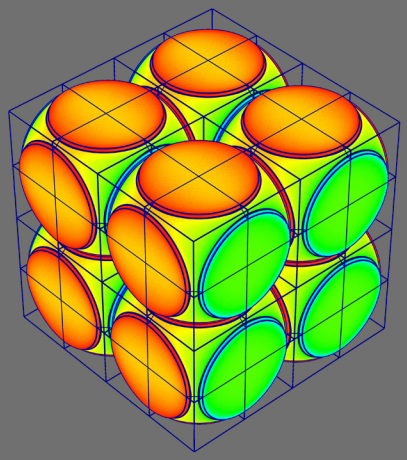
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Тлибеков А.Х. Алгоритм решения некорректной обратной задачи проектирования машиностроительного производства. Математическое моделирование и численные методы, 2025, № 1, с. 116–133.

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/370/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.216.68
26.11.2026 13:44:16

УДК 519.651 DOI: 10.18698/2309-3684-2025-1-116133

Алгоритм решения некорректной обратной задачи проектирования машиностроительного производства

© А.Х. Тлибеков

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Рассматривается алгоритм идентификации параметров математической модели на основе экспериментальных данных, образующих матрицу независимых переменных и вектор исследуемых откликов эксперимента. Математическая модель нелинейна, алгоритм ее решения неустойчив. Рассматриваемые условия характерны для обратных задач математической физики. К необходимости решения аналогичных задач приводят результаты натурных экспериментов или информация, хранящаяся в базах характеристик производственных процессов машиностроительного завода, которую используют для оптимального проектирования нового или модернизации существующего производства. Математическая модель, аппроксимирующая независимые переменные и исследуемые отклики представлена модифицированным дробно-степенным рядом от нескольких переменных. Разработан алгоритм поиска коэффициентов и степеней дробно – степенного ряда. Использован итерационный метод, содержащий блоки случайного поиска, глобальной оптимизации, основанной на условии Липшица и решения системы линейных алгебраических уравнений. Выполнено тестирование алгоритма. Эффективность оценивалась по максимальной относительной погрешности расчета исследуемых откликов и по времени выполнения расчетов.

Ключевые слова: *обратная задача, дробно-степенной ряд, глобальная оптимизация, идентификация, условие Липшица, пространство поиска, интервал неопределенности, целевая функция*

Введение. На машиностроительных заводах формируются базы показателей производственных процессов, характеризующие условия производства деталей. В этих базах «характеристик производства» ценная информация для проектирования нового или модернизации существующего производства. Они содержат фактические данные, полученные в результате длительной эксплуатации оборудования в сложившихся производственных условиях.

Базы характеристик производства сформированы в виде таблицы, по строкам которой для каждой изготавливаемой детали записаны характеристики технологического процесса и результаты эксплуатации оборудования. Если в каждой строке выделить множества «независимых переменных» и вектор «исследуемых откликов», получим задачу идентификации параметров математической модели. Поставленная задача соответствует обратным задачам математической физики, решение которых заключается в определении параметров неко-

торой математической модели по известным входным переменными и выходным исследуемым откликам.

Представим модель в виде дробно-степенного ряда от нескольких независимых переменных, у которого требуется определить коэффициенты и степени, т. е. как задачу математического программирования. Целевая функция задачи составлена из рассогласований между результатами расчета по дробно-степенному ряду исследуемых откликов и значениями этих-же исследуемых откликов из базы характеристик производства. Задача многопараметрическая и многокритериальная: рассматривается большое количество параметров (коэффициентов и степеней дробно-степенного ряда), при изменении которых в заданных пределах, целевая функция задачи, составленная из конечного числа критериев, стремится к минимуму.

Проблема состоит в выборе наилучшего решения некорректно поставленной задачи, когда независимые переменные по столбцам матрицы заданы с неравномерной дискретизацией, присутствуют разнонаправленные их изменения, а значения меняются в широких пределах. Гиперповерхность, задаваемая целевой функцией, образована несколькими локальными минимумами (мультимодальность). При этом один из минимумов глобальный, соответствует решению задачи и существует вероятность определения одного из локальных минимумов как глобального.

Среди методов решения многопараметрических, многокритериальных и мультимодальных задач наиболее эффективны численные методы, выполняемые по алгоритмам многомерной глобальной оптимизации. Алгоритмы содержат блоки, исследующие пространство поиска и определяющие направление изменения варьируемых параметров, преобразующие нелинейную математическую модель в систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) и выполняющие варьирование параметров случайным поиском, или его модификациями в виде генетических алгоритмов, методов пчелиного роя (роя частиц) и др. Решение такой задачи, поставленной применительно к проектированию машиностроительного производства, предоставляет информацию о оптимальных направлениях проектирования.

Постановка задачи. Статья продолжает исследования, начатые в работе [1] на случай некорректной обратной задачи глобальной оптимизации. Разрабатывается алгоритм идентификации параметров математической модели $W\left(x_{i,j}\right)$ от матрицы независимых переменных

$$\left(x_{i,j}\right)_{i=1,\,j=1}^{n\times m} \in R$$

и вектора исследуемых откликов $F_i \in R$ (рис. 1).

Модель нелинейна. Шаг в пределах каждого j – го столбца матрицы $\Delta x_i = x_{i+1,\,j} - x_{i,\,j}$ и шаг между исследуемыми откликами

$$\Delta F_i = F_{i+1} - F_i \ \left(i = \overline{1,\, n-1}\right)$$

может быть положительный $\left(\Delta x_{i,\,j} > 0,\ \Delta F_i > 0\right)$, отрицательный $\left(\Delta x_{i,\,j} < 0,\ \Delta F_i < 0\right)$ либо равный нулю $\left(\Delta x_{i,\,j} = 0,\ \Delta F_i = 0\right)$, причем существуют равнонаправленные, разнонаправленные и нулевые вариации шага с неравномерной дискретизацией.

