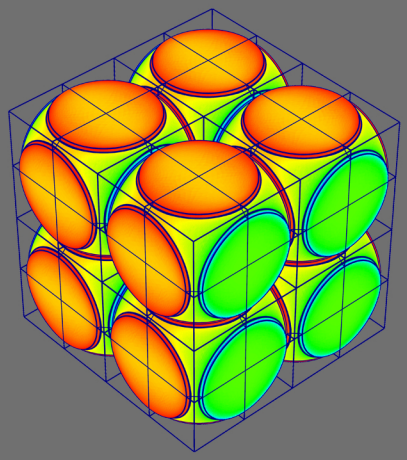
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Трубицын К.В. Метод дополнительных граничных условий в краевых задачах теплопроводности. Математическое моделирование и численные методы, 2025, № 2, с. 68–81.

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/375/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.217.22
18.11.2026 12:59:44

УДК 536.2 DOI: 10.18698/2309-3684-2025-2-6881

Метод дополнительных граничных условий в краевых задачах теплопроводности

© К.В. Трубицын

ФГБОУ ВО «СамГТУ», Самара, 443100, Россия

Разработан метод получения точных аналитических решений краевых задач математической физики, основанный на определении дополнительной граничной информации, позволяющей удовлетворять искомым решением исходное дифференциальное уравнение в граничных точках. Выполнение уравнения на границах приводит к его выполнению и внутри рассматриваемой области, исключая его непосредственное интегрирование по пространственной переменной. Собственные числа находятся из решения временно́го обыкновенного дифференциального уравнения относительно дополнительной функции, определённой в одной из граничных точек. Отметим, что в классических методах получения точных аналитических решений собственные числа находятся из краевой задачи Штурма-Лиувилля, определённой в области пространственных координат. Следовательно, в настоящей работе рассматривается другое направление определения собственных чисел, совпадающих с точными их значениями. Константы интегрирования обыкновенного дифференциального уравнения относительно дополнительной функции находятся из начального условия методом наименьших квадратов, позволяющим исключить определение сложных интегралов по пространственной переменной.

Ключевые слова: *краевая задача, точное решение, дополнительная граничная информация, метод наименьших квадратов*

Введение. В теории теплопроводности известны методы, основанные на определении интеграла теплового баланса [1 – 14]. Его использование связано с осреднением дифференциального уравнения краевой задачи. Выполнение уравнения в среднем приводит к низкой точности получаемых решений. Этот недостаток характерен практически для всех приближенных аналитических методов (Ритца, Галеркина, Л.В. Канторовича, интегрального метода теплового баланса – метод Т. Гудмена, М. Био и др.). Точность их решений с увеличением числа приближений возрастает незначительно, что связано с низкой точностью определения собственных чисел и собственных функций. Так как собственные числа находятся из выполнения уравнения краевой задачи, то, следовательно, повышение точности их определения связано с увеличением точности его выполнения во всех точках пространственной переменной и во всём диапазоне времени нестационарного процесса. Точность решений может быть повышена граничным выполнением уравнения при использовании дополнительных граничных условий (ДГУ). В работах [11, 12] дается математическое

обоснование выполнения уравнения внутри области при его выполнении в граничных точках. Выполнение уравнения на границах позволяет избежать нахождение сложных интегралов по пространственной переменной. Такой путь получения решения приводит к упрощению процесса получения собственных чисел, определяемых из решения обыкновенного дифференциального уравнения относительно дополнительной функции, зависящей от времени (в отличие от классических методов, в которых собственные числа находятся из решения краевой задачи Штурма – Лиувилля, определённой в области пространственных переменных). Константы интегрирования, появляющиеся в решении временно́го уравнения для дополнительной функции, с заданной степенью точности находятся из начального условия краевой задачи методом наименьших квадратов. Его применение позволяет избежать определения сложных интегралов по пространственной переменной, возникающих при выполнении начального условия в классических методах.

