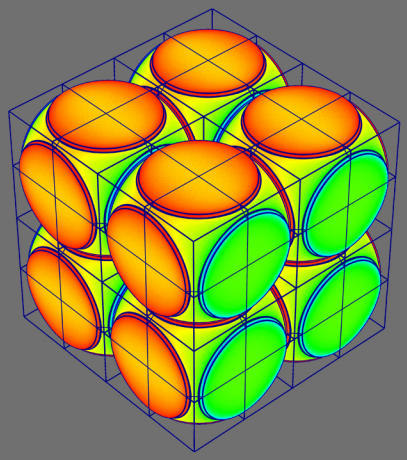
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Лашаб М. И., Роджерсон Г. Э., Сэндифорд К. Д.
Коротковолновые асимптотики дисперсионных соотношений в случае симметричной трехслойной пластины. Математическое моделирование и численные методы, 2015, №1 (5), с. 50-66

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/37/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.216.210
01.02.2026 13:55:53

УДК 539.3

Коротковолновые асимптотики дисперсионных соотношений в случае симметричной трехслойной пластины

© М.И. Лашаб[1], Г.Э. Роджерсон[2], К.Д. Сэндифорд[3]

[1] Университет Аласмария, Злитен, Ливия

[2] Кильский университет, Великобритания

[3] Солфордский университет, Великобритания

В статье рассмотрены дисперсионные волновые процессы в симметричной трехслойной пластине. Каждый из слоев пластины предполагается упругим и изотропным. Приведен численный и асимптотический анализ дисперсионного соотношения. Построенные численные решения дисперсионного соотношения анализируются в коротковолновой области, с выводом соответствующих асимптотик. Полученные приближенные решения сравниваются с точными решениями, демонстрируя весьма широкую область применимости, значительно превосходящую ожидаемую. Полученные асимптотические решения могут найти применение в оценках погрешности при вычислении интегралов по волновому числу, в связи с чем представляется возможным развитие соответствующих гибридных численно-асимптотических методов для нестационарных волновых полей, возникающих при ударных воздействиях.

Ключевые слова: *трехслойная пластина, дисперсионное соотношение, коротковолновые асимптотики.*

Введение. Материалы, имеющие слоистую структуру, уже давно используются в инженерных конструкциях. Одной из наиболее популярных областей применения является аэрокосмическая отрасль, где существенным фактором является способность материала обеспечить высокий показатель прочность — масса. В последнее время это качество приобретает все большее значение для производителей, пытающихся изготовить более легкие и эффективные летательные аппараты (ЛА). Следует отметить, что круг возможных приложений данного исследования не ограничивается аэрокосмической отраслью. Так, например, земная кора имеет слоистую структуру. Еще одним важным приложением является моделирование биомеханических свойств стенок артериальных сосудов, при котором обычно выделяют три слоя: внешний (адвентиция), средний (медия) и внутренний (интима).

Целью настоящей работы является исследование дисперсионных волновых процессов в симметричной трехслойной упругой пластине. Каждый из слоев предполагается линейно-изотропным. Проблема дисперсии волн в пластине имеет долгую историю [1, 2]. В монографии [1] представлена классификация соответствующих длинноволновых и коротковолновых асимптотических теорий. Расширению методологии [1] для анизотропных и предварительно деформированных

однослойных пластин, а также других типов граничных условий посвящены работы [3–6]. Основной акцент в большинстве исследований, опирающихся на асимптотические методы, был сделан на длинноволновом приближении. Среди немногих работ, анализирующих коротковолновый предел, следует выделить [7]. Исследованию различных аспектов дисперсии волн в трехслойных пластинах в длинноволновой области посвящены работы [8–10].

В данной работе построены коротковолновые асимптотики для дисперсионного соотношения в трехслойной пластине. Используя основные соотношения теории упругости, с помощью стандартной техники выводятся дисперсионные соотношения для симметричной и антисимметричной задач, являющихся аналогами классических задач растяжения-сжатия и изгиба для однослойной пластины. Затем приводятся результаты численных расчетов, после чего строятся асимптотические приближения в коротковолновом пределе. Установлено, что пределом фундаментальной моды для фазовой скорости является скорость соответствующей поверхностной или интерфейсной волны. Также получены приближения для высокочастотных гармоник. Сравнение полученных асимптотик с точным решением иллюстрирует их эффективность. Полученные асимптотические приближения могут быть использованы в оценках погрешности при вычислении соответствующих интегралов по волновому числу. В связи с этим представляется возможным развитие численно-аналитических методов анализа нестационарных волновых полей, возникающих в слоистых конструкциях при ударном воздействии.

Основные соотношения. Рассмотрим упругую трехслойную пластину симметричного строения, имеющую два идентичных внешних слоя h, а также внутренний слой толщиной $2d$ (каждый из слоев предполагается изотропным). Зададим декартову систему координат $Ox_1x_2x_3$ следующим образом: расположим начало координат на срединной плоскости, а ось Ox_2 направим по нормали к срединной плоскости. В этом случае внутренний слой занимает область $-d \le x_2 \le d$, а верхний и нижний внешние слои задаются соответственно неравенствами $d \le x_2 \le d+h$ и $-h-d \le x_2 \le -d$. С целью упрощения анализа примем допущение плоского деформированного состояния, т. е. предположим, что перемещения u_1 и u_2 не зависят от переменной x_3, а также $u_3 \equiv 0$. Уравнения движения упругого слоя:

$$(\lambda+2\mu)u_{1,11}+\mu u_{1,22}+(\lambda+\mu)u_{2,21}=\rho\ddot{u}_1; \qquad (1)$$

$$(\lambda+\mu)u_{1,12}+\mu u_{2,11}+(\lambda+2\mu)u_{2,22}=\rho\ddot{u}_2, \qquad (2)$$

где λ и μ — параметры Ламэ; ρ — объемная плотность. Ввиду конечной толщины слоя решение находят в форме

$$(u_1, u_2) = (U, V)e^{kqx_2}e^{ik(x_1 - vt)}, \tag{3}$$

где k — волновое число; v — фазовая скорость, а величина q подлежит определению. Из подстановки (3) в уравнения движения (1), (2) из условия существования нетривиальных решений получим биквадратное характеристическое уравнение для q, из которого

$$q_1^2 = \frac{\mu - \rho v^2}{\mu}, \quad q_2^2 = \frac{\lambda + 2\mu - \rho v^2}{\lambda + 2\mu}. \tag{4}$$