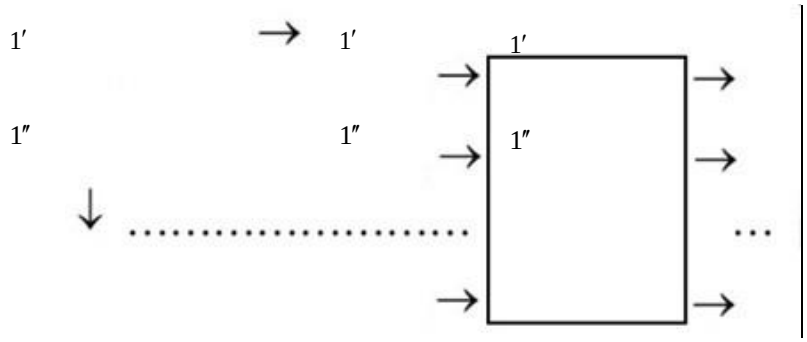


Рис. 1. Схема нелинейного объекта исследования с матрицей входных переменных и вектором выходных исследуемых откликов

Установить взаимосвязь исследуемых откликов с независимыми переменными не является конечной целью. Успех идентификации определяет величина относительной погрешности

$$\varepsilon_i = \left(F_i - W_i\right)/F_i \ .$$

Когда независимые переменные по столбцам матрицы заданы с неравномерной дискретизацией, наблюдаются разнонаправленные их изменения и значения меняются в широких пределах

$$1 \le \Delta D_j = \frac{x_j^{\max}}{x_j^{\min}} \le M_j \,,\ \ j = \overline{1, m} \,,$$

где $x_j^{\min}$ и $x_j^{\max}$ минимальное и максимальное значения, $M_j \ge 1$, задача некорректно поставлена, алгоритм ее решения неустойчив, а в случае корректного окончания расчета относительная погрешность, как правило, недопустима для прикладного использования модели.

Численные методы решения некорректной обратной задачи глобальной оптимизации. Построение вычислительного процесса поиска глобального экстремума многоэкстремальной функции на основе условия Липшица приносит множество преимуществ алгорит-

мам оптимизации [2]. Использование этих констант обеспечивает простой способ контроля ограничений, уменьшает эффект неопределенности исходных данных, что обеспечивает значительное повышение производительности вычислений.

Исследованы схемы решения задач глобальной оптимизации с адаптивной редукцией (уменьшением) размерности методом кривых Пеано (заполняющая пространство кривая) и рекурсивной (вычислимой) оптимизации с алгоритмом глобального поиска [3]. Использование этих методов, когда выполняется условие Липшица, позволяет свести решение многомерной задачи к решению эквивалентной ей одномерной. Вычислительные эксперименты на серии тестовых задач показывают, что использование адаптивной схемы редукции размерности может значительно сократить число итераций, необходимое для решения задачи с заданной точностью.

1) Решение задачи многомерной глобальной оптимизации с целевой функцией, заданной как «черный ящик» и удовлетворяющей условию Липшица выполнено объединением алгоритма глобального поиска с методом Хука – Дживса [4].

На подготовительном шаге алгоритма проводятся предварительные вычисления целевой функции в произвольных точках пространства поиска, для которых вычисляются нижние оценки констант Гельдера:

– образуются интервалы поиска;

– вычисляются «характеристики» интервала, определяемые его длиной, значениями целевой функции на границах интервала, константами Гельдера и размерностью пространства поиска;

– выбирается интервал с наибольшей характеристикой и рассчитывается координата, доставляющая целевой функции минимальное значение;

– по результатам итераций поиска строится дерево решений;

– определяется необходимость запускать локальный метод поиска и, если необходимость существует, из рассчитанной таким образом координаты, выполняется поиск глобального минимума целевой функции методом Хука-Дживса.

Предложенный алгоритм позволяет выявить и обойти области притяжения локальных минимумов. Вычислительные эксперименты, выполненные решением сотен тестовых многоэкстремальных задач оптимизации [5], показали уменьшение числа необходимых итераций в сравнении с известными методами глобального поиска экстремума.

2) Двухточечный диагональный метод DIRECT липшицевой глобальной оптимизации в гиперинтервале [6] не использует значения константы Липшица L для вычисления нижней оценки значений целевой функции S^{-}. Значение L считается неизвестным и может быть любым числом из диапазона $[0, \infty)$.

Метод DIRECT принципиально отличается от других методов липшицевой оптимизации именно отказом от использования конкретных значений константы L. Используется адаптивное разбиение пространства поиска на гиперинтервалы, в центральных точках которых проводятся расчеты S^{-}. Поскольку значение L считается неизвестным, разбиение пространства поиска основано на двух принципах: недоминируемости гиперинтервалов и достаточного улучшения достигнутого минимального значения S^{-}.

Недоминируемость гиперинтервалов означает, что существует такое $L \in [0, \infty)$, которое доставляет S^{-} минимальное значение, рассчитанное на всех итерациях по всем гиперинтервалам пространства поиска, а достаточная улучшение - что хотя бы при некоторых значениях L и заданных $\eta > 0$ должно выполняться условие:

$$S^{-} \le S_{*}^{k} - \eta, S_{*}^{k} = \min\left\{S\left(x^{i}\right) : i = 1, \ldots, n\right\},$$

где x_i — точки, в которых выполнены расчеты, n — их число.

Гиперинтервалы, удовлетворяющие этим условиям, называют потенциально оптимальными. Именно такие гиперинтервалы выбираются для деления на очередной итерации.

3) В методе ExDIR-diag используется двухточечное диагональное обобщение метода DIRECT. Учитывается два дополнительных фактора: наличия функциональных ограничений и расчет функций в гиперинтервале в двух точках на концах специально ориентируемых главных диагоналей. Поскольку метод ExDIR-diag не оценивает константы Липшица, то несмотря на разрывы пространства поиска не происходит остановка вычислений.

4) Решение задач глобальной оптимизации, целевая функция которых определяется как «черный ящик», может быть, недифференцируемой и многоэкстремальной требует больших вычислительных затрат [7, 8]. Для определения областей притяжения локальных минимумов используется алгоритм дерева решений.

Основная идея заключается в том, что целевая функция рассматривается как реализация некоторого случайного процесса. Решающие правило алгоритма построения сетки: следующая точка сетки соответствует точке минимума математического ожидания значений целевой функции. Для поиска минимума по параллельному алгоритму используется две оценки константы Липшица, одна из которых значительно больше другой. На каждой итерации определяются интервалы пространства поиска, в которых параллельно проводятся вычисления значений целевой функции (потоки вычислений).

На суперкомпьютере «Лобачевский» проведены вычислительные эксперименты, показавшие ускорение сходимости алгоритма. Тестовые многоэкстремальные задачи были усложнены дополнительными

вычислениями, не меняющими точку ее глобального минимума. Число итераций, требующихся для решения этих задач с помощью последовательного алгоритма с двойной оценкой константы Липшица, сократилось более чем в 3.7 раза по сравнению с базовым последовательным алгоритмом глобального поиска. Ускорение вычислений наблюдалось при использовании небольшого (до 32) числа потоков вычислений. Дальнейшее увеличение числа потоков вычислений снижает эффективность распараллеливания.

