varphi_1 = \left[\begin{array}{ll} arctg\,\dfrac{\Delta y}{\Delta z} + \pi, & \Delta z < 0, \\ arctg\,\dfrac{\Delta y}{\Delta z}, & \Delta z > 0, \end{array}\right. \qquad \varphi_2 = \varphi_1 + \pi,$$

$$\alpha_i = arcctg\left(\frac{-r_i \pm \sqrt{r_i^2 + 4\Delta x q_i w}}{2 q_i \sqrt{\Delta y^2 + \Delta z^2}}\right),$$

$$r_i = q_i w + p_i v - \Delta x \text{ при } i = 1,2,5,6,9,10,13,14,$$

$$\alpha_i = arcctg\left(\frac{-r_i \pm \sqrt{r_i^2 - 4\Delta x q_i w}}{-2q_i\sqrt{\Delta y^2 + \Delta z^2}}\right) + \pi,$$

$$r_i = q_i w + p_i v + \Delta x \text{ при } i = 3,4,7,8,11,12,15,16,$$

верхний знак перед квадратным корнем соответствует нечётному индексуv α_i, соответственно нижний знак – чётному; $p_i = -3$, если $i = 1,2,...,8$; $p_i = 1$, если $i = 9,10,...,16$; $q_i = 1$, если $i = 1,...,4;9,....,12$, $q_i = -1$, если $i = 5,...,8;13,...,16$.

Таблица 1

Положения равновесия для случая $J_x \neq J_y = J_z$ **и** $\Delta x \neq 0,\ \Delta y \neq 0,\ \Delta z \neq 0$

			$\Delta x < 0$			$\Delta x > 0$		
			$\lvert v\rvert < \frac{u}{3}$	$\frac{u}{3} < \lvert v\rvert < u$	$u < \lvert v\rvert$	$\lvert v\rvert < \frac{u}{3}$	$\frac{u}{3} < \lvert v\rvert < u$	$u < \lvert v\rvert$
$\psi_1 = 0$ $(\psi_3 = \pi)$	φ_1	$v > 0$	α_3	$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$	$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$	α_1	$\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$	$\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$
		$v < 0$	α_3	α_3	α_3	α_1	α_1	α_1
	φ_2	$v > 0$	α_6	α_6	α_6	α_8	α_8	α_8
		$v < 0$	α_6	$\alpha_6, \alpha_7, \alpha_8$	$\alpha_6, \alpha_7, \alpha_8$	α_8	$\alpha_5, \alpha_6, \alpha_8$	$\alpha_5, \alpha_6, \alpha_8$
$\psi_2 = \frac{\pi}{2}$ $\left(\psi_4 = \frac{3\pi}{2}\right)$	φ_1	$v > 0$	α_{11}	α_{11}	α_{11}	α_9	α_9	α_9
		$v < 0$	α_{11}	α_{11}	$\alpha_9, \alpha_{10}, \alpha_{11}$	α_9	α_9	$\alpha_9, \alpha_{11}, \alpha_{12}$
	φ_2	$v > 0$	α_{14}	α_{14}	$\alpha_{14}, \alpha_{15}, \alpha_{16}$	α_{16}	α_{16}	$\alpha_{13}, \alpha_{14}, \alpha_{16}$
		$v < 0$	α_{14}	α_{14}	α_{14}	α_{16}	α_{16}	α_{16}
Число положений равновесия			8	12	16	8	12	16

Определены условия, при которых изменяется число положений относительного равновесия:

- при $\lvert v\rvert < u/3$ – 8 положений относительного равновесия, что объясняется преобладанием аэродинамического момента над гравитационным;

- при $u/3<|v|<u$ – 12 положений относительного равновесия, когда гравитационный и аэродинамический моменты соизмеримы;
- при $u<|v|$ – 16 положений относительного равновесия, что объясняется преобладанием гравитационного момента над аэродинамическим.

Положения равновесия при смещении центра давления НС с тремя разными главными моментами инерции от его центра масс по одной из главных осей инерции. Рассмотрим частный случай, когда оси связанной СК совпадают с главными осями инерции и при этом центр давления динамически несимметричного НС смещён относительно центра масс по одной главной оси инерции, например, по оси Ox $\left(\Delta y=\Delta z=0,\ \Delta x\neq 0\right)$, Тогда первые три уравнения системы для определения положений равновесия (6) примут вид [13]:

$$\begin{gathered}\omega_0^2\left(J_z-J_y\right)\left(b_{22}b_{32}-3b_{23}b_{33}\right)=0,\\ \omega_0^2\left(J_x-J_z\right)\left(b_{32}b_{12}-3b_{13}b_{33}\right)=c_0qS_x\cdot\tilde{S}(\alpha,\varphi)\Delta x b_{31},\\ \omega_0^2\left(J_y-J_x\right)\left(b_{12}b_{22}-3b_{13}b_{23}\right)=-c_0qS_x\cdot\tilde{S}(\alpha,\varphi)\Delta x b_{21}.\end{gathered}\tag{9}$$

