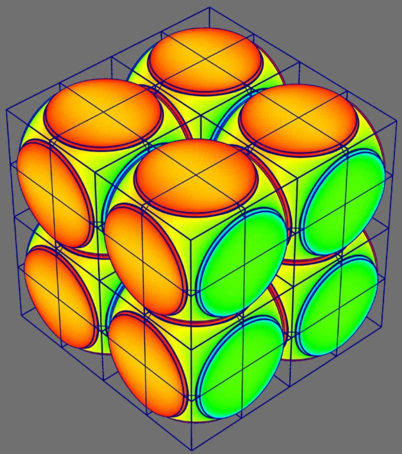
ISSN 2309-3684

Математическое моделирование и численные методы



Егоров С.И., Сапожников Д.А., Усатюк В.С. Применение аппроксимации энергии Бете для определения числовых характеристик кодов на графе. Математическое моделирование и численные методы, 2025, № 1, с. 104–115.

УДК 519.6:004 DOI: 10.18698/2309-3684-2025-1-104115

Применение аппроксимации энергии Бете для определения числовых характеристик кодов на графе

© С.И. Егоров[1], Д.А. Сапожников[2], В.С. Усатюк[2]

[1]Юго-Западный государственный университет, Курск, 305040, Россия
[2]«ООО Т8», Москва, 107076, Россия

В работе рассматривается применение Бете-аппроксимации энергии Гиббса для определения перманента матрицы. Проведен анализ зарубежной литературы, включая известные аналитические и численные методы оценки Бете-перманента. Предложен комбинаторный метод определения Бете-перманента при помощи циклического индекса группы симметрии. Также предложен вероятностный метод определения Бете-перманента на основе Якоби-аппроксимации (normalized min-sum) метода распространения доверия (Belief Propagation), позволяющий вычислять перманент с линейной сложностью. Предложен способ применения Бете-перманента для определения псевдокодовых слов протоматрицы низкоплотностного кода.

Ключевые слова: *Бете перманент, перманент, псевдокодовое слово, низкоплотностный код, код на графе, энергия Бете*

Введение. В последние годы исследователи в области теории информации все чаще обращаются к моделям статистической физики как в поиске метрик оценки качества, так и для построения моделей [1,2]. Сама идея связи теории информации и статистической физики не нова: определение информационной энтропии К. Шеннона тесно связано с статистической энтропией Л. Больцмана [2,3]. Современные исследователи используют, например, модель Исинга спиновых стекол для улучшения метрик в теории кодирования [4,5,6].

Актуальность вычисления Бете-перманента обусловлена его практической значимостью для решения важных задач статистической физики, машинного обучения и теории информации. В теории кодирования Бете-перманент представляет собой эффективный метод для анализа структурных свойств кодов на графах, позволяя оценивать их дистантные характеристики [7, 8].

Методы вычисления Бете-перманента можно разделить на два класса. Первый использует комбинаторные подходы, основанные на поиске идеальных совпадений (perfect matchings) в двудольных графах и анализе структурных свойств матриц [9 – 15]. Второй класс составляют вероятностные методы, такие как алгоритм Belief Propagation (sum-product BP), которые используют итеративные процедуры для приближенной оценки перманента через распространение локальных сообщений в графовой структуре [16 - 18].

Предложенные в рамках этих двух подходов методы имеют существенные недостатки. Комбинаторные методы показывают высокую точность, но при этом характеризуются экспоненциальным ростом вычислительной сложности $\left(O\left(n!\right)\right)$ и применимы лишь к матрицам специального вида. Предложенные вероятностные методы имеют полиномиальный рост сложности $\left(O\left(n^2\right)\right)$. Несмотря на меньшую сложность известные вероятностные методы все еще не позволяют вычислять Бете-перманента для матриц используемых на практике длинных кодов на графах.

Данное исследование посвящено разработке новых комбинаторных и вероятностных методов вычисления Бете-перманента как для плотных, так и для разреженных матриц, обладающих меньшей вычислительной сложностью.

Основные понятия Бете-перманента. Для того, чтоб говорить о понятии Бете-перманента, для начала нужно ввести определение перманента матрицы [14], которое неразрывно связано с определением детерминанта матрицы.

Пусть $H=\left(H_{ij}\right)\sim\left[m\times m\right]$ - квадратная матрица, тогда перманент матрицы H определяется как [14], [19]:

$$perm\left(H\right)=\sum_{\sigma\in S_m}\prod_{i\in[m]}H_{i\sigma(i)}, \tag{1}$$

где S_m — множество всех возможных перестановок над множеством $\left[m\right]$.

Соотношение (1) отличается от определения детерминанта матрицы только отсутствием знакочередования и тем, что может быть расширено на неквадратные матрицы.

Так, для матрицы вида $H=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ перманент определяется как $perm\left(H\right)=1\cdot1+1\cdot1=2$.