Предварительное численное моделирование. Решение обратной задачи вычислительной диагностики потока теплоносителя в замкнутом циркуляционном контуре выполнено методами оптимизации [9 - 11]. Частные критерии эффективности представлены непрерывными, липшицевыми, не всюду дифференцируемыми, многоэкстремальными функциями.

Математическая модель описывается операторным уравнением

$$Ax = y, \quad x \in X, \quad y \in Y,$$

где X, Y — гильбертовы пространства; A — линейный оператор.

Правая часть операторного уравнения представляет исследуемые отклики. Предполагается, что погрешность δ задания входной информации известна и имеет место неравенство

$$\left\| y^{\delta} - y \right\| < \delta .$$

Требуется определить устойчивые приближенные решения по заданной приближенной информации y^{δ}. Разработаны новые гибридные алгоритмы, содержащие блоки стохастического сканирования пространства поиска и детерминированные методы градиентного локального поиска. Показана возможность идентификации аномалий фазового состава теплоносителя в контуре реакторной установки с достаточной для приложений точностью.

На основе вычислительных экспериментов с использованием тестовых функций проведено сравнение алгоритмов метода ψ — преобразования и метода «роя частиц» [12]. Предложена модификация алгоритма метода ψ — преобразования. Показано, что при одном и том же количестве вычислений погрешность найденных исследуемых откликов тестовых функций относительно теоретических, полученная с помощью модифицированного метода ψ — преобразования, меньше полученной методом роя частиц. При выполнении вычислительных экспериментов наблюдалась погрешность около 35 %.

Идентификация на основе интегростепенных рядов Вольтерры [13] соответствует отображению нелинейного динамического процесса типа «вход–выход» и является обратной, некорректно поставленной задачей, где входные и выходные параметры представлены

векторами со случайной величиной компонентов. Исследованы вычислительные качества идентификации на примерах модели из двух интегральных уравнений, редуцированных в СЛАУ. Полустатистический методом решения интегральных уравнений обеспечил среднюю относительную погрешность в узлах сетки первого интегрального уравнения $\varepsilon_1 = 5,3\ \%$, второго $\varepsilon_2 = 9,7\ \%$. Метод центральных прямоугольников уменьшает погрешность решения до $\varepsilon_1 = 3,4\ \%$, $\varepsilon_2 = 4,8\ \%$, а методом Гаусса до $\varepsilon_1 = 0,34\ \%$, $\varepsilon_2 = 0,4\ \%$.

Идентификация параметров движения при их регистрации в эксперименте с большой дискретностью выполнена пошаговыми вычислениями над последовательностями данных с интервалами (маршевый метод [14, 15]). В пределах интервала выполнялась кусочно-полиномиальная аппроксимация данных, позволявшая составить и решить СЛАУ. Показана несостоятельность такой схемы вычислений: образуется лавинообразный процесс накопления погрешности.

Практически значимые результаты получены минимизацией функционала, представляющего рассогласование между «точной» правой частью СЛАУ и приближенной правой частью СЛАУ, но дающей удовлетворительное решение.

Модификация случайного поиска в виде генетических алгоритмов и алгоритмов, дублирующих поведение пчелиного роя [16 – 18] позволяет получать аппроксимацию Парето-оптимальных множеств с лучшей производительностью и одновременно меньшими вычислительными затратами.

Математическая модель. Математическая модель представлена модифицированным дробно-степенным рядом

$$W_i\left(x_{i,j}\right) = \begin{cases} A_1 \cdot x_{i,1}^{\lambda_1} + B_1 \cdot x_{i,1}^{\beta_1} \cdot x_{i,1}^{\gamma_1} + C \cdot x_{i,1}^{\delta_1}, & m = 1 \\ A_1 \cdot x_{i,1}^{\lambda_1} + A_2 \cdot x_{i,2}^{\lambda_2} + B_1 \cdot x_{i,1}^{\beta_1} \cdot x_{i,2}^{\gamma_1} + B_2 \cdot x_{i,1}^{\beta_2} \cdot x_{i,2}^{\gamma_2} + C \cdot x_{i,1}^{\delta_1} \cdot x_{i,2}^{\delta_2}, & m = 2 \\ \sum\limits_{j=1}^{m} A_j x_{i,j}^{\lambda_j} + \sum\limits_{j=1}^{m-1} B_j \cdot x_{i,j}^{\beta_j} \cdot x_{i,j+1}^{\gamma_j} + B_m \cdot x_1^{\beta_m} x_{i,m}^{\gamma_m} + C \cdot \prod\limits_{j=1}^{m} x_{i,j}^{\delta_j}, & m > 2 \end{cases}$$

где вектор параметров идентификации

$$p = \left\{ A_j,\ B_j,\ C,\ \beta_j,\ \lambda_j,\ \gamma_j,\ \delta_j \right\},$$

Общее количество параметров идентификации $k = 6m + 1$.

Алгоритм идентификации. Разработанный алгоритм идентификации параметров математической модели содержит блок случайного поиска и блок решения СЛАУ. В общей постановке, задача может быть сформулирована следующим образом:

$$p^*\left\{\overline{r^*},\ \overline{d^*}\right\} = \min\varepsilon,\quad \overline{r},\ \overline{d} \in R^k,$$

где глобальное решение задачи представлено вектором $\overline{p^*} = \overline{r^*} \cup \overline{d^*}$, объединенным из вектора коэффициентов

$$\overline{r^*} = \left\{A_j^*,\ B_j^*,\ C^*\right\}$$

и вектора степеней

$$\overline{d^*} = \left\{\beta_j^*,\ \lambda_j^*,\ \gamma_j^*,\ \delta_j^*\right\},\ j = \overline{1,\ m},$$

дробно-степенного ряда, для которого относительная погрешность минимальна $\varepsilon = \min\max\left(\varepsilon_i\right),\ i = \overline{1,\ n}$.