Результат аналитического решения данной системы приведён в таблице 2, в которой в зависимости от соотношения параметров показано число положений углового равновесия, а в скобках указаны номера комбинаций углов прецессии, собственного вращения и атаки, соответствующие положениям углового равновесия. В данной таблице приведены следующие обозначения:

$$v=\frac{\omega_0^2\left(J_y-J_x\right)}{c_0qS_x},\ r=\frac{\omega_0^2\left(J_z-J_y\right)}{c_0qS_x}.\tag{10}$$

Тогда комбинации углов прецессии, собственного вращения и атаки, соответствующие положениям углового равновесия относительно центра масс, определяются по следующим формулам:

(1) $\alpha_1=0$ при $\varphi+\psi=\{0,\pi/2,\pi,3\pi/2\}$ — 4 положения равновесия при любых соотношениях $\Delta x,\ r,\ v$;

(2) $\alpha_2=\pi$ при $\varphi+\psi=\{0,\pi/2,\pi,3\pi/2\}$ — 4 положения равновесия при любых соотношениях $\Delta x,\ r,\ v$;

(3) Если $\frac{|\Delta x|}{3}<|r|$: $\psi_1=0$, $\left(\psi_3=\pi\right)$, $\varphi_1=0$, $\left(\varphi_3=\pi\right)$, $\alpha_3=arcctg\left(\frac{\Delta x k_s}{-3r+sign(r)|\Delta x|}\right)$ — 4 положения равновесия;

(4) Если $|\Delta x| < |r|$: $\psi_2 = \pi/2$, $(\psi_4 = 3\pi/2)$, $\varphi_1 = 0$, $(\varphi_3 = \pi)$, $\alpha_4 = arcctg\left(\dfrac{\Delta x k_s}{r - sign(r)|\Delta x|}\right)$ — 4 положения равновесия;

(5) Если $\dfrac{|\Delta x|}{3} < |v|$: $\psi_1 = 0$, $(\psi_3 = \pi)$, $\varphi_2 = \pi/2$, $(\varphi_4 = 3\pi/2)$, $\alpha_5 = arcctg\left(\dfrac{\Delta x k_s}{-3v + sign(v)|\Delta x|}\right)$ — 4 положения равновесия;

(6) Если $|\Delta x| < |v|$: $\psi_1 = \pi/2$, $(\psi_3 = 3\pi/2)$, $\varphi_2 = \pi/2$, $(\varphi_4 = 3\pi/2)$, $\alpha_6 = arcctg\left(\dfrac{\Delta x k_s}{v - sign(v)|\Delta x|}\right)$ — 4 положения равновесия.

Из таблицы видно, что число положения равновесия не может быть меньше 8 и больше 24. При преобладании аэродинамического момента, то есть на сравнительно низких высотах, где атмосфера оказывает заметное влияние, возможно всего 8 положений равновесия. Тогда как при преобладании гравитационного момента, то есть на высотах с менее плотной атмосферой, возможно 24 положения равновесия.

Таблица 2

Число положений равновесия для случая $J_x \neq J_y = J_z$ и $\Delta x \neq 0,\ \Delta y \neq 0,\ \Delta z \neq 0$

	$0 < \lvert r\rvert < \frac{\lvert\Delta x\rvert}{3}$	$\frac{\lvert\Delta x\rvert}{3} < \lvert r\rvert < \lvert\Delta x\rvert$	$\lvert\Delta x\rvert < \lvert r\rvert$
$0 < \lvert v\rvert < \frac{\lvert\Delta x\rvert}{3}$	8 (1,2)	12 (1,2,3)	16 (1,2,3,4)
$\frac{\lvert\Delta x\rvert}{3} < \lvert v\rvert < \lvert\Delta x\rvert$	12 (1,2,5)	16 (1,2,3,5)	20 (1,2,3,4,5)
$\lvert\Delta x\rvert < \lvert v\rvert$	16 (1,2,5,6)	20 (1,2,3,5,6)	24 (1,2,3,4,5,6)

Численно-аналитический алгоритм определения положений равновесия НС стандарта CubeSat в общем случае. Предлагаемый здесь алгоритм реализован в математическом пакете Wolfram Mathematica 12 [17]. Ниже приведено подробное описание всех этапов работы алгоритма.