Следовательно, собственные функции U и V можно записать в виде

$$U = U^{(1)}e^{kq_1x_2} + U^{(2)}e^{-kq_1x_2} + U^{(3)}e^{kq_2x_2} + U^{(4)}e^{-kq_2x_2}; \tag{5}$$

$$V = V^{(1)}e^{kq_1x_2} + V^{(2)}e^{-kq_1x_2} + V^{(3)}e^{kq_2x_2} + V^{(4)}e^{-kq_2x_2}, \tag{6}$$

где $U^{(i)}$ и $V^{(i)}$ — произвольные постоянные, i = 1, …, 4. Выражая постоянные $V^{(i)}$ через $U^{(i)}$ и используя уравнения движения (1), (2), перепишем решения (5), (6) следующим образом:

$$U = U^{(1)}e^{kq_1x_2} + U^{(2)}e^{-kq_1x_2} + U^{(3)}e^{kq_2x_2} + U^{(4)}e^{-kq_2x_2}; \tag{7}$$

$$V = \frac{-i}{q_1}U^{(1)}e^{kq_1x_2} + \frac{i}{q_1}U^{(2)}e^{-kq_1x_2} - iq_2U^{(3)}e^{kq_2x_2} + iq_2U^{(4)}e^{-kq_2x_2}. \tag{8}$$

Соответствующие выражения для двух компонент тензора напряжений имеют вид:

$$\frac{\tau_1}{k} = \{(q_1 + \frac{1}{q_1})\{U^{(1)}e^{kq_1x_2} - U^{(2)}e^{-kq_1x_2}\} + 2q_2\{U^{(3)}e^{kq_2x_2} - U^{(4)}e^{-kq_2x_2}\}\}\mu; \tag{9}$$

$$\frac{\tau_2}{ik} = 2\mu\{U^{(1)}e^{kq_1x_2} + U^{(2)}e^{-kq_1x_2}\} + (2\mu - \rho v^2)\{U^{(3)}e^{kq_2x_2} + U^{(4)}e^{-kq_2x_2}\}. \tag{10}$$

Вывод дисперсионного соотношения. Приведем вывод дисперсионного соотношения, соответствующего свободным граничным условиям на внешних поверхностях с учетом условий неразрывности на интерфейсах:

$$\tau_1 = \tau_2 = 0 \quad \text{при} \quad x_2 = \pm(d + h); \tag{11}$$

$$\tau_1 = \tilde{\tau}_1;\ \tau_2 = \tilde{\tau}_2;\ U_1 = \tilde{U}_1;\ V_1 = \tilde{V}_1 \quad \text{при} \quad x_2 = \pm d. \tag{12}$$

Здесь и далее величины с тильдой соответствуют внутреннему слою, а параметры p_1^2 и p_2^2 соответствуют q_1^2 и q_2^2. Используя условия (11), (12), получим в общем случае систему линейных алгебраических уравнений из 12 уравнений с 12-ю неизвестными, условие существования нетривиальных решений которой дает дисперсионное соотношение. В то же время, с учетом симметрии задачи, система может быть разделена на две подсистемы из шести уравнений с шестью неизвестными, т. е. на так называемые симметричную и антисимметричную задачи.

Дисперсионное соотношение для симметричного случая принимает вид

$$\begin{vmatrix} \psi S_1 & \psi C_1 & 2\mu q_2 S_2 & 2\mu q_2 C_2 & 0 & 0 \\ 2\mu q_1 C_1 & 2\mu q_1 S_1 & \psi C_2 & \psi S_2 & 0 & 0 \\ 0 & \psi & 0 & 2\mu q_2 & \tilde{\psi} & 2\tilde{\mu} p_2 \\ 0 & 1 & 0 & q_2 & 1 & p_2 \\ 2\mu q_1 & 0 & \psi & 0 & 2\tilde{\mu} p_1 \tilde{T}_1 & \tilde{\psi}\tilde{T}_2 \\ q_1 & 0 & 1 & 0 & p_1 \tilde{T}_1 & \tilde{T}_2 \end{vmatrix} = 0, \qquad (13)$$

где $S_m = \sinh(kq_m h)$; $C_m = \cosh(kq_m h)$; $\tilde{T}_m = \tanh(kp_m d)$; $\psi = 2\mu - \rho v^2$; $\tilde{\psi} = 2\tilde{\mu} - \tilde{\rho} v^2$. Полученное соотношение (13) связывает между собой фазовую скорость и волновое число. Дисперсионное соотношение для антисимметричного случая имеет вид

$$\begin{vmatrix} \psi S_1 & \psi C_1 & 2\mu q_2 S_2 & 2\mu q_2 C_2 & 0 & 0 \\ 2\mu q_1 C_1 & 2\mu q_1 S_1 & \psi C_2 & \psi S_2 & 0 & 0 \\ 0 & \psi & 0 & 2\mu q_2 & \tilde{\psi}\tilde{T}_1 & 2p_2\tilde{\mu}\tilde{T}_2 \\ 0 & 1 & 0 & q_2 & \tilde{T}_1 & p_2\tilde{T}_2 \\ 2\mu q_1 & 0 & \psi & 0 & 2\tilde{\mu} p_1 & \tilde{\psi} \\ q_1 & 0 & 1 & 0 & p_1 & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (14)$$

Численные результаты. Приведем численные результаты, иллюстрирующие полученные дисперсионные соотношения. При расчетах было использовано два набора материальных параметров:

	λ	μ	$\tilde{\lambda}$	$\tilde{\mu}$
Вариант 1 ……..	1,0	1,5	1,5	3,5
Вариант 2 ……..	1,5	3,5	1,0	1,5

На рис. 1 представлены 20 первых мод зависимости масштабированной скорости $\bar{v} = \sqrt{\rho} v$ от безразмерного волнового числа kh, соответствующих дисперсионному соотношению.