Математическая постановка задачи. Рассмотрим задачу теплопроводности для бесконечной пластины с симметричными граничными условиями первого рода в следующей математической постановке:

$$\frac{\partial T(x,\tau)}{\partial \tau} = a\frac{\partial^2 T(x,\tau)}{\partial x^2}; \qquad (1)$$

$$(\tau > 0;\ 0 < x < \delta)$$

$$T(x,0) = T_0; \qquad (2)$$

$$T(0,\tau) = T_{\text{ст}}; \qquad (3)$$

$$\frac{\partial T(\delta,\tau)}{\partial x} = 0, \qquad (4)$$

где T — температура, K; x — координата, $м$; τ — время, c; $a = \dfrac{\lambda}{c\rho}$ — коэффициент температуропроводности, $м^2/c$; λ — коэффициент теплопроводности, $Вт/(м \cdot K)$; c — теплоемкость, $Дж/(кг \cdot K)$; ρ — плотность, $кг/м^3$; T_0 — начальная температура, K; $T_{\text{ст}}$ — температура стенки, K; δ — половина толщины пластины, $м$.

Обозначим

$$\Theta = \frac{T - T_0}{T_{\text{ст}} - T_0};\ \ \xi = \frac{x}{\delta};\ \ \text{Fo} = \frac{a\tau}{\delta^2}, \qquad (5)$$

где Θ, ξ, Fo — безразмерные температура, координата, время.

С учетом (5) находим (рис. 1)

$$\frac{\partial\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}}=\frac{\partial^2\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^2};\tag{6}$$

$$(\mathrm{Fo}>0;\ \ 0<\xi<1);$$

$$\Theta(\xi,0)=0;\tag{7}$$

$$\Theta(0,\mathrm{Fo})=1;\tag{8}$$

$$\frac{\partial\Theta(1,\mathrm{Fo})}{\partial\xi}=0.\tag{9}$$

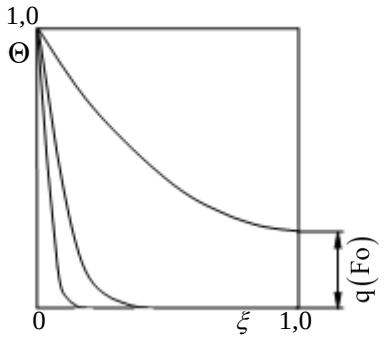


Рис. 1. Схема изменения температуры

Введём дополнительную функцию

$$q(\mathrm{Fo})=\Theta(1,\mathrm{Fo}).\tag{10}$$

Функция $q(\mathrm{Fo})$ описывает временно́е изменение температуры в точке $\xi=1$. Температура в этой точке – искомая величина задачи (6)-(9). Следовательно, её отдельное рассмотрение не вносит изменений в математическую постановку задачи, а лишь упрощает получение её решения.

Аналитическое решение задачи. Решение задачи (6)-(9) разыскивается в виде

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo})=1+\sum_{k=1}^{n}b_k(q)\phi_k(\xi),\tag{11}$$

где $b_k(q)$ — неизвестные функции; $\phi_k(\xi)=\sin(r\pi\xi/2)$, $(r=2k-1)$ — координатные функции.

Формула (11) удовлетворяет условиям (8), (9). Неизвестные $b_k(q)$ находятся из (10) и ДГУ, общие формулы для которых имеют вид [7]

$$\frac{\partial^i \Theta(0,\mathrm{Fo})}{\partial \xi^i} = 0,\ (i = 2,4,6,\ldots); \tag{12}$$

$$\frac{\partial^i \Theta(1,\mathrm{Fo})}{\partial \xi^i} = 0\ ,\ (i = 1,3,5,\ldots); \tag{13}$$

$$\frac{\partial^i q(\mathrm{Fo})}{\partial \mathrm{Fo}^i} = \frac{\partial^{2i} \Theta(1,\mathrm{Fo})}{\partial \xi^{2i}},\ (1,2,3,\ldots). \tag{14}$$

Отметим, что ДГУ вида (12), (13) решением (11) выполняются в любом приближении. При их получении были использованы исходные граничные условия (8), (9), дополнительная функция (10) и уравнение (6).

Дифференцируя (8)-(10) и получаемые затем ДГУ по переменной Fo, а уравнение (6) по переменной ξ, из сопоставления получаемых результатов находятся ДГУ (12)-(14), определённые лишь в граничных точках $\xi = 0$ и $\xi = 1$. Следовательно, их выполнение искомым решением (11) эквивалентно выполнению уравнения (6) в указанных граничных точках.