Сначала происходит ввод исходных данных: параметры аппарата, такие как тензор инерции, положение центра давления относительно центра масс; высота круговой орбиты, выбирается модель атмосферы. В программе используются стандартная плотность атмосферы Земли в соответствии с ГОСТ 4401-81 [18] и ГОСТ-25645.101-83 [19],

где плотность атмосферы приводится с учётом времени суток и солнечной активности.

Если в начальных условиях зафиксирован частный случай, производится аналитическое определение положений равновесия, с помощью формул, приведённых выше. Если частных случаев не обнаружено, производится численное решение системы (6) относительно направляющих косинусов b_{ij}:

$$\begin{pmatrix} b_{11}^1 & b_{12}^1 & b_{13}^1 & b_{21}^1 & b_{22}^1 & b_{23}^1 & b_{31}^1 & b_{32}^1 & b_{33}^1 \\ & & & & \ddots & & & & \\ b_{11}^k & b_{12}^k & b_{13}^k & b_{21}^k & b_{22}^k & b_{23}^k & b_{31}^k & b_{32}^k & b_{33}^k \end{pmatrix}.$$

где $k = \left(\overline{1, K}\right)$ — количество полученных комбинаций b_{ij}, K — номер крайней из полученных комбинаций направляющих косинусов.

Далее выполняется переход от элементов матрицы B к углам Эйлера:

$$\alpha^k = \arccos\left(b_{11}^k\right),$$

$$\varphi^k = \operatorname{arctg}\left(\frac{b_{21}^k}{b_{31}^k}\right) + \frac{\pi}{2}\left(1 - \operatorname{sign}\left(\mathrm{b}_{31}^k\right)\right),$$

$$\psi^k = \operatorname{arctg}\left(-\frac{b_{12}^k}{b_{13}^k}\right) + \frac{\pi}{2}\left(1 - \operatorname{sign}\left(-\mathrm{b}_{13}^k\right)\right).$$

Полученные комбинации углов проверяются на выполнение условий равновесия. Поскольку решение системы осуществляется численно, то для проверки используется следующий критерий: модуль разности между правой и левой частями уравнений системы (6) при подстановке соответвующей комбинации углов Элера должен быть меньше машинного нуля используемого математического пакета. Для Wolfram Mathematica 12 порядок малости машинного нуля по умолчанию равен 16 [17].

С помощью данного алгоритма можно исследовать положения равновесия НС с различными проектными параметрами. Для примера на рис. 2 приведены номограммы зависимости числа положений равновесия от поперечных моментов инерции. Области с одинаковым числом положений равновесия выделены соотвествующим цветом: 8 – синий, 12 – красным, 16 – зелёным, 20 – чёрным, 24 – розовым. Номограммы построены, для фиксированного смещения центра давления относительно центра масс вдоль продольной оси (Δx) и его различных смещений в поперечном направлении $(\Delta y, \Delta z)$. Рассматривался НС со следующими параметрами:

$$H = 400 \text{ км}, \rho = 2,79 \cdot 10^{-12}, \ \Delta x = -0,01 \text{ м},$$

$$J_x = 0,01 \ \frac{\text{кг}}{\text{м}^2}, \quad J_{xy} = J_{xz} = J_{yz} = 0,$$