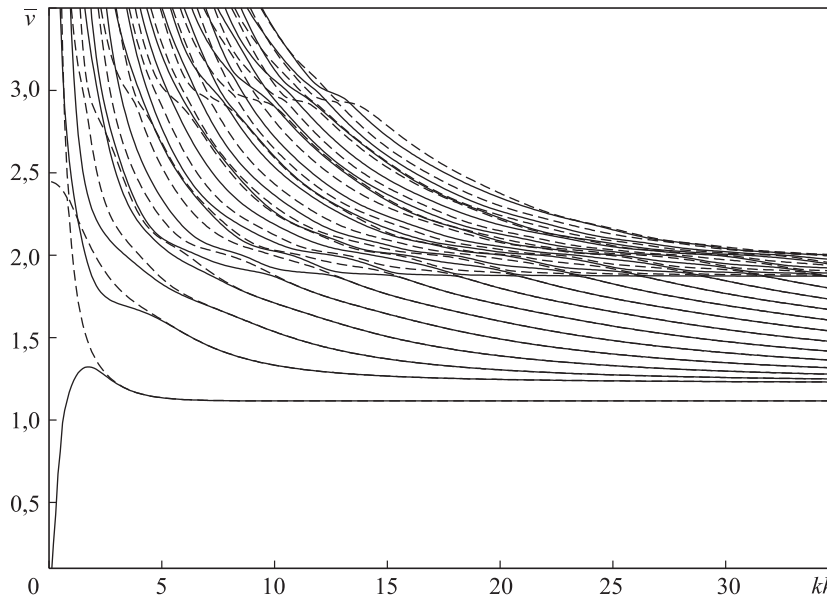


Рис. 1. График зависимости масштабированной скорости v от безразмерного волнового числа kh ($\rho v^2 \to \mu$ в коротковолновом пределе)

Дисперсионные кривые для уравнений (13) и (14) показаны соответственно прерывистыми и непрерывными линиями. Основной целью данной работы является анализ в коротковолновой области ($kh, dh \to \infty$). Из рис. 1 видно, что обе фундаментальные моды и все убывающие гармоники стремятся к постоянному значению, равному скорости сдвиговой волны во внутреннем слое. Результаты численных расчетов показывают, что величины p_1, p_2 и q_2 являются действительными, а величина q_1 — чисто мнимой. Более того, можно заметить, что в пределе ($kh, dh \to \infty$) амплитуда q_1 стремится к нулю, а значит, коротковолновый предел фазовой скорости следует из (4). Таким образом, случай 1 соответствует $\hat{q}_1 = iq_1,\ \ q_2, p_1,\ p_2 \in R$ при $kh, dh \to \infty,\ \ \hat{q}_1 \to 0,\ \ \rho v^2 \to \mu.$

Заметим, что коротковолновый предел всех гармоник также имеет вид $\rho v^2 = \mu,$ связанный со скоростью поперечной волны во внутреннем слое. Стоит отметить, что аналогичный случай для скорости продольной волны, когда $q_2 \to 0,$ а $\rho v^2 = \lambda + 2\mu,$ не может быть реализован на практике, поскольку предельная скорость совпадает с минимальной из соответствующих скоростей.

На рис. 2 приведены результаты расчетов, аналогичных показанным на рис. 1, с той лишь разницей, что параметры внутреннего и внешних слоев поменялись местами. В длинноволновом пределе фундаментальных мод для симметричного и антисимметричного случаев результаты идентичны предыдущим. В то же время можно отметить весьма серьезное различие между рисунками, состоящее в следующем: существует значение скорости, для которого кривые на рис. 2, соответствующие симметричным (прерывистые) и антисимметричным (непрерывные линии) модам, сливаются (начиная с некоторого значения волнового числа). В случае, показанном на рис. 1, симметричные и антисимметричные дисперсионные кривые не пересекаются, сближаясь и снова расходясь. Также заметим, что в коротковолновом пределе ($kh, dh \to \infty$) кривые на рис. 2 стремятся к значению скорости поверхностной волны для материала внешних слоев. При этом на рис. 1 соответствующие значения скоростей поверхностной и сдвиговой волн настолько близки, что практически неотличимы на графике. Здесь и далее под случаем 2 понимаем $\hat{q}_2 = iq_2$, $q_1, p_1,\ p_2 \in R$ при $kh, dh \to \infty,\ \ q_2 \to 0,\ \ \tilde{\rho} v^2 \to \tilde{\mu}$.

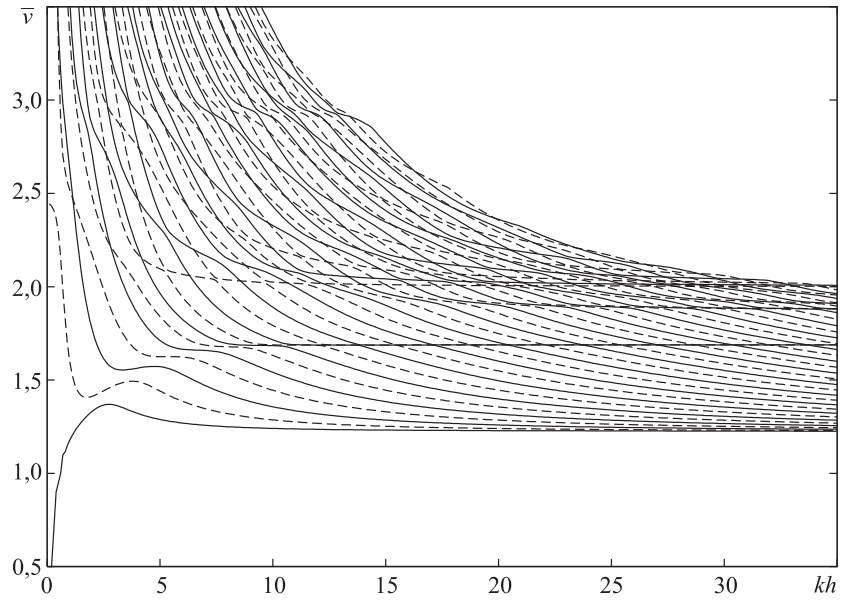


Рис. 2. График дисперсионной зависимости фазовой скорости v от безразмерного волнового числа kh

Асимптотический анализ антисимметричного дисперсионного соотношения в коротковолновой области. Получим приближения

для фазовой скорости для больших значений волнового числа, соответствующие антисимметричному дисперсионному соотношению.