Учитывая, что ДГУ (12), (13) решением (11) удовлетворяются в любом приближении, независимо от величин неизвестных функций $b_k(q)$, эти функции будем находить из ДГУ (14), представляющего математическую запись уравнения (6) применительно к граничной точке $\xi = 1$ (при $i = 1$) и производных различного порядка от левой (производная по времени) и правой (производная по ξ) частей уравнения (6) (при $i = 2,3,4,\ldots$). Следовательно, выполнение ДГУ (14) эквивалентно выполнению уравнения (6) в этой граничной точке.

Решение в первом приближении. В первом приближении, подставляя (11) в (10), для $b_1(q)$ будем иметь алгебраическое уравнение

$$1 + b_1(q)\sin(\pi\xi/2)\big|_{\xi=1} = q(\mathrm{Fo}). \tag{15}$$

Его решение

$$b_1(q) = q(\mathrm{Fo}) - 1. \tag{16}$$

Соотношение (11) принимает вид

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo}) = 1 + (q(\mathrm{Fo}) - 1)\sin(\pi\xi/2). \tag{17}$$

Для определения $q(\mathrm{Fo})$ потребуем, чтобы невязка уравнения (6) во всей области изменения пространственной переменной $(0 \le \xi \le 1)$ была равна нулю

$$\frac{\partial\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}}-\frac{\partial^2\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial^2\xi}=0. \qquad (18)$$

Подставляя (17) в (18), находим

$$\frac{\partial q(\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}}\sin(\frac{\pi}{2}\xi)+\frac{\pi^2}{4}[q(\mathrm{Fo})-1]\sin(\frac{\pi}{2}\xi)=0. \qquad (19)$$

Очевидно, что в точке $\xi=0$ соотношение (19) удовлетворяется в предельном смысле (каждое его слагаемое равно нулю). Применительно к любой другой точке оно приводится к следующему обыкновенному дифференциальному уравнению относительно функции $q(\mathrm{Fo})$

$$\frac{\partial q(\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}}+\frac{\pi^2}{4}[q(\mathrm{Fo})-1]=0. \qquad (20)$$

Отметим, что получение уравнения (20) не связано с непосредственным интегрированием уравнения (6) по пространственной переменной. Не требуется также и выполнение осредненного уравнения (6) – интеграла теплового баланса, применяемого в [3 – 11].

Решение уравнения (20) имеет вид

$$q(\mathrm{Fo})=1+C_1\exp(-\nu_1\mathrm{Fo}), \qquad (21)$$

где C_1 — постоянная интегрирования; $\nu_1=\pi^2/4$ — первое собственное число, совпадающее с точным его значением [1, 2].

В классических методах собственные функции и собственные числа находятся из решения краевой задачи Штурма – Лиувилля, включающей уравнение второго порядка относительно пространственной переменной. Следовательно, в данном случае реализуется другой подход к определению собственных чисел – через решение временно́го обыкновенного дифференциального уравнения относительно дополнительной функции.

Подстановкой (21) в (17) получаем

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo})=1+C_1\exp\left(-\nu_1\mathrm{Fo}\right)\sin(\frac{\pi}{2}\xi). \qquad (21)$$

Соотношение (22) удовлетворяет уравнению (6) во всём диапазоне пространственной переменной $(0\le\xi\le1)$ при любых значениях постоянной интегрирования C_1. Следовательно, уравнение (6) выполнено, минуя процесс его непосредственного интегрирования по переменной ξ, что оказалось возможным благодаря выполнению решением (11) ДГУ (12) – (14), приводящему к выполнению уравнения на границах.