Одним из важных в прикладном значении допущений является предположение об ограниченном пространстве поиска целевой функции

$$1 \le S\left(p\right) < \infty$$

и условий - ограничений на вектора

$$-1 \le p_L,\ p_R \le 1,$$

где p_L левый и p_R правый пределы интервала неопределенности. Оно связано с тем, что отношения приращений функций к соответствующим приращениям аргументов не превышает положительной константы $L \in \left[0,\ \infty\right)$ из условия Липшица

$$\left|S\left(p_L\right) - S\left(p_R\right)\right| \le L\left\|p_L - p_R\right\|.$$

Коэффициенты r_l $\left(l = \overline{1,\ 2m+1}\right)$ и степени d_t $\left(t = \overline{1,\ 4m}\right)$ дробно-степенного ряда назначаются генерированием случайных чисел η и ζ в пределах $-1.0 \le \eta,\ \varsigma \le 1.0$, из которых формируется два вектора p_L и p_R.

Целевая функция

$$S = \left\|\Phi\right\|^{\left|\cos\alpha\right|} \to 1.0,\ \left\|\Phi\right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left[F_i - W_i\right]^2},\ \cos\alpha = \frac{\left(F_i, W_i\right)}{\left\|F_i\right\|\left\|W_i\right\|},$$

где $\left(F_i, W_i\right)$ — скалярное произведение векторов, $\left\|F_i\right\|$ и $\left\|W_i\right\|$ — модули векторов, W_i — исследуемые отклики, рассчитанные по дробно — степенному ряду.

Константа Липшица определяется из условия

$$L \geq \frac{\left|S\left(p_L\right)-S\left(p_R\right)\right|}{\left\|p_L-p_R\right\|},$$

где $S\left(p_L\right)$ и $S\left(p_R\right)$ значения целевой функции, рассчитанные по левому и правому пределам интервала неопределенности.

Компоненты вектора $\overline{p}$ на итерациях поиска u, для которых $S\left(p\right)\to 1.0$

$$\overline{p}_u = \frac{\overline{p}_{R,u}+\overline{p}_{L,u}}{2} - \frac{S\left(p_L\right)-S\left(p_R\right)}{2L}.$$

Изменение целевой функции *S(p)* удовлетворяет условию Липшица на интервале $\left[p_L, p_R\right]$, когда оно ограничено областью, образуемой четырьмя линиями с угловыми коэффициентами L и $-L$ (рис. 2*а*) и одновременно выполняются неравенства,

$$\begin{cases} S\left(p\right) \leq S\left(p_L\right) \\ S\left(p\right) \leq S\left(p_R\right) \end{cases} \tag{1}$$

достигаемые циклическим увеличением константы Липшица L (рис. 2*б*) на постоянную величину Δ (рис. 3). Когда число циклов $i > N$, а хотя-бы одно из неравенств (1) не выполняется, генерируется новый вектор коэффициентов и степеней дробно-степенного ряда и поиск продолжается. Вычисления случайным поиском прекращаются, когда целевая функция $S\left(p\right)<1+\delta$, где $\delta \ll 1$.

По результатам случайного поиска рассчитанные степени дробно — степенного ряда $\overline{d}=\overline{d^*}$ фиксируются как оптимальные, а оптимальные значения коэффициентов $\overline{r}=\overline{r^*}$, доставляющих минимум относительной погрешности ε, определяются решением СЛАУ

$$\begin{cases} D_{1,1}r_1 + D_{1,2}r_2 + \cdots + D_{1,l}r_l + \cdots + D_{1,v}r_v = F_1 \\ D_{2,1}r_1 + D_{2,2}r_2 + \cdots + D_{2,l}r_l + \cdots + D_{2,v}r_v = F_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ D_{f,1}r_1 + D_{f,2}r_2 + \cdots + D_{f,l}r_l + \cdots + D_{f,v}r_v = F_f \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ D_{v,1}r_1 + D_{v,2}r_2 + \cdots + D_{v,l}r_l + \cdots + D_{v,v}r_v = F_v \end{cases}$$

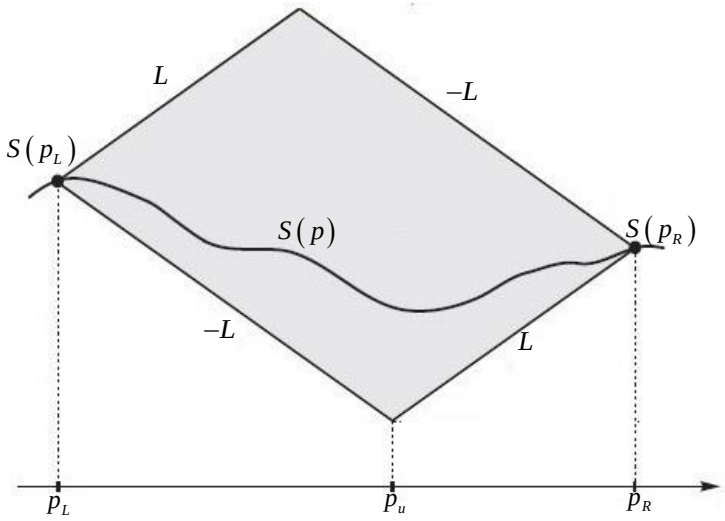
где:

$$v = 2m+1;\ \ f = \overline{1, 2m+1};$$

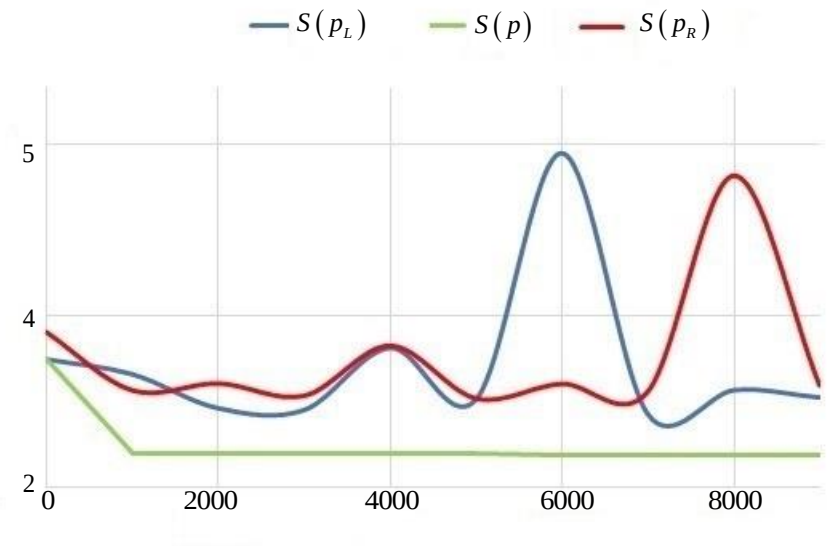
$$D_{f,j} = x_{i,j}^{\lambda_i^*},\ \ i,\ j = \overline{1,m};\ D_{f,j} = x_{i,j}^{\beta_i^*} \cdot x_{i,j+1}^{\gamma_i^*};$$

$$i = \overline{1,m};\ \ j = \overline{m+1,2m-1};$$

$$D_{2m,2m} = x_{1,2m}^{\beta_{2m}^*} x_{m,2m}^{\gamma_{2m}^*};\ D_{v,i} = \prod_{i=1}^{m} x_{i,v}^{\delta_i^*}.$$