Коротковолновый анализ гармоник ($kh, dh \to \infty$). Рассмотрим случай 1 ($\rho v^2 \to \mu$, причем $\mu < \tilde{\mu}$): значение $\hat{q}_1 = iq_1$ является чисто мнимым, значения q_2, p_1, p_2 действительны, а также $\hat{q}_1 \to 0$ при $kh, dh \to \infty$. Раскладывая слагаемые антисимметричного дисперсионного соотношения в ряд по малому параметру $\hat{q}_1$, получим

$$\begin{aligned} &\tan(k\hat{q}_1 h)\hat{q}_1 \left\{ \overline{p}_2 \mu^2 \rho\tilde{\rho} + \overline{q}_2 \mu^2 + \overline{q}_2 \overline{p}_1 \overline{p}_2 [4\mu(2\tilde{\mu} - \mu) - 4\tilde{\mu}^2] \right\} = \\ &= \overline{p}_2 \overline{p}_2 [4\tilde{\mu}(\mu - \tilde{\mu}) - \mu^2] - \overline{q}_2 \overline{p}_1 \mu^2 \rho\tilde{\rho} + O(\hat{q}_1^2), \end{aligned} \tag{15}$$

где чертой обозначены величины порядка единицы. Анализ ведущего порядка разложения (15) дает

$$\tan(k\hat{q}_1 h) \approx O\left(\frac{1}{\hat{q}_1}\right). \tag{16}$$

Следовательно, $\hat{q}_1 \to 0$, $\tan(k\hat{q}_1 h) \to \infty$, откуда

$$\hat{q}_1 = \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi}{kh}. \tag{17}$$

Используя соотношения (4), (17), получим следующее асимптотическое разложение для фазовой скорости n-й гармоники в коротковолновом пределе:

$$\rho v_n^2 = \mu \left(1 + \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 \frac{\pi^2}{(kh)^2} \right) + \ldots, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{18}$$

Соответствующие разложения для величин q_2, p_1, p_2 могут быть записаны как

$$q_2 = \overline{q}_2 + O(\hat{q}_1^2); \quad p_1 = \overline{p}_1 + O(\hat{q}_1^2); \quad p_2 = \overline{p}_2 + O(\hat{q}_1^2), \tag{19}$$

в которых величины порядка единицы $\overline{q}_2, \overline{p}_1$ и $\overline{p}_2$ имеют вид

$$\overline{q}_2 = \sqrt{\frac{\mu + \lambda}{2\mu + \lambda}}; \quad \overline{p}_1 = \sqrt{\frac{\rho\tilde{\mu} - \tilde{\rho}\mu}{\rho\tilde{\mu}}}; \quad \overline{p}_2 = \sqrt{\frac{\rho(2\tilde{\mu} + \tilde{\lambda}) - \tilde{\rho}\mu}{\rho(2\tilde{\mu} + \tilde{\lambda})}}. \tag{20}$$

Следует отметить, что величины, определенные в соотношениях (20), всегда действительны в коротковолновой области. Из условий

мнимости q_1 и действительности q_2, p_1, p_2 вытекает неравенство $\frac{\mu}{\rho} < v^2 < \frac{\tilde{\rho}\tilde{\mu}}{\rho}$.

Приближение следующего порядка может получено с помощью представления

$$\hat{q}_1 = \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{kh} + \frac{\phi_1}{(kh)^2}; \quad \tan(k\hat{q}_1 h) = \frac{-kh}{\phi_1}, \tag{21}$$

где величина ϕ_1 подлежит определению.

Подставив (21) в (15), найдем

$$\phi_1 = \frac{\zeta_1}{\eta_1}\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi, \tag{22}$$

где ζ_1 и η_1 — величины порядка единицы, имеющие вид

$$\zeta_1 = \overline{p}_2\mu^2\rho\tilde{\rho} + \mu^2\overline{q}_2 + \overline{q}_2\overline{p}_1\overline{p}_2[4\mu(2\tilde{\mu}-\mu) - 4\tilde{\mu}^2]; \tag{23}$$

$$\eta_1 = \overline{p}_2\overline{p}_2[4\tilde{\mu}(\mu-\tilde{\mu}) - \mu^2] - \overline{q}_2\overline{p}_1\mu^2\rho\tilde{\rho}. \tag{24}$$

Подставляя соотношение (22) в (21) и используя (18), находим

$$\rho v_n^2 = \mu\left(1 + \left(n+\frac{1}{2}\right)^2 \frac{\pi^2}{(kh)^2}\left(1+\frac{2\zeta_1}{\eta_1 kh}\right)\right) + \ldots, \; n = 1, 2, 3, \ldots \; . \tag{25}$$

На рис. 3 приведено сравнительное поведение первых пяти гармоник антисимметричного дисперсионного соотношения (14) с уточненными асимптотическими приближениями (25) для тех же параметров материала, которые были использованы для рис. 1. Из рис. 3 видно, что полученные приближения 3-го порядка аппроксимируют точное решение в коротковолновой области.

Приведем аналогичные рассуждения для случая 2 ($\tilde{\rho}v^2 \to \tilde{\mu}$, причем $\tilde{\mu} < \mu$) величина $\hat{p}_1 = ip_1$ является чисто мнимой, значения p_2, q_1, q_2 действительны, причем $\hat{p}_1 \to 0$ при $kh, dh \to \infty$. Разлагая антисимметричное дисперсионное соотношение в ряд по малому параметру $\hat{p}_1$, имеем

$$\tan(k\hat{p}_1 d)\{\zeta_2\} = \hat{p}_1\{4\overline{p}_2\zeta_2 - \eta_2\} + O(\hat{p}_1^2), \tag{26}$$

где величины порядка единицы ζ_2 и η_2 заданы в виде

$$\zeta_2 = \overline{q}_1\overline{p}_2\tilde{\mu}^2 + \overline{q}_1\overline{q}_2(4\mu(\mu-\tilde{\mu}^2) + \tilde{\mu}^2); \tag{27}$$

$$\eta_2 = \overline{q}_1\overline{q}_2\overline{p}_2(4\mu(2\tilde{\mu}-\mu) - 4\tilde{\mu}^2) - \tilde{\mu}^2\overline{p}_2 + \overline{q}_2\tilde{\mu}^2. \tag{28}$$