Постоянная C_1, находится из условия (7). Потребуем его выполнения в 10 точках области ($\xi = 0{,}1;\ 0{,}2;\ 0{,}3;\ \ldots;\ 1{,}0$, $i = \overline{1{,}10}$). Точка $\xi = 0$ исключается, ввиду невозможности одновременного выполнения условий (7) и (8) в начальный момент времени ($\mathrm{Fo} = 0$). Подставляя (22) в (7), положив $\mathrm{Fo} = 0$ и записывая полученное соотношение в указанных точках пространственной переменной, относительно C_1 будем иметь переопределённую систему, включающую десять алгебраических линейных уравнений. Найдём решение этой системы в смысле наименьшего квадратичного уклонения, то есть найдём минимум следующего функционала

$$I = \sum_{\mathrm{i}=1}^{10} [\Theta(\xi_i, 0)]^2 . \tag{22}$$

Подставляя (22) в (23), получаем

$$I = \sum_{\mathrm{i}=1}^{10} [1 + C_1 \sin(\frac{\pi\xi_i}{2})]^2 . \tag{23}$$

Определяя производную от I по C_1 и приравнивая полученное соотношение к нулю, относительно C_1 получаем алгебраическое уравнение. Его решение

$$C_1 = -\frac{\sum\limits_{i=1}^{10} \sin(\frac{\pi\xi_i}{2})}{\sum\limits_{i=1}^{10} \sin^2(\frac{\pi\xi_i}{2})} = -\sum_{i=1}^{10} \frac{1}{\sin(\frac{\pi\xi_i}{2})} . \tag{24}$$

Найденная по формуле (25) C_1 ($C_1 = -1{,}3$) незначительно отличается от точного её значения [1, 2]

$$C_1 = -\frac{4}{\pi} = -1{,}2732 .$$

Увеличивая число точек аппроксимации начального условия, точность определения C_1 можно увеличить, например, при 20 точках аппроксимации получаем

$$C_1 = -1{,}286931 . \tag{25}$$

Однако, точность уже полученной её величины вполне достаточна для решения задачи (6) – (9) в первом приближении, то есть при использовании лишь одного члена ряда (11).

Отличие расчётов по формуле (22) от точного решения [1, 2] не более 5 % (для $0{,}1 \le \mathrm{Fo} < \infty$) (рис. 2).

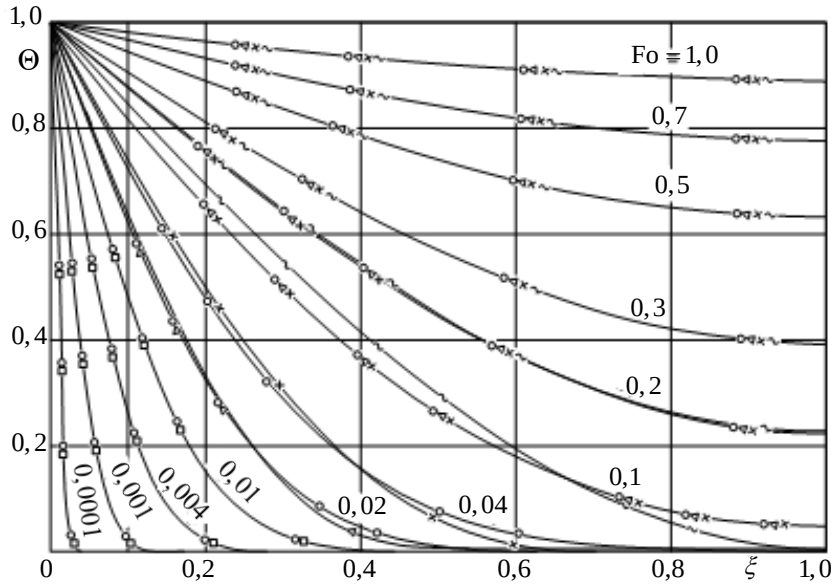


Рис. 2. Распределение температуры
~ — 1-ое приближение; × — 2-ое приближение (n = 2);
Δ — 3-е приближение (n = 3);
□ — по формуле (34) при n = 1000; ∘ — точное решение

Решение во втором приближении. Во втором приближении, подставив (11) в (10), (14) ($i=1$) для $b_1(q)$ и $b_2(q)$, определяемых из системы двух алгебраических уравнений, имеем

$$b_1(q) = -(4q' + 9\pi^2(q-1))/(8\pi^2);$$

$$b_2(q) = (4q' + \pi^2(q-1))/(8\pi^2);$$

$$q' = dq/d\mathrm{Fo}.$$

С их учётом соотношение (11) будет

$$\Theta(\xi, \mathrm{Fo}) = 1 - \frac{(4q' + 9\pi^2(q-1)\sin(\frac{\pi\xi}{2}) + (4q' + \pi^2(q-1)\sin(3\frac{\pi\xi}{2})}{8\pi^2}. \quad (26)$$

Подставляя (26) в (6), применительно к любой точке пространственной переменной ξ ($\xi \neq 0$) получаем

$$\frac{4}{3\pi^3}q'' + \frac{10}{3\pi}q' + \frac{3\pi}{4}(q-1) = 0, \quad (27)$$

где $q'' = d^2q/d\mathrm{Fo}^2$.