а)



б)

Рис. 2. Схема (а) и результаты (б) вычисления целевой функции $S(p_L)$, $S(p)$ и $S(p_R)$ в точках p_L, p и p_R пространства поиска

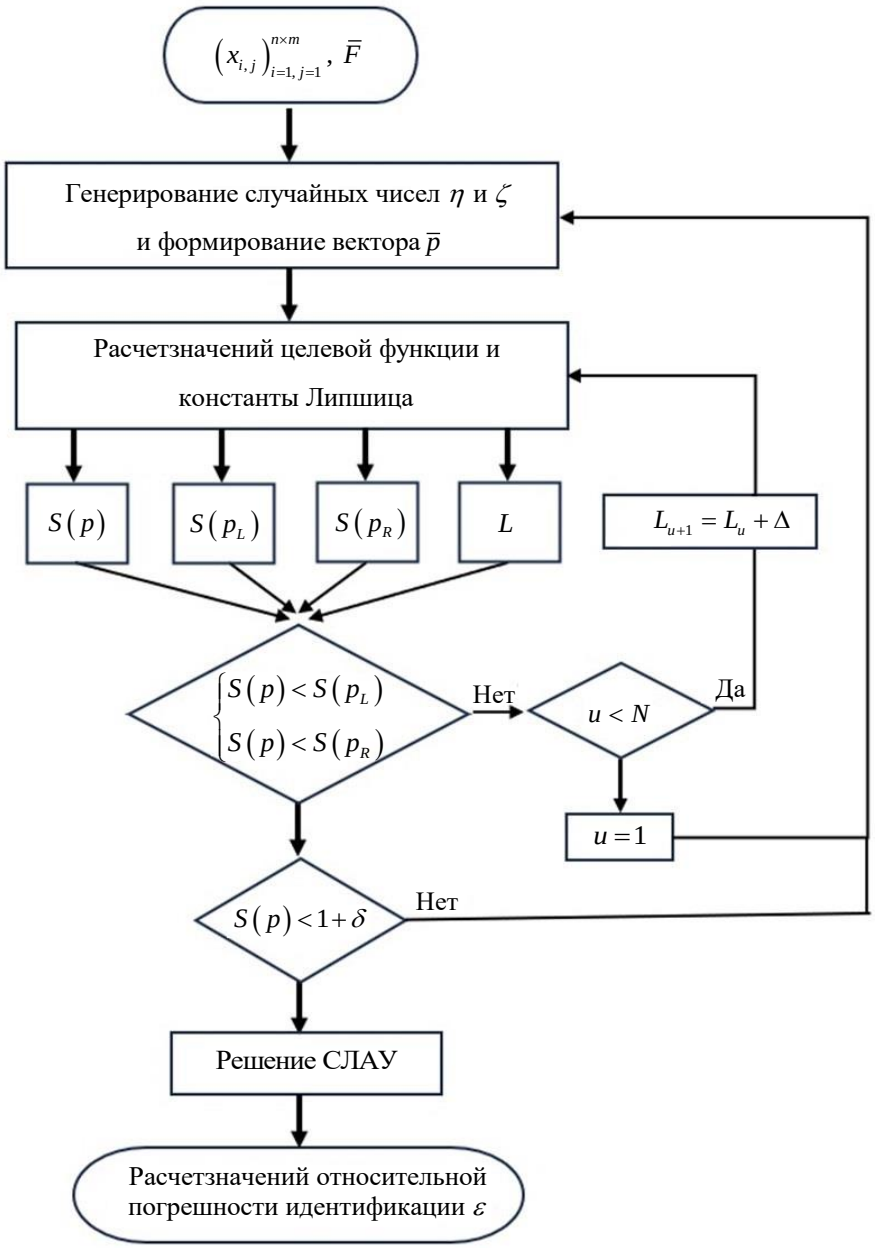


Рис. 3. Алгоритм идентификации коэффициентов и степеней дробно – степенного ряда: N — предельное число циклов; Δ — шаг, на который увеличивается константа Липшица; $\delta \ll 1$, ε — относительная погрешность идентификации

Тестирование численного алгоритма. Исходные данные для тестирования получены из результатов экспериментальных исследований или из базы характеристик производства на машиностроительных заводах. Оценка эффективности работы алгоритма производилась по двум критериям: максимальной абсолютной величине относительной погрешности $|\varepsilon_{max}|$ и времени выполнения расчетов T. Про-

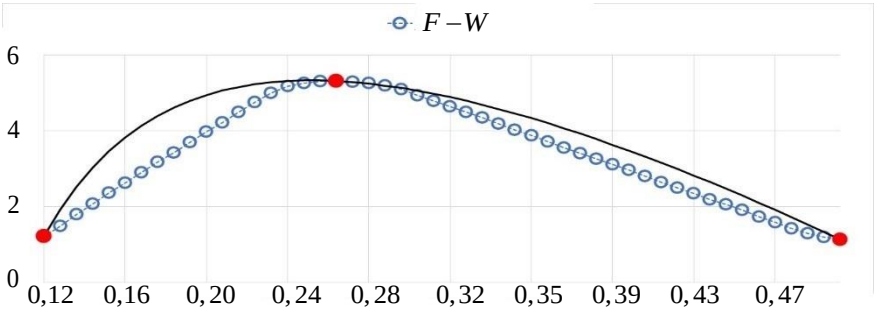
граммная реализация выполнена на языке программирования C#, расчеты - на компьютере с процессором 11th Gen Intel(R) Core(TM) i7-1165G7 @ 2.80GHz.

*Задача №*1 (m = 1). Экспериментальное измерение величины упругого проскальзывания F валков и ленты в валковых подающих механизмах $F = \left(2\pi R_в - L_л\right)/2\pi R_в$, где $L_л$ — перемещение ленты за один оборот приводного валка, радиусом $R_в$ [19]. Толщина подаваемой ленты b влияет на длину линии контакта a между валком и лентой. Для тестирования использованы результаты измерения F от отношения $x = b / a$ (рис. 4*а* и рис. 5).