$$l_x = 0,34 \text{ м}, l_y = 0,1 \text{ м}, l_z = 0,1 \text{ м}, c_0 = 2,2.$$

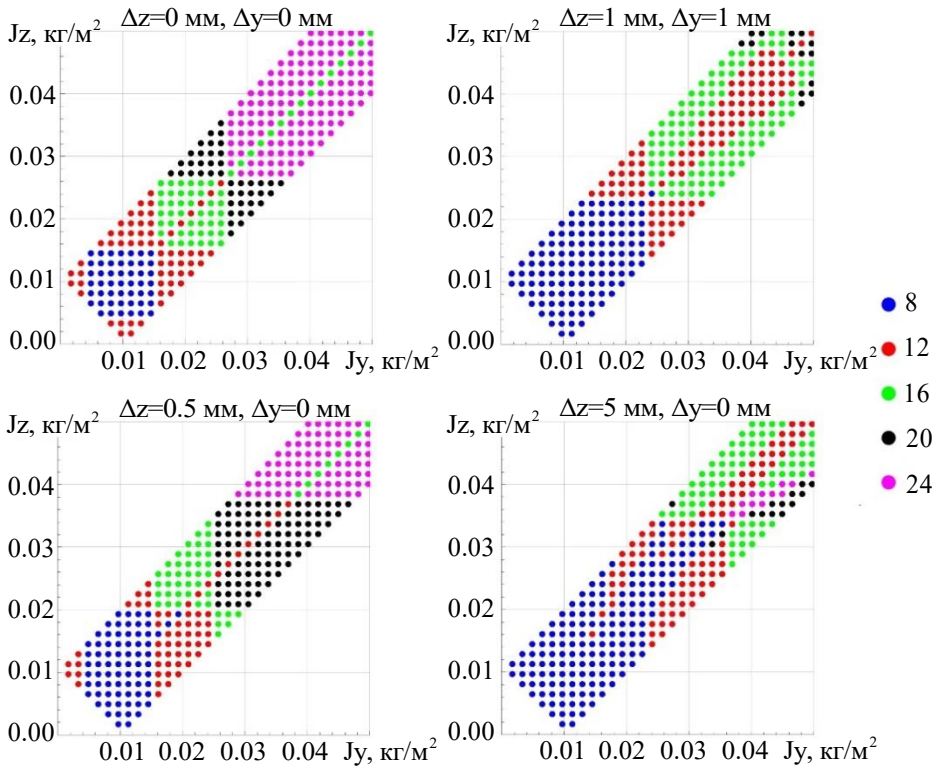


Рис. 2. Номограмма зависимости числа положений равновесия от поперечных моментов инерции для различных смещений центра давления относительно центра масс

В результате построения серии номограмм было выявлено, что знак координат смещения центра давления относительно центра масс не влияет на число положений равновесия. Также во всех номограммах присутствует ось симметрии фигуры, соответствующая частному случаю динамической симметрии НС, когда поперечные моменты инерции равны ($J_y = J_z$).

Алгоритм исследования устойчивости положений равновесия НС стандарта CubeSat под действием аэродинамического и гравитационного моментов. В работе [11] получены достаточные условия устойчивости найденных положений равновесия с использованием в качестве функции Ляпунова обобщённого интеграла энергии. В отличие от сферического спутника аэродинамический момент,

действующий на НС стандарта CubeSat не является потенциальным, а значит составить и исследовать приведенную потенциальную энергию аппарата для определения устойчивости его положений равновесия не представляется возможным.

В данной работе для определения устойчивости положений равновесия применяется численное интегрирование систем дифференциальных уравнений (3) и (4), с учётом следующих возмущений:

1) отклонение от положения равновесия на δ_1 для каждого из углов Эйлера в начальный момент времени;

2) задание проекций начальной угловой скорости аппарата в связанной с ним системе координат равными δ_2;

3) учёт изменения высоты орбиты, вызванного сопротивлением атмосферы.

Для моделирования изменения высоты орбиты, вызванного сопротивлением атмосферы, к системам (3)–(4) вводится дополнительное уравнение [20]:

$$\dot{H} = -\frac{2\sigma_x qV}{g},$$

где $g = g_0\left(\frac{R_з}{R}\right)^2$, g_0 — ускорение свободного падения на поверхности Земли, $\sigma_x = \frac{c_0 SS_x}{m}$ — баллистический коэффициент НС.

Для каждой комбинации углов Эйлера проводится численное моделирование на заданном интервале времени с учётом первого возмущения. Если амплитуда колебаний хотя бы по одному углу Эйлера превысит заданное пользователем отклонение ε, положение равновесия принимается неустойчивым и записывается в общий массив положений равновесия. Если амплитуды колебаний по всем углам не превышают ε, тогда проводится следующее моделирование с добавлением второго возмущения. Аналогично добавляется третье возмущение. Если при действии всех трёх возмущений амплитуды колебаний по всем трём углам не превышают ε, тогда положение равновесия принимается устойчивым, и записывается в общий массив положений равновесия.

Возмущения на начальные условия δ_1, δ_2 и ограничения по амплитудам колебаний ε подбираются в результате нескольких итераций численного моделирования и анализа полученных графиков углового движения таким образом, чтобы быстро отсеять неустойчивые положения равновесия и при этом не выйти за пределы колебательных областей в окрестности устойчивых положений равновесия для всего рассматриваемого диапазона высот.

С использованием разработанного алгоритма определены положения равновесия и исследована их устойчивость для НС формата CubeSat 3U со следующими характеристиками:

$$m = 3{,}5 \text{ м}, \quad l_x = 0{,}34 \text{ м}, \quad l_y = 0{,}1 \text{ м}, \quad l_z = 0{,}1 \text{ м}, \quad S = 0{,}01 \text{ м}^2,$$

$$J_x = 0{,}008 \text{ кг}\cdot\text{м}^2, \quad J_y = 0{,}039 \text{ кг}\cdot\text{м}^2, \quad J_z = 0{,}036 \text{ кг}\cdot\text{м}^2, \quad c_0 = 2{,}2,$$

$$J_{xy} = -0{,}0001 \text{ кг}\cdot\text{м}^2, \quad J_{xz} = 0{,}0003 \text{ кг}\cdot\text{м}^2, \quad J_{yz} = 0{,}0002 \text{ кг}\cdot\text{м}^2,$$

$$\Delta x = -0{,}011 \text{ м}, \quad \Delta y = -0{,}004 \text{ м}, \quad \Delta z = 0{,}045 \text{ м}.$$