Интеграл уравнения (27) будет

$$q(\mathrm{Fo}) = 1 + C_1 \exp(-\nu_1 \mathrm{Fo}) + C_2(-\nu_2 \mathrm{Fo}), \qquad (28)$$

где C_1, C_2 — постоянные интегрирования, а

$$\nu_1 = \pi^2 / 4, \ \nu_2 = 9\pi^2 / 4$$

— первое и второе собственные числа, равные точным их значениям [1, 2].

Подставим (28) в (26)

$$\Theta(\xi, \mathrm{Fo}) = 1 - C_1 \exp\left(-\nu_1 \mathrm{Fo}\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}\xi\right) - C_2 \exp\left(-\nu_2 \mathrm{Fo}\right) \sin\left(\frac{3\pi}{2}\xi\right). \qquad (29)$$

Постоянные C_1, C_2 находятся из начального условия (7) с использованием метода наименьших квадратов. Требуя выполнения условия (7) в 10 точках области ($\xi = 0{,}1;\ 0{,}2;\ 0{,}3;\ \ldots;\ 1{,}0$, $i = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 10$), относительно C_1, C_2 получаем систему 10 алгебраических уравнений.

Подставляя (29) в (23), находим

$$I = \sum_{i=1}^{10} [1 - C_1 \sin(\frac{\pi}{2}\xi_i) - C_2 \sin(\frac{3\pi}{2}\xi_i)]^2. \qquad (30)$$

Вычисляя производные от I по C_1 и C_2 и приравнивая полученные соотношения к нулю, для C_1 и C_2 имеем систему двух алгебраических уравнений, из которой находим

$$C_1 = -1{,}252381;\ C_2 = 0{,}434768.$$

Точные значения C_1 и C_2 [10, 11]

$$C_1 = -1{,}27324;\ C_2 = 0{,}424413.$$

Выполняя начальное условие в 20 точках области (исключая точку $\xi = 1$), получаем

$$C_1 = -1{,}264259;\ C_2 = 0{,}430773.$$

Как видно, произошло уточнение констант интегрирования. Таким путём, увеличивая число точек аппроксимации начального условия, можно получить значения C_1 и C_2 практически с заданной точностью. Из расчётов по (29) следует, что для $0{,}02 \le \mathrm{Fo} < \infty$) отличие от точного решения [1, 2] не превышает 2 % (см. рис. 2).

Решение в третьем приближении. В третьем приближении подставляя (11) в (10), (14) (при $i = 1; 2$) для $b_k(q)$ имеем систему трёх алгебраических уравнений. Подставляя найденные $b_k(q)$ в (11) и тре-

буя выполнения уравнения (6) в любой из точек пространственной переменной $(\xi \neq 0)$, относительно $q(\mathrm{Fo})$ получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{4}{15\pi^5} q''' + \frac{7}{3\pi^3} q'' + \frac{259}{60\pi} q' + \frac{15}{16}\pi(q-1) = 0, \qquad (31)$$

где $q''' = d^3 q / d\mathrm{Fo}^3$.

Интегрируя уравнение (31) и подставляя полученное выражение в (11), получаем решение в третьем приближении

$$\Theta(\xi, \mathrm{Fo}) = 1 + C_1 \exp(-\nu_1 \mathrm{Fo}) \sin\left(\frac{\pi}{2}\xi\right) - C_2 \exp(-\nu_2 \mathrm{Fo}) \sin\left(\frac{3\pi}{2}\xi\right) + C_3 \exp(-\nu_3 \mathrm{Fo}) \sin\left(\frac{5\pi}{2}\xi\right), \qquad (32)$$

где $\nu_1 = \frac{\pi^2}{4}$, $\nu_2 = \frac{9\pi^2}{4}$, $\nu_3 = \frac{25\pi^2}{4}$ — первое, второе и третье собственные числа, равные точным их значениям [1, 2]; C_1, C_2, C_3 — постоянные интегрирования.