*Задача №*2 ($m = 2$). Экспериментальные измерения скорости резания F (мм/мин) стального листа, на машине для плазменной резки в зависимости от толщины листа x_1, мм и тока прожига x_2, А (рис. 4*б* и рис. 5).

*Задача №*3 ($m = 4$). Из базы характеристик производства выбраны количества деталей, в оптимальных партиях обработки на операциях листовой штамповки. Уменьшение партии обработки относительно оптимальной увеличивает время на переналадку и связанные с ним затраты, увеличение — увеличивает затраты на хранение деталей на складах [20]. Оптимальную партию обработки F, шт. определяют x_1 — годовая программа выпуска детали, шт.; x_2 — основное время изготовления детали, час; x_3 — вспомогательное время, час; x_4 — время переналадки оборудования, час. (рис. 4*в* и рис. 5).

*Задача №*4 ($m = 8$). Из базы характеристик производства выбрана годовая технологическая станкоемкость, F (станко-час, рис. 4*г* и рис. 5) изготовления деталей из листа на операциях листовой штамповки в зависимости от количества деталей в год (x_1, шт.), массы детали (x_2, кг), толщины листа (x_3, мм), периметра вырубки (x_4, мм), предела прочности материала листа при растяжении (x_5, Н/мм^2), усилия пресса (x_7, кН), длительности операции (x_7, мин) и вспомогательного времени (x_8, час.).



а)

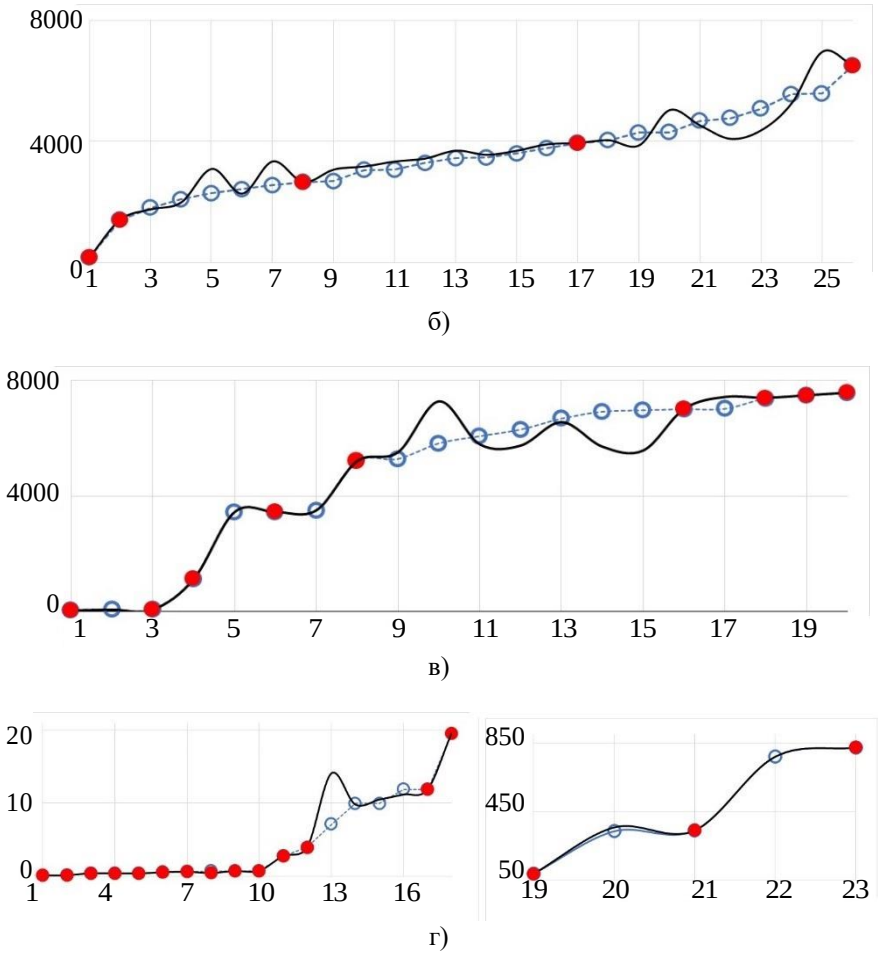


Рис. 4. Результаты тестирования алгоритма идентификации параметров дробно-степенного ряда: а – экспериментальное измерение величины упругого проскальзывания; б – экспериментальное измерение скорости резания; в – количество деталей в оптимальных партиях обработки; г – годовая технологическая станкоемкость (результаты, отмеченные красными точками, использовались для идентификации параметров дробно-степенного ряда)

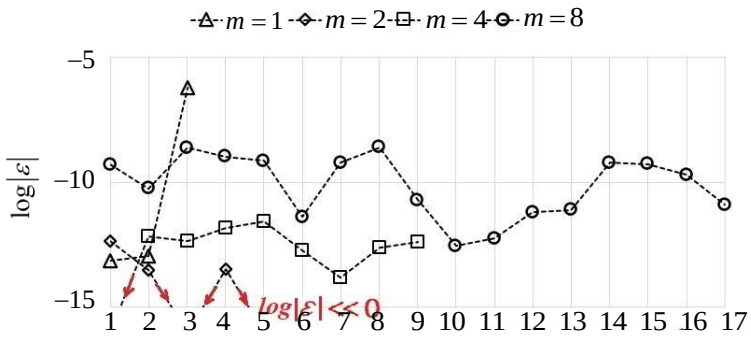


Рис. 5. Относительная погрешность (ε_i , %) расчета исследуемых откликов в зависимости от размера v матрицы коэффициентов СЛАУ

Таблица 1

Числовые характеристики задач и оценки эффективности алгоритма, ΔD_{max} – максимальные пределы изменения независимых переменных

№ задачи	m	k	ν	ΔD_{max}	$\lvert\varepsilon_{max}\rvert$, %	T, сек
1	1	7	3	6,5	$9{,}7\cdot10^{-6}$	9
2	2	13	7	26,7	$3{,}9\cdot10^{-12}$	20
3	4	25	13	2992,0	$1{,}06\cdot10^{-11}$	11
4	8	49	17	5891,0	$8{,}2\cdot10^{-9}$	6

Выводы. Моделирование результатов экспериментов и характеристик, полученных в процессе эксплуатации машиностроительного производства с целью использования в проектировании нового производства или его модернизации приводит к обратным задачам глобальной оптимизации. На входе математической модели матрица независимых переменных и на выходе исследуемые отклики. Независимые переменные в пределах столбца матрицы записаны с неравномерной дискретизацией, уменьшаются, увеличиваются или остаются постоянными. Целевая функция глобальной оптимизации многопараметрическая, многокритериальная и мультимодальная, что значительно усложняет идентификацию параметров математической модели.