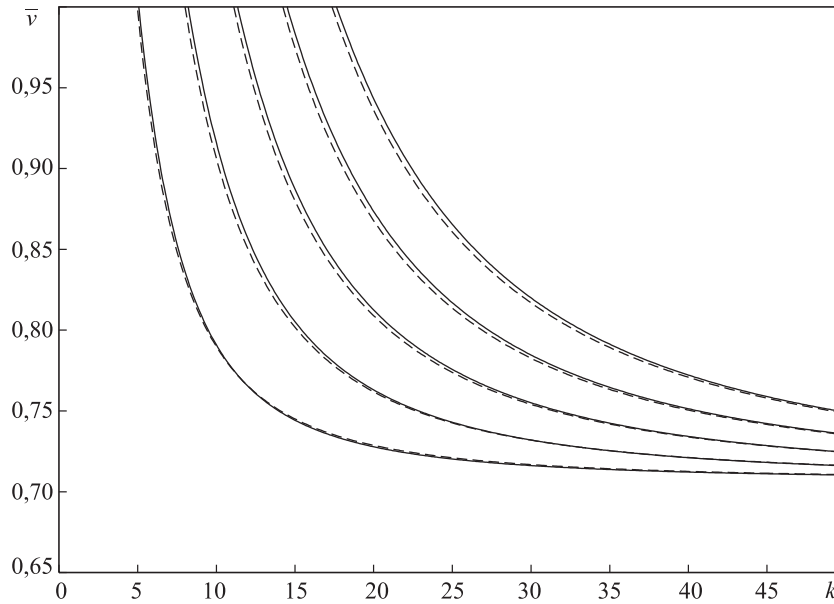


Рис. 3. Поведение первых пяти гармоник дисперсионного соотношения (14) и его коротковолновых асимптотических приближений (25) в случае $q_1 \to 0$

Из асимптотического анализа ведущего порядка получим

$$\tan(k\hat{p}_1 d) = O(\hat{p}_1), \tag{29}$$

откуда $\hat{p}_1 \to 0$ при $\tan(k\hat{p}_1 d) \to 0$. Следовательно, в ведущем порядке

$$\hat{p}_1 \approx \frac{n\pi}{kd}. \tag{30}$$

Подставляя полученные результаты в уравнение (4), получим

$$\tilde{\rho} v_n^2 = \tilde{\mu}\left(1 + \left(\frac{n\pi}{kd}\right)^2\right) + \ldots, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \ . \tag{31}$$

Аналогичные разложения для величин p_2, q_1, q_2 имеют вид

$$q_1 = \overline{q}_1 + O(\hat{p}_1^2); \quad q_2 = \overline{q}_2 + O(\hat{p}_1^2); \quad p_2 = \overline{p}_2 + O(\hat{p}_1^2). \tag{32}$$

Здесь величины порядка единицы $\overline{p}_2, \overline{q}_1$ и $\overline{q}_2$ определены соотношениями

$$\overline{q}_2 = \sqrt{\frac{\mu + \lambda}{2\mu + \lambda}}; \quad \overline{q}_1 = \sqrt{\frac{\tilde{\rho}\mu - \rho\tilde{\mu}}{\tilde{\rho}\mu}}; \quad \overline{p}_2 = \sqrt{\frac{\rho(2\tilde{\mu} + \tilde{\lambda}) - \tilde{\rho}\mu}{\rho(2\tilde{\mu} + \tilde{\lambda})}}. \tag{33}$$

Уточненные асимптотические разложения принимают вид

$$\hat{p}_1 = \frac{n\pi}{kd} + \frac{\phi_2}{(kd)^2}; \quad \tan(k\hat{p}_1 d) = \frac{\phi_2}{kd} + O(kh)^{-3}, \tag{34}$$

где значение ϕ_2 может быть найдено с помощью подстановки (34) в (26) в виде

$$\phi_2 = \frac{n\pi(4\overline{p}_2\zeta_2 - \eta_2)}{\zeta_2}. \tag{35}$$

Используя соотношения (34), (35), можно уточнить разложение (31):

$$\tilde{\rho}v_n^2 = \tilde{\mu}\left(1 + \left(\frac{n\pi}{kd}\right)^2 + \frac{2(n\pi)^2}{(kd)^3}\frac{(4\overline{p}_2\zeta_2 - \eta_2)}{\zeta_2}\right) + \ldots, \; n = 1, 2, 3, \ldots \; . \tag{36}$$

Эффективность уточненных высокочастотных коротковолновых приближений (36) проиллюстрирована на рис. 4.

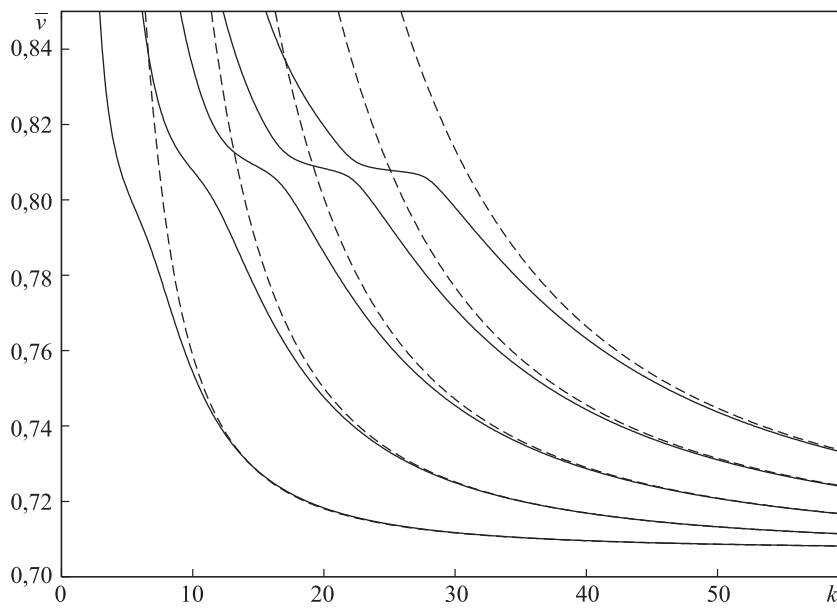


Рис. 4. Сравнение численного решения дисперсионного соотношения (14) и его коротковолновых асимптотических приближений (36) для $p_1 \to 0$

Коротковолновый анализ фундаментальных мод: скорости поверхностных и интерфейсных волн. Приведем основные результаты асимптотического анализа фундаментальных мод в коротковолновом пределе $kh, dh \to \infty$. Можно показать, что в этом пределе для обоих дисперсионных соотношений (13), (14) справедливо

$$R(v)S(v)=0, \tag{37}$$

где

$$R(v)=\{\tilde{\rho}^2v^4-4\tilde{\mu}\tilde{\rho}v^2+4\tilde{\mu}^2-4p_1p_2\tilde{\mu}^4\}; \tag{38}$$

$$S(v)=2p_1q_2\rho\tilde{\rho}v^4+p_1p_2\{(4\mu(\mu-f_2)+f_2^2)-(4\tilde{\mu}(f_1-\tilde{\mu})-f_1^2)\}+$$
$$+p_1^2p_2^2\{(4\mu(2\tilde{\mu}-\mu)-4\tilde{\mu}^2)+(f_1(2f_2-f_1)-f_1^2)\}.$$

Соотношения (38) соответствуют уравнениям для скоростей поверхностной волны Рэлея [11, 12] и интерфейсной волны Стоунли [13, 14] соответственно.