Для определения постоянных интегрирования, принимая 10 точек аппроксимации начального условия (7), подставим (32) в (23)

$$I = \sum_{i=1}^{10} [1 + C_1 \sin(\frac{\pi}{2}\xi_i) - C_2 \sin(\frac{3\pi}{2}\xi_i) + C_3 \sin(\frac{5\pi}{2}\xi_i)]^2. \qquad (33)$$

Приравнивая к нулю производные от I по C_1, C_2, C_3, получаем систему трёх алгебраических уравнений. Её решение:

$$C_1 = -1,284265;\ C_2 = 0,4244132;\ C_3 = -0,255065.$$

Точные их значения [10, 11]:

$$C_1 = -1,278555;\ C_2 = 0,41647;\ C_3 = -0,257337.$$

Принимая 20 точек аппроксимации, имеем:

$$C_1 = -1,278555;\ C_2 = 0,41647;\ C_3 = -0,257337.$$

Как видно, полученные значения C_1, C_2 и C_3 отличаются от точных лишь в третьем знаке. Отметим, что полученная точность постоянных интегрирования для третьего приближения решения (11) вполне достаточна.

Из (32) следует, что при $0,01 \leq \mathrm{Fo} < \infty$ расхождение с точным решением [1, 2] не более 1 %.

Используя (22), (29), (32), можно получить общую формулу решения

$$\Theta(\xi, \mathrm{Fo}) = 1 - \sum_{k=1}^{n} A_k \exp\left(-\nu_k \mathrm{Fo}\right) \sin\left(\frac{r\pi}{2}\xi\right), \qquad (34)$$

где $A_k = 4(-1)^{k+1}/(r\pi)$, $\nu_k = r^2\pi^2/4$, $(r = 2k-1;\ k = \overline{1,n})$.

В решении (34) формулы для A_k и ν_k совпадают с точными их формулами [1, 2]. Приближение к точной формуле для A_k выполняется уточнением констант интегрирования методом наименьших квадратов путём увеличения числа точек аппроксимации начального условия.

Обсуждение результатов. Полученные выше результаты, связанные с нахождением точного аналитического решения задачи теплопроводности для бесконечной пластины, позволяют заключить, что выполнение исходного дифференциального уравнения во всей области изменения пространственной переменной можно обеспечить его выполнением лишь в граничных точках путём выполнения искомым решением дополнительных граничных условий. Выполнение в граничных точках ДГУ эквивалентно выполнению в них исходного дифференциального уравнения, что приводит к его выполнению и внутри рассматриваемой области, не прибегая к его непосредственному интегрированию по пространственной переменной.

В данном случае также нет необходимости определения интеграла теплового баланса – осредненного по пространственной переменной исходного дифференциального уравнения (реализация интегрального метода теплового баланса), что позволяет избежать определение сложных интегралов по пространственной переменной и значительно упростить процесс получения временно́го обыкновенного дифференциального уравнения относительно дополнительной функции. Эта функция вводится в одной из граничных точек (при $\xi = 1$) и представляет изменение температуры во времени в этой точке. Её использование позволяет свести решение исходного дифференциального уравнения в частных производных к интегрированию временно́го обыкновенного дифференциального уравнения, из которого находятся собственные числа краевой задачи.

Отметим, что в классических методах собственные числа находятся из решения краевой задачи штурма Штурма – Лиувилля, определённой в области пространственных переменных. Следовательно, в данном случае рассматривается другое направление определения собственных чисел, основанное на решении обыкновенного дифференциального уравнения относительно дополнительной функции. Константы интегрирования этого уравнения с заданной точностью находятся из выполнения начального условия методом наименьших квадратов, позволяющим избежать определения сложных интегралов

по пространственной переменной при сохранении аналитической формы получаемого решения.