Для данного моделирования брались следующие значения возмущений на начальные условия $\delta_1 = 1^0$, $\delta_2 = 0{,}001^0 / c$, ограничения по амплитудам колебаний $\varepsilon = 5^0$. На рисунках 3 – 5 приведены графики зависимости положений равновесия по углам атаки, прецессии и собственного вращения в зависимости от высоты полёта, красным точкам соответствуют устойчивые положения равновесия, черным неустойчивые. Плотность атмосферы рассчитывалась согласно ГОСТ 4401-81 [18]. По данным графикам можно определить высоты, на которых происходит переход между количествами положений равновесия для данного аппарата.

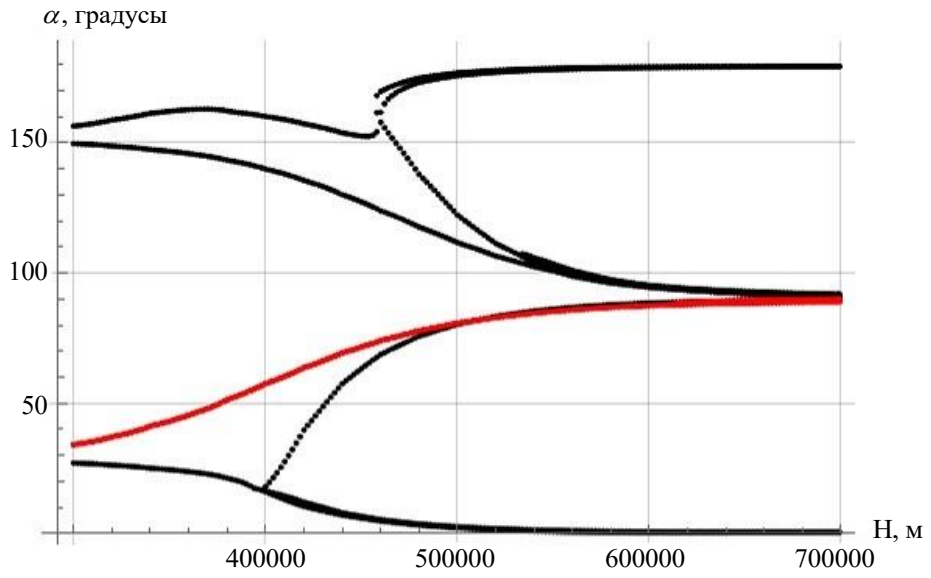


Рис. 3. Зависимость угла α от высоты полёта НС

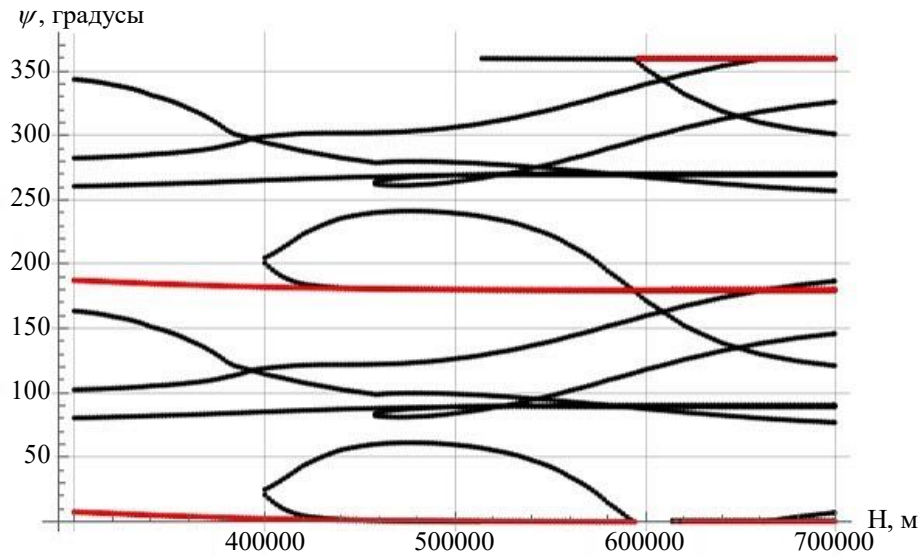


Рис. 4. Зависимость угла ψ от высоты полёта НС

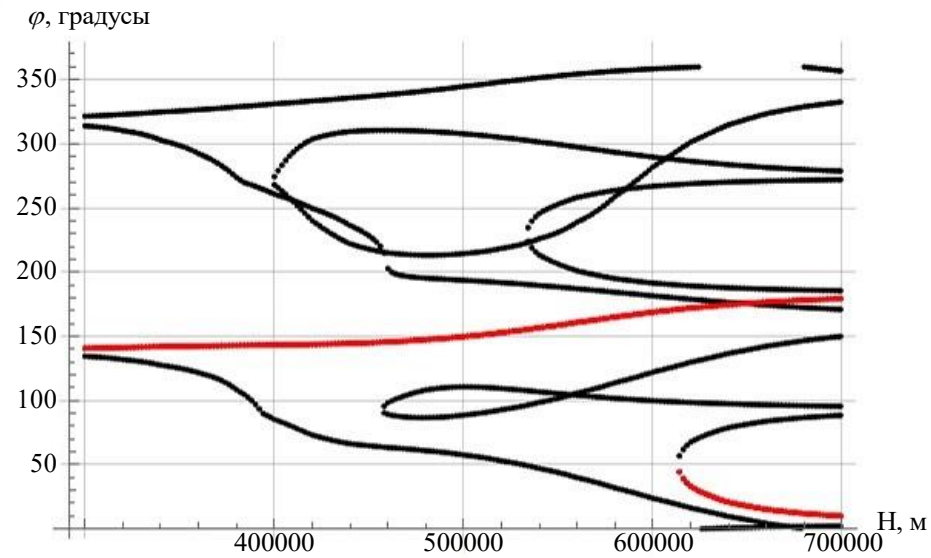


Рис. 5. Зависимость угла φ от высоты полёта НС

Выводы и рекомендации. Таким образом, в работе был разработан алгоритм численно-аналитического определения положений равновесия динамически несимметричного НС стандарта CubeSat с центробежными моментами инерции, когда его центр давления смещён относительно центра масс по трём координатам под действием аэродинамического и гравитационного моментов при движении по круговой орбите. Также был разработан алгоритм численного иссле-

дования устойчивости найденных положений равновесия, учитывающий различные возмущения такие как отклонение от положения равновесия, задание ненулевых начальных угловых скоростей и учёт изменения высоты орбиты.

Предложенный алгоритм позволяет обрабатывать большое количество данных за сравнительно небольшой промежуток времени и может быть полезен при разработке систем стабилизации и управления угловым движением, так как позвляет более полно увидеть картину неуправляемого движения НС под действием моментов внешних сил. Его можно использовать для предварительного проектирования НС.