Асимптотический анализ симметричного дисперсионного соотношения в коротковолновой области. Рассмотрим построение коротковолновых асимптотических приближений ($kh, dh\to\infty$) для симметричного дисперсионного соотношения (13).

Случай 1 ($\rho v^2\to\mu$, причем $\mu<\tilde{\mu}$): значение $\hat{q}_1=iq_1$ является чисто мнимым, а величины q_2, p_1, p_2 являются действительными ($\hat{q}_1\to 0$ при $kh, dh\to\infty$). Используя разложение по малому параметру $\hat{q}_1$, получим

$$\tan(k\widehat{q_1}h)\zeta_3=\hat{q}_1\eta_3+O(\hat{q}_1^2), \tag{39}$$

где величины порядка единицы ζ_3 и η_3 заданы в виде

$$\zeta_3=\overline{p}_1\overline{p}_2(4\tilde{\mu}(\tilde{\mu}-\mu)+\mu^2)+\overline{q}_2\overline{p}_1\mu^2; \tag{40}$$

$$\eta_3=-\mu^2(\overline{p}_2+\overline{q}_2)-\overline{q}_2\overline{p}_1\overline{p}_2(4\mu(2\tilde{\mu}-\mu)-4\tilde{\mu}^2). \tag{41}$$

В ведущем порядке из (39) получим

$$\tan(k\hat{q}_1h)=O(\hat{q}_1), \tag{42}$$

откуда вытекает $\hat{q}_1\to 0$, $\tan\left(k\hat{q}_1h\right)\to 0$, т. е. в главном

$$\hat{q}_1=\frac{n\pi}{kh}. \tag{43}$$

Используя соотношения (4) и (43), получим

$$\rho v_n^2=\mu\left(1+\left(\frac{n\pi}{kh}\right)^2\right)+\ldots,\ n=1,2,3,\ldots\ . \tag{44}$$

Соответствующие приближения для величин q_2, p_1, p_2 имеют вид

$$q_2=\overline{q}_2+O(\hat{q}_1^2);\quad p_1=\overline{p}_1+O(\hat{q}_1^2);\quad p_2=\overline{p}_2+O(\hat{q}_1^2). \tag{45}$$

Уточним результат (43), полагая

$$\hat{q}_1 = \frac{n\pi}{kh} + \frac{\phi_3}{(kh)^2}; \quad \tan(k\hat{q}_1 h) = \frac{\phi_3}{kh}, \tag{46}$$

где ϕ_3 подлежит определению. Подставляя (46) в (39) и приравняя слагамые при соответствующих степенях kh, получим

$$\phi_3 = \frac{\zeta_3}{\eta_3} n\pi. \tag{47}$$

Используя результаты (46), (47), получим уточненное приближение для фазовой скорости (44) в виде

$$\rho v_n^2 = \mu\left(1 + \left(\frac{n\pi}{kh}\right)^2 + 2\frac{(n\pi)^2 \zeta_3}{(kh)^3 \eta_3}\right) + \ldots, \; n = 1, 2, 3, \ldots \; . \tag{48}$$

На примере первых пяти гармоник (рис. 5) для сравнения показано численное решение дисперсионного соотношения (13) с полученными асимптотическими приближениями 3-го порядка (48).

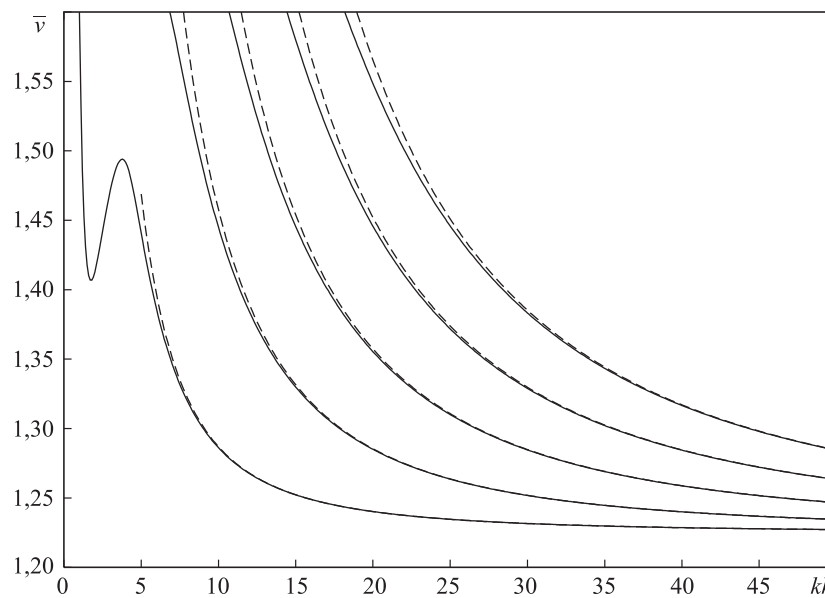


Рис. 5. Построения для дисперсионного соотношения (13) и его коротковолновых асимптотических приближений (48) для $q_1 \to 0$

Случай 2 ($\tilde{\rho} v^2 \to \tilde{\mu}$, причем $\tilde{\mu} < \mu$): величина $\hat{p}_1 = ip_1$ является чисто мнимой, а значения p_2, q_1, q_2 действительны, при этом $\hat{p}_1 \to 0$

при $kh, dh \to \infty$. Используя $\hat{p}_1$ в качестве малого параметра, имеем следующее разложение для дисперсионного соотношения (13):

$$\tan(k\hat{p}_1 d) = \hat{p}_1(4\overline{p}_2\zeta_4 - \eta_4) + O(\hat{p}_1^2), \tag{49}$$