Выводы и рекомендации

1. Путём использования дополнительной функции и дополнительных граничных условий получено точное аналитическое решение задачи теплопроводности для пластины с симметричными граничными условиями первого рода. Применение ДГУ позволяет выполнить исходное уравнение во всей области изменения пространственной переменной $\left(0 \le \xi \le 1\right)$ без проведения непосредственного интегрирования по ней. В связи с чем, процесс получения аналитического решения сводится лишь к интегрированию обыкновенного дифференциального уравнения относительно дополнительной функции, изменяющейся лишь во времени. Из его решения находятся собственные числа, получаемые в классических методах из решения задачи Штурма – Лиувилля, определённой в пространственных переменных. Следовательно, в настоящей работе приводится другой способ определения собственных чисел, основанный на решении временного уравнения для дополнительной функции.

2. Постоянные интегрирования находятся путём выполнения начального условия методом наименьших квадратов, позволяющим находить их значения, практически с заданной точностью. Преимущество такого способа их определения заключается в отсутствии необходимости нахождения интегралов в пределах области изменения пространственной переменной при сохранении аналитического вида решения.

3. Ввиду отсутствия необходимости разделения переменных в исходном дифференциальном уравнении рассмотренный метод может быть применен к решению краевых задач, не допускающих применения классических точных аналитических методов (нелинейные, с переменными физическими свойствами среды, с нелинейными источниками теплоты и др.).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Карташов Э.М. *Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел*. Москва, Высшая школа, 2001, 550 с.

[2] Лыков А.В. *Теория теплопроводности*. Москва, Высшая школа, 1967, 600 с.

[3] Беляев Н.М., Рядно А.А. *Методы нестационарной теплопроводности.* Москва, Высшая школа, 1978, 328 с.

[4] Био М. *Вариационные принципы в теории теплообмена.* Москва, Энергия, 1975, 208 с.

[5] Глазунов Ю.Т. *Вариационные методы.* Москва, Ижевск, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2006, 470 с.

[6] Гудмен Т. Применение интегральных методов в нелинейных задачах нестационарного теплообмена. *Проблемы теплообмена: сб. науч. тр.* Москва, Атомиздат, 1967, с. 41-96.

[7] Кудинов И.В., Еремин А.В., Трубицын К.В., Стефанюк Е.В.. *Модели термомеханики с конечной и бесконечной скоростью распространения теплоты*. Москва, Проспект, 2020, 244 с.

[8] Кудинов В.А., Аверин Б.В., Стефанюк Е.В., Назаренко С.А. *Аналитические методы теплопроводности*. Самара, СамГТУ, 2004, 209 с.

[9] Стефанюк Е.В., Кудинов В.А. Получение приближенных аналитических решений при рассогласовании начальных и граничных условий в задачах теории теплопроводности. *Известия высших учебных заведений. математика. Математика,* 2010, № 4, с. 63-71.

[10] Кудряшов Л.И., Меньших Н.Л. *Приближенные решения нелинейных задач теплопроводности.* Москва, Машиностроение, 1979, 232 с.

[11] Кудинов И.В., Котова Е.В., Кудинов В.А. Метод получения аналитических решений краевых задач на основе определения дополнительных граничных условий и дополнительных искомых функций. *Сибирский журнал вычислительной математики,* 2019, т. 22, № 2, с. 153-165.

[12] Федоров Ф.М. *Граничный метод решения прикладных задач математической физики.* Новосибирск, Наука, 2000, 220 с.

[13] Sobolev S.L. Nonlocal diffusion models: Application to rapid solidification of binary mixtures. *International Journal of Heat and Mass Transfer,* 2014, no. 71, pp. 295-302.

[14] Сорокин В.Г. Аналитические решения нелинейных уравнений с запаздыванием, используемых при математическом моделировании процессов переноса. *Математическое моделирование и численные методы,* 2024, № 3, с. 140-167.

Статья поступила в редакцию 24.07.2024

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Трубицын К.В. Метод дополнительных граничных условий в краевых задачах теплопроводности. *Математическое моделирование и численные методы*, 2025, № 2, с. 68–81.