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда № 23-67-10007, https://rscf.ru/project/23-67-10007/.

ЛИТЕРАТУРА

[1] California Polytechnic State University. *Cubesat Design Specification Rev 14.1*. 2022.

[2] He L., Chen X., Kumar K. D., Sheng T., Yue C. A novel three-axis attitude stabiliza-tion method using in-plane internal mass-shifting, *Aerospace Science and Technology*, 2019, vol. 92, pp. 489–500.

[3] Белоконов И.В., Тимбай И.А., Баринова Е.В. Выбор проектных параметров наноспутника формата CubeSat с пассивной системой стабилизации. *Гироскопия и навигация*, 2020, т. 28, № 1, с. 81–100.

[4] Баринова Е.В., Белоконов И.В., Тимбай И. Выбор проектных параметров наноспутников формата CubeSat 6U для обеспечения пассивной трёхосной стабилизации. *Космическая техника и технологии*, 2024, т. 45, № 2, с. 20–36.

[5] Psiaki M.L. Nanosatellite attitude stabilization using passive aerodynamics and active magnetic torqueing. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2004, vol. 27, no. 3, pp. 347–355.

[6] Rawashdeh S.A. Attitude analysis of small satellites using model-based simulation. *International Journal of Aerospace Engineering*, 2019, no. 1, pp. 1–11.

[7] Белецкий В.В. *Движение искусственного спутника относительно центра масс*. Москва, Наука, 1965, 416 с.

[8] Сарычев В.А., Овчинников М.Ю. Динамика спутника с пассивной аэродинамической системой ориентации. *Космические исследования*, 1994, т. 32, № 6, с. 561–575.

[9] Sarychev V.A. Investigation of equilibria of a satellite subjected to gravitational and aerodynamic torques. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 2007, vol. 97, no. 4, pp. 267–287.

[10] Сарычев В.А., Гутник С.А. Динамика спутника под действием гравитационного и аэродинамического моментов. Исследование положений равновесия. *Космические исследования*, 2015, т. 53, № 6, с. 488–496.