в котором

$$\begin{gathered}\zeta_4 = \overline{q}_1\overline{p}_2\tilde{\mu}^2 + \overline{q}_1\overline{q}_2(4\mu(\mu - \tilde{\mu}) + \tilde{\mu}^2);\\ \eta_4 = \overline{q}_1\overline{q}_2\overline{p}_2(4\mu(2\tilde{\mu} - \mu) - 4\tilde{\mu}^2) + \tilde{\mu}^2(\overline{p}_2\overline{q}_2).\end{gathered} \tag{50}$$

Анализ ведущего порядка дает

$$\tan(k\hat{p}_1 d) \sim O(\hat{p}_1), \tag{51}$$

откуда $\hat{p}_1 \to 0$, $\tan(k\hat{p}_1 d) \to 0$, т. е.

$$\hat{p}_1 \approx \frac{n\pi}{kd}. \tag{52}$$

Из последнего соотношения вместе с формулами (4) следует

$$\tilde{\rho}v_n^2 = \tilde{\mu}\left(1 + \left(\frac{n\pi}{kd}\right)^2\right) + \ldots, \quad n = 1, 2, 3, \ldots\ . \tag{53}$$

Аналогичные разложения для p_2, q_1, q_2 имеют вид

$$q_1 = \overline{q}_1 + O(\hat{p}_1^2); \quad q_2 = \overline{q}_2 + O(\hat{p}_1^2); \quad p_2 = \overline{p}_2 + O(\hat{p}_1^2). \tag{54}$$

Из анализа следующего порядка имеем

$$\hat{p}_1 = \frac{n\pi}{kd} + \frac{\phi_4}{(kd)^2}; \quad \tan(k\hat{p}_1 d) = \frac{\phi_4}{kd}, \tag{55}$$

где

$$\phi_4 = \frac{n\pi(4\overline{p}_2\zeta_4 - \eta_4)}{\zeta_4}. \tag{56}$$

Используя (55), (56), можно уточнить разложение (53). Получим

$$\tilde{\rho}v_n^2 = \tilde{\mu}\left(1 + \left(\frac{n\pi}{kd}\right)^2 + \frac{2(n\pi)^2}{(kd)^3}\frac{(4\overline{p}_2\zeta_4 - \eta_4)}{\zeta_4}\right) + \ldots, \quad n = 1, 2, 3, \ldots\ . \tag{57}$$

Эффективность полученных приближений (57) проиллюстрирована на рис. 6.

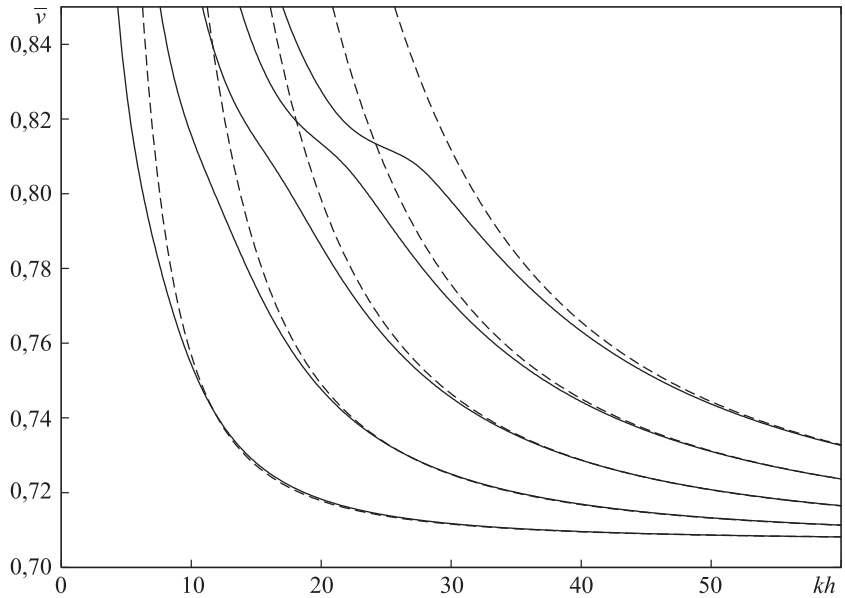


Рис. 6. Построения для дисперсионного соотношения (13) и асимптотических приближений 3-го порядка (57) для $p_1 \to 0$

Заключение. В данной работе приведены результаты асимптотического анализа дисперсионного соотношения в трехслойной пластине в коротковолновой области. В частности, установлено, что пределом фундаментальной моды для фазовой скорости в случае антисимметричного дисперсионного уравнения является скорость соответствующей поверхностной или интерфейсной волны. Также получены коротковолновые приближения для фазовой скорости в случае высокочастотных гармоник. Результаты могут быть применены в оценках погрешности при вычислении соответствующих интегралов по волновому числу.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Kaplunov J. D., Kossovich L. Yu., Nolde E. V. *Dynamics of thin walled elastic bodies*. San-Diego, Academic Press, 1998, 226 p.

[2] Khanh C. L. *Vibrations of shells and rods.* Berlin, Springer, 1999, 423 p.

[3] Kossovitch L.Yu., Rogerson G.A. Approximations for the dispersion relation for a plate composed of transversely isotropic elastic material. *Journal of Sound and Vibration*, 1999, vol. 225, pp. 283–305.

[4] Kaplunov J.D., Nolde E.V., Rogerson G.A. A low frequency model for dynamic motion in a pre-stressed incompressible elastic plate. *Proceedings of the Royal Society of London, Series A*, 2000, vol. 456, pp. 2589–2610.

[5] Kaplunov J.D. Long-wave vibrations of a thin walled body with fixed faces. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 1995, vol. 48, pp. 311–327.

[6] Kaplunov J.D., Nolde E.V., Rogerson G.A. An asymptotically consistent model for long wave high frequency motion in a pre-stressed elastic plate. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 2002, vol.7, pp. 581–606.
[7] Kaplunov J.D., Nolde E.V., Rogerson G.A. An asymptotic short wave approximation for waves for an elastic layer. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 2002, vol. 67, pp. 383–399.
[8] Рязанцева М.Ю. Высокочастотные колебания трехслойных пластин симметричного строения. *Изв. АН СССР. Механика твердого тела*, 1989, № 5, с. 175–181.
[9] Рязанцева М.Ю. О дисперсии волн в бесконечной упругой трехслойной пластине. *Изв. РАН. Механика твердого тела*, 1998, № 1, с. 166–172.
[10] Berdichevski V.L. An asymptotic theory of sandwich plates. *International Journal of Engineering Science*, 2010, vol.48, pp. 383–404.
[11] Dowaikh M.A., Ogden R.W. On surface waves and deformation in a pre-stressed incompressible elastic solid. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 1990, vol. 44, pp. 261–284.
[12] Lord Rayleigh. On waves propagated along the plane surface of an elastic solid. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 1885, vol. 17, pp. 4–11.
[13] Stoneley R. Elastic waves at the surface of separation of two solids. *Proceedings of the Royal Society London. Series A*, 1924, vol. 106, pp. 416–428.
[14] Kiselev A. P., Parker D. F. Omni-directional Rayleigh, Stoneley and Scholte waves with general time dependence. *Proceedings of the Royal Society London. Series A,* 2010, vol. 466, pp. 2241–2258.