Трубицын Константин Викторович – канд. экон. наук, доцент, декан «Теплоэнергетического факультета» ФГБОУ ВО «СамГТУ». e-mail: Trubitsyn.KV@samgtu.ru

Method of additional boundary conditions in boundary value problems of thermal conductivity

© K.V. Trubitsyn

Samara State Technical University, Samara, 443100, Russia

A method has been developed for obtaining exact analytical solutions to boundary value problems of mathematical physics, based on determining additional boundary information that allows the original differential equation to satisfy the required solution at boundary points. Execution of the equation on the boundaries leads to its execution in-

side the region under consideration, excluding its direct integration over the spatial variable. The eigenvalues are found from the solution of a time ordinary differential equation with respect to an additional function defined at one of the boundary points. Note that in classical methods for obtaining exact analytical solutions, the eigenvalues are found from the Sturm-Liouville boundary value problem defined in the domain of spatial coordinates. Consequently, in this work we consider another direction in determining eigenvalues that coincide with their exact values. The integration constants of an ordinary differential equation with respect to an additional function are found from the initial condition using the least squares method, which makes it possible to eliminate the determination of complex integrals over a spatial variable.

***Keywords**: boundary value problem, exact solution, additional boundary information, least squares method*

REFERENCES

[1] Kartashov E.M. *Analiticheskie metody v teorii teploprovodnosti tverdyh tel* [Analytical methods in the theory of thermal conductivity of solids]. Moscow, Higher School Publ., 2001, 550 p.

[2] Lykov A.V. *Teoriya teploprovodnosti* [Thermal conduction theory]. Moscow, Higher School Publ., 1967, 600 p.

[3] Belyaev N.M., Ryadno A.A. *Metody nestacionarnoj teploprovodnosti* [Transient thermal conduction methods]. Moscow, Higher School Publ., 1978, 328 p.

[4] Bio M. *Variacionnye principy v teorii teploobmena* [Variational principles in the theory of heat transfer]. Moscow, Energiya [Energy], 1975, 208 p.

[5] Glazunov Yu.T. *Variacionnye metody* [Variational methods]. Moscow, Izhevsk, SIC «Regulyarnaya i haoticheskaya dinamika», Institute for Computer Research, 2006, 470 p.

[6] Gudmen T. *Primenenie integral'nyh metodov v nelinejnyh zadachah nestacionarnogo teploobmena. Heat transfer problems: collection of scientific papers.* Moscow, Atomizdat, 1967, pp. 41-96.

[7] Kudinov I.V., Eremin A.V., Trubicyn K.V., Stefanyuk E.V. *Modeli termomekhaniki s konechnoj i beskonechnoj skorost'yu rasprostraneniya teploty* [Models of thermomechanics with finite and infinite speed of heat propagation]. Moscow, Prospekt, 2020, 244 p.

[8] Kudinov V.A., Averin B.V., Stefanyuk E.V., Nazarenko S.A. *Analiticheskie metody teploprovodnosti* [Analytical methods of thermal conductivity]. Samara, SamGTU, 2004, 209 p.

[9] Stefanyuk E.V., Kudinov V.A. Approximate analytic solution of heat conduction problems with a mismatch between initial and boundary conditions. *Russian Mathematics*, 2010, № 4, pp. 63-71.

[10] Kudryashov L.I., Men'shih N.L. *Priblizhennye resheniya nelinejnyh zadach teploprovodnosti* [Approximate solutions of nonlinear heat conduction problems]. Moscow, Mashinostroenie, 1979, 232 p.

[11] Kudinov I.V., Kotova E.V., Kudinov V.A. A method for obtaining analytical solutions to boundary value problems by defining additional boundary conditions and additional sought-for functions. *Numerical Analysis and Applications*, 2019, vol. 22, no. 2, pp. 153-165.

[12] Fedorov F.M. *Granichnyj metod resheniya prikladnyh zadach matematicheskoj fiziki* [Boundary boundary method for solving problems of applied mathematical physics]. Novosibirsk, Nauka Publ., 2000, 220 p.

[13] Sobolev S.L. Nonlocal diffusion models: Application to rapid solidification of binary mixtures. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2014, no. 71, pp. 295-302.

[14] Sorokin V.G. Analytical solutions of nonlinear transport equations with delay. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2024, no. 3, pp. 140-167.

Trubitsyn K.V., Cand. Sc. (Econ.), Associate Professor, Dean of the Heat Power Department Samara State Technical University. e-mail: Trubitsyn.KV@samgtu.ru