Математическая модель в виде дробно-степенного ряда от нескольких независимых переменных позволяет найти численное решение некорректной обратной задачи глобальной оптимизации. Изменение целевой функции должно удовлетворять условию Липшица. Алгоритм решения содержит блок случайного поиска, работой которого назначаются коэффициенты и степени и блок решения СЛАУ, уточняющий коэффициенты дробно – степенного ряда. Тестирование алгоритма на задачах, сформированных из результатов экспериментов и эксплуатации машиностроительного производства показало допустимые для прикладного использования точность и время выполнения расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Тлибеков А.Х. Сравнительный анализ методов свертывания критериев оптимальности в задачах многокритериальной оптимизации. *Математическое моделирование и численные методы*, 2024, № 2, с. 112-125.

[2] Bunina G.A., Francois G. Lipschitz constants in experimental optimization. *Journal of Process Control*, 2016. DOI: 10.48550/arxiv.1603.07847.

[3] Стронгин Р.Г., Гергель В.П., Баркалов К.А. Адаптивная глобальная оптимизация на основе блочно-рекурсивной схемы редукции размерности. *Автоматика и телемеханика*, № 8, 2020, с. 136-148. DOI: 10.31857/S0005231020080103

[4] Силенко Д. И., Лебедев И.Г. Алгоритм глобальной оптимизации, использующий деревья решений для выявления глобальных экстремумов. *Проблемы информатики*, 2023, № 2, с. 3 – 13. DOI: 10.24412/2073-0667-2023-2-21-33

[5] Сергеев Я. Д. *Диагональные методы глобальной оптимизации*. Москва, Физматлит, 2008, 352 с.

[6] Городецкий С.Ю., Диагональное обобщение метода Direct на задачи с ограничениями. *Автоматика и телемеханика*, 2020, № 8, с. 84 – 105. DOI: 10.31857/S0005231020080073

[7] Баркалов К.А., Черных Д.А., Петров Д.Ю. Параллельный алгоритм липшицевой глобальной оптимизации с двойной оценкой константы Липшица. *Параллельные вычислительные технологии*, 2013, с. 234.

[8] Barkalov K.A., Lebedev I.G., Silenko D.I. On using the decision trees to identify the local extrema in parallel global optimization algorithm. *Bulletin of the South Ural State University. Series «Computational mathematics and software engineering»*, 2023, vol. 12, no. 3, с. 5–18. DOI: 10.14529/cmse230301.

[9] Сулимов В.Д., Шкапов П.М. Гибридные методы вычислительной диагностики двухфазного потока в циркуляционном контуре. *Математическое моделирование и численные методы*, 2015, № 3, с. 68 – 88.

[10] Сулимов В. Д., Шкапов П. М., Гончаров Д. А. Применение гибридных алгоритмов к экстремальным задачам на собственные значения лагранжевых динамических систем. *Математическое моделирование и численные методы*, 2016, № 4, с. 84-102.

[11] Сулимов В. Д., Шкапов П. М. Применение гибридных алгоритмов глобальной оптимизации к экстремальным задачам для гидромеханических систем. *Машиностроение и компьютерные технологии*, 2013, № 11. DOI: 10.7463/1113.0604082

[12] Бушуев А.Ю., Маремшаова А.А. Сравнение модифицированного метода Ψ-преобразования и канонического метода роя частиц. *Математическое моделирование и численные методы*, 2018, № 3, с. 21–35.

[13] Абас Висам Махди Абас, Арутюнян Р.В. Моделирование нелинейных динамических и стационарных систем на основе интегро–функциональных рядов Вольтерры и различных классов квадратурных формул. *Математическое моделирование и численные методы*, 2021, № 2, с. 68–85.

[14] Плюснин А.В. Восстановление параметров движения летательного аппарата по данным их дискретной регистрации. Ч. 1. Способы, не использующие регуляризацию. *Математическое моделирование и численные методы*, 2016, № 1, с. 68–88.

[15] Плюснин А. В. Восстановление параметров движения летательного аппарата по данным их дискретной регистрации. Ч. 2. Способы, использующие регуляризацию. *Математическое моделирование и численные методы*, 2016, №2, с. 39-54

[16] Dydyk A. P., Nosovets O. K., Babenko V. O. Setting up the genetic algorithm for the individualized treatment strategy searching. *Herald of Advanced Information Technology*, 2020, vol. 3, no. 3, pp. 125–135. DOI: 10.15276/hait.03.2020.2

[17] Тань Лиго, Новикова С.В. Применение пошагового метода обучения для эволюционного алгоритма в задачах многокритериальной оптимизации. *Вестник Казанского государственного энергетического университета*, 2022, т. 14, № 3 (55), с. 114-125

[18] Гришин А. А., Карпенко А. П. Исследование эффективности метода пчелиного роя в задаче глобальной оптимизации. *Машиностроение и*

компьютерные технологии, 2010, № 8, 28 с.

[19] Герасименко О.Н., Тлибеков А.Х. *Листоштамповочные комплексы для серийного и мелкосерийного производства*. Москва, Машиностроение, 1987, 128 с.

[20] Тлибеков А. Х. Выбор оборудования и расчет его количества для производства деталей из листа. *РИТМ машиностроения*, 2014, № 2, с. 10 – 15.

Статья поступила в редакцию 24.09.2024

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Тлибеков А.Х. Алгоритм решения некорректной обратной задачи проектирования машиностроительного производства. *Математическое моделирование и численные методы,* 2025, № 1, с. 116–133.