Статья поступила в редакцию 15.12.2014

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:
Лашаб М.И., Роджерсон Г.Э., Сэндифорд К.Д. Коротковолновые асимптотики дисперсионных соотношений в случае симметричной трехслойной пластины. *Математическое моделирование и численные методы*, 2015, № 1, с. 50–66.

Лашаб Мохаммед Ибрагим — PhD, доцент кафедры прикладной математики, факультет естественно-научных дисциплин, университет Аласмария, Злитен, Ливия. Автор 7 научных публикаций в области механики сплошных сред.

Роджерсон Грэм Энтони — PhD, профессор, зав. кафедрой математики и компьютерных наук, Кильский университет, Великобритания. Автор около 90 научных публикаций. e-mail: g.a.rogerson@keele.ac.uk

Сэндифорд Кевин Джон — PhD, преподаватель кафедры математики, Солфордский университет, Великобритания. Автор 15 научных публикаций. Область научных интересов: теория упругости, распространение волн в предварительно деформированных упругих средах, асимптотические методы.

A short wave asymptotic analysis of the dispersion relation for a symmetric three-layered elastic plate

@ M.I. Lashab[1], G.A. Rogerson[2], K.J. Sandiford[3]

[1]Faculty of Science, Alasmarya University, Zliten, Libya
[2]School of Computing and Mathematics, Keele University, UK
[3]The University of Salford, UK

The dispersion relation for a symmetric 3-layered elastic plate is derived and analysed, both numerically and asymptotically. Each layer is assumed to be composed of a linear isotropic elastic material. Numerical solutions of the relation are first presented. After presentation of these numerical solutions, particular focus is applied to the short wave regime, within which appropriate asymptotic approximations are established. These are shown to provide excellent agreement with the numerical solution over a surprisingly larger than might be expected wave number regime. It is envisaged that these solutions might offer some potential for estimation of truncation error for wave number integrals and thereby enable the development of hybrid numerical-asymptotic methods to determine transient structural response to impact.

Keywords: *3-layered plate, dispersion relation, short-wave asymptotics.*

REFERENCES

[1] Kaplunov J.D., Kossovich L.Yu. and Nolde E.V. *Dynamics of thin walled elastic bodies*. San-Diego, Academic Press, 1998, 226 p.
[2] Khanh C.L. *Vibrations of shells and rods.* Berlin, Springer, 1999, 423 p.
[3] Kossovitch L.Yu. and Rogerson G.A. Approximations for the dispersion relation for a plate composed of transversely isotropic elastic material. *Journal of Sound and Vibration*, 1999, vol. 225, pp. 283–305.
[4] Kaplunov J.D., Nolde E.V., and Rogerson G.A. A low frequency model for dynamic motion in a pre-stressed incompressible elastic plate. *Proceedings of the Royal Society of London, Series A*, 2000, vol. 456, pp. 2589–2610.
[5] Kaplunov J.D. Long-wave vibrations of a thin walled body with fixed faces. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 1995, vol. 48, pp. 311–327.
[6] Kaplunov J.D., Nolde E.V., and Rogerson G.A. An asymptotically consistent model for long wave high frequency motion in a pre-stressed elastic plate. *Mathematics and Mechanics of Solids,* 2002, vol. 7, pp. 581–606.
[7] Kaplunov J.D., Nolde E.V., and Rogerson G.A. An asymptotic short wave approximation for waves for an elastic layer. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 2002, vol. 67, pp. 383–399.
[8] Ryazantseva M.Yu. Vysokochastotnye kolebaniya trekhsloynykh plastin simmetrichnogo stroeniya [High frequency vibration of three layer symmetric plates]. *Izvestiya Akademii nauk SSSR. Mekhanika tverdogo tela – Proceedings of the USSR Academy of Sciences. Mechanics of Solids*, 1989, no. 5, pp. 175–181.
[9] Ryazantseva M.Yu. O dispersii voln v beskonechnoy uprugoy nrekhsloynoy plastine [On wave dispersion in infinite elastic three layer plates]. *Izvestiya Rossiyskoy Akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela – Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of Solids*, 1998, no. 1, pp. 166–172.
[10] Berdichevski, V.L. An asymptotic theory of sandwich plates. *International Journal of Engineering Science*, 2010, vol. 48, pp. 383–404.

[11] Dowaikh M.A. and Ogden R.W. On surface waves and deformation in a pre-stressed incompressible elastic solid. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 1990, vol. 44, pp. 261–284.
[12] Lord Rayleigh. On waves propagated along the plane surface of an elastic solid. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 1885, vol. 17, pp. 4–11.
[13] Stoneley R. Elastic waves at the surface of separation of two solids. *Proceedings of the Royal Society London, Series A*, 1924, vol. 106, pp. 416–428.
[14] Kiselev A.P., Parker D.F. Omni-directional Rayleigh, Stoneley and Scholte waves with general time dependence. *Proceedings of the Royal Society London, Series A,* 2010, vol. 466, pp. 2241–2258.

Lashhab Mohamed Ibrahim, PhD, Lecturer in Applied Mathematics, Faculty of Science, Alasmarya University, Zliten, Libya. Author of 7 research publications in continuum mechanics. Research interests: continuum mechanics of pre-stressed media, wave propagation, edge waves, asymptotic methods.

Rogerson Graham Anthony, PhD, Professor, Head of School of Computing and Mathematics, Keele University, UK. Author of about 90 research papers. Research interests: Continuum mechanics, elasticity theory, waves in pre-stressed elastic bodies, layered structures, asymptotic methods. e-mail: g.a.rogerson@keele.ac.uk

Sandiford Kevin John, PhD, Lecturer in Mathematics, The University of Salford, UK. Author of 15 research publications. Research interests: theory of elasticity, wave propagation in pre-stressed media, asymptotic methods.