[11] Сарычев В.А., Гутник С.А. Динамика спутника под действием гравитационного и аэродинамического моментов. Исследование

устойчивости положений равновесия. *Космические исследования*, 2016, т. 54, № 5, с. 415–426.

[12] Баринова Е.В., Тимбай И.А. Положения относительного равновесия динамически симметричного наноспутника формата CubeSat под действием гравитационного и аэродинамического моментов. *Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение*, 2019, т. 18, № 2, с. 21–32.

[13] Barinova E.V., Timbai I.A. Determining of equilibrium positions of cubesat nanosatellite under the influence of aerodynamic and gravitational moments. *27th Saint Petersburg ICINS 2020*, Proceedings, 2020. DOI: 10.23919/ICINS43215.2020.9133842.

[14] Баринова Е.В., Белоконов И.В., Тимбай И.А. Предотвращение возможности возникновения резонансных режимов движения для низковысотных спутников класса CUBESAT. *Гироскопия и навигация*, 2021, т. 29, № 4, с. 115–133.

[15] Белецкий В.В. *Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле*. Москва, Изд-во МГУ, 1975, 308 с.

[16] Гантмахер Ф.Р. *Лекции по аналитической механике*. Москва, Наука, 1966, 300 с.

[17] Wolfram S. *An Elementary Introduction to the Wolfram Language*. Friesens. Manitoba, Canada, 2015, 339 p.

[18] ГОСТ 4401-81. Атмосфера стандартная. Параметры: утвержден и введен в действие Постановлением Государственного комитета СССР по стандартам от 27.02.1981 N 145: дата введения 1982-07-01.

[19] ГОСТ 25645.101-83. Атмосфера Земли верхняя. Модель плотности для проектных баллистических расчетов искусственных спутников Земли: утвержден и введен в действие Постановлением Государственного комитета СССР по стандартам от 08.09.1983 N 4155: дата введения 1985-01-01.

[20] Балк М.Б. Элементы динамики космического полета. Москва, Наука, 1965, 340 с.

Статья поступила в редакцию 25.10.2024

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Баринова Е.В., Тимбай И.А., Миронов Е. Численное исследование устойчивости положений равновесия наноспутника стандарта CubeSat под действием аэродинамического и гравитационного моментов. *Математическое моделирование и численные методы*, 2025, № 2, с. 82–101.

Баринова Елена Витальевна – канд. техн. наук, доцент, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева. e-mail: L5545@yandex.ru

Тимбай Иван Александрович – д-р техн. наук, доцент, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева. e-mail: timbai@mail.ru

Миронов Евгений – студент, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева. e-mail: mironovevgeniy01@gmail.com

Study of the stability of equilibrium positions of a CubeSat nanosatellite under the influence of aerodynamic and gravitational moments

© E.V. Barinova, I.A. Timbai, E. Mironov

Samara National Research University, Samara, 443086, Russia

To perform many target missions, it is necessary to ensure a given orientation of the spacecraft in space. In the case of small spacecraft, due to low energy reserves, it is advisable to use passive or combined stabilization systems. An important issue is the determination of stable equilibrium positions relative to the center of mass of the spacecraft. A feature of the dynamics of CubeSat nanosatellites is that the aerodynamic drag force depends on two orientation angles - the angle of attack and the angle of proper rotation, which is due to the shape of a rectangular parallelepiped. Also, due to the small size of nanosatellites, the effect of the aerodynamic moment is comparable to the effect of the gravitational moment for a larger range of altitudes compared to large-sized devices. This paper proposes an algorithm for the numerical and analytical determination of the equilibrium positions of a dynamically asymmetric CubeSat nanosatellite when the center of pressure is displaced from the center of mass along three axes of the body-fixed coordinate system. In addition, the developed algorithm makes it possible to take into account the presence of products of inertia in the body-fixed coordinate system, the axes of which are oriented along the building axes of the nanosatellite. Additionally, in this work, an algorithm for numerically studying the stability of the found equilibrium positions is proposed. The presented algorithms for determining the equilibrium positions and studying their stability make it possible to study uncontrolled motion under the influence of gravitational and aerodynamic moments for nanosatellites with various design parameters in a relatively short period of time. This work can be useful in the development of angular motion stabilization and control systems.

***Keywords**: CubeSat nanosatellite, aerodynamic moment, gravitational moment, angle of attack, angles of precession, angle of proper rotation, stability of equilibrium position*

REFERENCES

[1] California Polytechnic State University. *Cubesat Design Specification Rev 14.1*. 2022.

[2] He L., Chen X., Kumar K. D., Sheng T., Yue C. A novel three-axis attitude stabiliza-tion method using in-plane internal mass-shifting, *Aerospace Science and Technology*, 2019, vol. 92, pp. 489–500.