Тлибеков Алексей Хабиевич – д-р техн. наук, доцент, профессор МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: a.tlibekov@bmstu.ru

Application of Bethe energy approximation to determine the numerical characteristics of codes on a graph structures

© A. Kh. Tlibekov

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

An algorithm for identifying the parameters of a mathematical model using experimental data in the form of a matrix of independent variables and a vector of the studied experimental responses is considered. The mathematical model is nonlinear, and the algorithm for solving it is unstable. The conditions under consideration are typical for inverse problems of mathematical physics. The need to solve similar problems is caused by the results of field experiments or information stored in the databases of the characteristics of the production processes of a machine-building plant, which is used for optimal design of a new or modernization of existing production. The mathematical model approximating the independent variables and the studied responses is represented by a modified fractional power series of several variables. An algorithm for searching for coefficients and degrees of a fractional power series has been developed. An iterative method containing blocks of random search, global optimization based on the Lipschitz condition and solving a system of linear algebraic equations is used. The algorithm has been tested. The effectiveness was assessed by the maximum relative error in calculating the studied responses and by the time of calculations.

Keywords*: inverse problem, fractional power series, global optimization, identification, Lipschitz condition, search space, uncertainty interval, goal function*

REFERENCES

[1] Tlibekov A. Kh. Comparative analysis of methods for converting optimality criteria in multi-criteria optimization problems. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2024, no. 2, pp. 112-125.

[2] Bunina G.A., Francois G. Lipschitz constants in experimental optimization. *Journal of Process Control*, 2016. DOI: 10.48550/arxiv.1603.07847.

[3] Strongin R.G., Gergel V.P., Barkalov K.A. Adaptive global optimization based on a block-recursive dimensional reduction scheme. *Automation and Remote Control*, no. 8, 2020, pp. 136-148. DOI: 10.31857/S0005231020080103

[4] Silenko D. I., Lebedev I.G. Algoritm global'noj optimizacii, ispol'zuyushchij derev'ya reshenij dlya vyyavleniya global'nyh ekstremumov [A global optimization algorithm using decision trees to identify global extremes]. *Problemy informatiki* [Computer science problems], 2023, no. 2, pp. 3 – 13. DOI: 10.24412/2073-0667-2023-2-21-33

[5] Sergeev YA. D. *Diagonal'nye metody global'noj optimizacii* [Diagonal methods of global optimization]. Moskva, Fizmatlit Publ., 2008, 352 p.

[6] Gorodetsky S.Yu., Diagonal generalization of the Direct method to problems with constraints. *Automation and Remote Control*, 2020, no. 8, pp. 84 – 105. DOI: 10.31857/S0005231020080073

[7] Barkalov K.A., CHernyh D.A., Petrov D.YU. Parallel'nyj algoritm lipshicevoj global'noj optimizacii s dvojnoj ocenkoj konstanty Lipshica [Parallel Lipschitz global optimization algorithm with double estimation of Lipschitz constant]. *Parallel'nye vychislitel'nye tekhnologii* [Parallel Computing Technologies], 2013, pp. 234.

[8] Barkalov K.A., Lebedev I.G., Silenko D.I. On using the decision trees to identify the local extrema in parallel global optimization algorithm. *Bulletin of the South Ural State University. Series «Computational mathematics and software engineering»*, 2023, vol. 12, no. 3, c. 5–18. DOI: 10.14529/cmse230301.

[9] Sulimov V. D., Shkapov P. M., Goncharov D. A. Application of hybrid algorithms to extreme eigenvalue problems of Lagrangian dynamical systems. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2015, no. 3, pp. 68 – 88.

[10] Sulimov V. D., Shkapov P. M., Goncharov D. A. Hybrid methods of computational diagnostics of two-phase flow in a circulation circuit. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2016, no. 4, pp. 84-102.

[11] Sulimov V. D., SHkapov P. M. Primenenie gibridnyh algoritmov global'noj optimizacii k ekstremal'nym zadacham dlya gidromekhanicheskih system [Application of hybrid global optimization algorithms to extreme problems for hydromechanical systems]. *Mashinostroenie i komp'yuternye tekhnologii [Mechanical engineering and computer technology]*, 2013, no. 11. DOI: 10.7463/1113.0604082

[12] Bushuev A.Yu., Maremshaova A.A. Comparison of the modified Ψ-transformation method and the canonical particle swarm method. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2018, no. 3, pp. 21–35.

[13] Abas Visam Mahdi Abas, Harutyunyan R.V. Modeling of nonlinear dynamic and stationary systems based on Volterra integro–functional series and various classes of quadrature formulas. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2021, no. 2, pp. 68–85.

[14] Plyusnin A.V. Restoration of aircraft motion parameters according to their discrete registration data. Part 1. Methods that do not use regularization. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2016, no. 1, pp. 68–88.

[15] Plyusnin A.V. Restoration of aircraft motion parameters according to their discrete registration data. Part 2. Methods using regularization. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2016, no. 2, pp. 39-54

[16] Dydyk A. P., Nosovets O. K., Babenko V. O. Setting up the genetic algorithm for the individualized treatment strategy searching. *Herald of Advanced*

Information Technology, 2020, vol. 3, no. 3, pp. 125–135. DOI: 10.15276/hait.03.2020.2

[17] Tan' Ligo, Novikova S.V. Primenenie poshagovogo metoda obucheniya dlya evolyucionnogo algoritma v zadachah mnogokriterial'noj optimizacii [Application of a step-by-step learning method for an evolutionary algorithm in multi-criteria optimization problems]. Vestnik Kazanskogo gosudarstvennogo energeticheskogo universiteta [*Bulletin of Kazan State Power Engineering University*], 2022, vol. 14, № 3 (55), pp. 114-125

[18] Grishin A. A., Karpenko A. P. Issledovanie effektivnosti metoda pchelinogo roya v zadache global'noj optimizacii [Investigation of the effectiveness of the bee swarm method in the global optimization problem]. *Mashinostroenie i komp'yuternye tekhnologii* [Mechanical engineering and computer technology], 2010, no. 8, 28 p.

[19] Gerasimenko O.N., Tlibekov A.H. *Listoshtampovochnye kompleksy dlya serijnogo i melkoserijnogo proizvodstva* [Sheet stamping complexes for serial and small-scale production]. Moscow, Mashinostroenie Publ. [Mechanical Engineering Publ.], 1987, 128 p.

[20] Tlibekov A. H. Vybor oborudovaniya i raschet ego kolichestva dlya proizvodstva detalej iz lista [Selection of equipment and calculation of its quantity for the production of sheet metal parts]. *RITM mashinostroeniya* [THE RHYTHM of mechanical engineering], 2014, no. 2, pp. 10 – 15.

Tlibekov A. Kh., Dr. Sc. (Eng.), Professor, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: a.tlibekov@bmstu.ru