[3] Belokonov I. V., Timbai I.A., Barinova E. V. Design Parameters Selection for CubeSat Nanosatellite with a Passive Stabilization System. *Gyroscopy and Navigation*, 2020, vol. 11, no. 11, pp. 149–161.

[4] Barinova E.V., Belokonov I.V., Timbai I. Selection of design parameters for 6U CubeSat to ensure passive tree-axis stabilization. *Kosmicheskaya tekhnika i tekhnologii* [Space Engineering and Technology], 2024, vol. 45, no. 2, pp. 20–36.

[5] Psiaki M.L. Nanosatellite attitude stabilization using passive aerodynamics and active magnetic torqueing. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2004, vol. 27, no. 3, pp. 347–355.

[6] Rawashdeh S.A. Attitude analysis of small satellites using model-based simulation. *International Journal of Aerospace Engineering*, 2019, no. 1, pp. 1-11.

[7] Beletskii, V.V. Dvizhenie iskusstvennogo sputnika otnositel'no tsentra mass [*Motion of an Artificial Satellite Relative to the Center of Mass*]. Moscow, Nauka Publ., 1965, 416 c.

[8] Sarychev V.A., Ovchinnikov M.Y. Dynamics of a satellite with a passive aerodynamic orientation system. *Cosmic Research*, 1994, vol. 32, no. 6, pp. 561–575.

[9] Sarychev V.A. Investigation of equilibria of a satellite subjected to gravitational and aerodynamic torques. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 2007, vol. 97, no. 4, pp. 267–287.

[10] Sarychev V.A., Gutnik S.A. Dynamics of a satellite subject to gravitational and aerodynamic torques. Investigation of equilibrium positions. *Cosmic Research*, 2015, vol. 53, no. 6, pp. 488–496.

[11] Sarychev V.A., Gutnik S.A. Dynamics of a satellite subject to gravitational and aerodynamic torques. Investigation of equilibrium positions. *Космические исследования*, 2016, т. 54, № 5, с. 388–398.

[12] Barinova E.V., Timbai I.A. Relative equilibria of dynamically symmetric CubeSat nanosatellite under the action of aerodynamic and gravitational torques. *Vestnik of Samara University. Aerospace and Mechanical Engineering*, 2019, vol. 18, no. 2, pp. 21–32.

[13] Barinova E.V., Timbai I.A. Determining of equilibrium positions of cubesat nanosatellite under the influence of aerodynamic and gravitational moments. *27th Saint Petersburg ICINS 2020*, Proceedings, 2020. DOI: 10.23919/ICINS43215.2020.9133842.

[14] Barinova E.V., Belokonov I.V., Timbai I.A. Preventing resonant motion modes for low-altitude CubeSat nanosatellites. *Gyroscopy and Navigation*, 2021, vol. 12, no. 4, pp. 350–362.

[15] Beletskii V.V. *Dvizhenie sputnika otnositel'no tsentra mass v gravitacionnom pole* [Motion of a satellite relative to the center of mass in a gravitational field]. Moscow, Lomonosov Moscow State University Publ., 1975, 308 p.

[16] Gantmakher F.R. *Lektsii po analit-icheskoi mekhanike* [Lectures on analytical mechanics]. Moscow, Nauka Publ., 1966, 300 p.

[17] Wolfram S. *An Elementary Introduction to the Wolfram Language*. Friesens. Manitoba, Canada, 2015, 339 p.

[18] GOST 4401-81. *Atmosfera standartnaya. Parametry* [State Standard 4401-81. Atmosphere is standard. Parameters]: approved and put into effect by Resolution No. 145 of the USSR State Committee for Standards dated 02.27.1981: date of introduction 1982-07-01.

[19] GOST 25645.101-83. *Atmosfera Zemli verhnyaya. Model' plotnosti dlya proektnyh ballisticheskih raschetov iskusstvennyh sputnikov Zemli* [State Standard 25645.101-83. The Earth's atmosphere is upper. Density model for design ballistic calculations of artificial Earth satellites]: approved and put into effect by Resolution No. 4155 of the USSR State Committee for Standards dated 08.09.1983: date of introduction 1985-01-01.

[20] Balk M.B. *Elementy dinamiky kosmicheskogo poleta* [Elements of space flight dynamics]. Moscow, Nauka Publ., 1965, 340 p.

Barinova E.V., Cand. Sc. (Eng.), Associate Professor, Samara National Research University. e-mail: barinova.ev@ssau.ru

Timbai I.A., Dr. Sci. (Eng.), Professor, Samara National Research University. e-mail: timbai@mail.ru

Mironov E., magistrant of Samara National Research University. e-mail: mironovevgeniy01@gmail.com