Аппроксимацией перманента матрицы являются *M*-перманент Бете и перманент Бете. Они определяются для *P*-расширенной матрицы. Для матрицы, рассмотренной выше, *P*-расширенной матрицей будет

$$H^{P_M\uparrow}=\begin{pmatrix}P_{11} & P_{12}\\ P_{21} & P_{22}\end{pmatrix}, \tag{2}$$

здесь $P_{ij}\sim\left[M\times M\right]$, $P_{ij}\in\psi_{m,M}$ — перестановочные матрицы (пермутанты) из $\psi_{m,M}$ — множества всех перестановочных матриц размера

$[M \times M]$. Матрица перестановок получается из единичной матрицы изменением порядка расположения строк. Иначе говоря, квадратная матрица, в каждой строке и в каждом столбце которой только один элемент отличен от нуля и равен единице, называется матрицей перестановок.

Важными в рамках данной работы являются следующие свойство и утверждения для матриц перестановок [19].

Свойство 1:

$$PP^T = P^T P = I\,. \tag{3}$$

Утверждение 1. Произведение матриц перестановок одного и того же порядка есть матрица перестановок [14, 19].

Утверждение 2. Матрица перестановок порядка n может быть представлена в виде произведения (n - 1) элементарных матриц перестановок [9, 19].

Утверждение 3. Квадрат элементарной матрицы перестановок есть единичная матрица [19].

На основе этого *M*-перманент Бете матрицы *H* определяется следующим образом [9]:

$$perm_{BM}\left(H\right) = \sqrt[M]{\left\langle perm\left(H^{P_M\uparrow}\right)\right\rangle_{\psi_{m,M}}}\,, \tag{4}$$

где угловые скобки означают среднее по всем элементам множества ψ. Непосредственное использование формулы (4) приводит к сложным вычислениям: вместо одного перманента матрицы $[2 \times 2]$ необходимо посчитать $M\,!$ перманентов матриц размера $[2M \times 2M]$.

Вычисление *M*-перманента Бете можно упростить путем следующего преобразования матрицы $H^{P_M\uparrow}$, полученного с использованием свойства 1 и утверждения 1:

$$\begin{aligned} H^{P_M\uparrow} &= \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11}P_{11}{}^T & P_{12}P_{11}{}^T \\ P_{21}P_{21}{}^T & P_{22}P_{21}{}^T \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} I & P_{12} \\ I & P_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} II^T & P_{12}P_{12}{}^T \\ II^T & P_{22}P_{12}{}^T \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} I & I \\ I & P_{22} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{5}$$

В результате в матрице остался всего один блок-пермутант размера $[M \times M]$.

Приведем два важных примера для $M = 2$ и $M = 3$.

В случае $M = 2$, согласно (5), имеются две матрицы $H^{P_2\uparrow}$:

$$H^{P_2\uparrow}{}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \; H^{P_2\uparrow}{}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Определим идеальные совпадения (perfect matchings) [12] в двудольном графе. Положим граф $G = (V, E)$, где V — множество вершин, E — множество ребер. Тогда определим $E' \subseteq E$, такое, что никакая пара ребер из E' не имеет общей конечной вершины. Такие ребра представляют собой идеальные совпадения на графе. Мощность подмножества E' является числом идеальных совпадений.

Рассмотрим двудольные графы для вышеприведенных матриц (рис. 1):

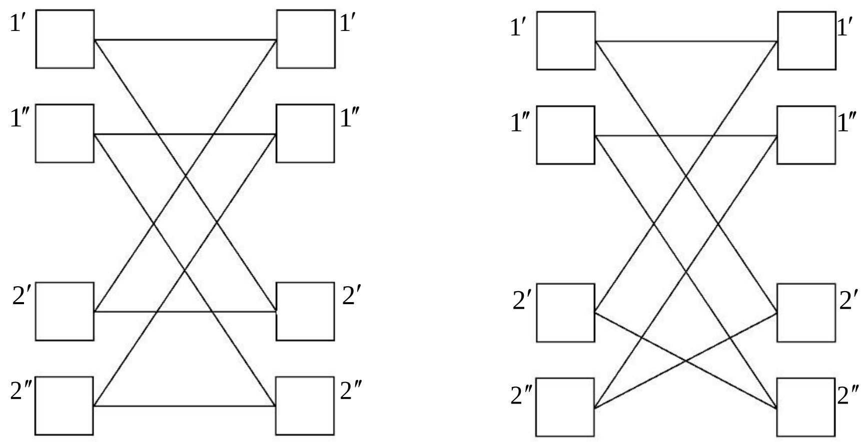


Рис. 1. Двудольные графы для матриц $H^{P_2\uparrow}{}_1$ и $H^{P_2\uparrow}{}_2$

Посчитаем теперь идеальные совпадения на графах. Для матрицы $H^{P_2\uparrow}{}_1$ имеем 4 варианта идеальных совпадений [12-13]:

$$\begin{pmatrix} 1'-1' \\ 1''-1'' \\ 2'-2' \\ 2''-2'' \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1'-1' \\ 1''-2'' \\ 2'-2' \\ 2''-1'' \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1'-2' \\ 1''-1'' \\ 2'-1' \\ 2''-2'' \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1'-2' \\ 1''-2'' \\ 2'-1' \\ 2''-1'' \end{pmatrix} \quad (7)$$

для матрицы $H^{P_2\uparrow}{}_2$, соответственно, имеем 2 варианта идеальных совпадений [13]:

$$\begin{pmatrix} 1'-1' \\ 1''-1'' \\ 2'-2'' \\ 2''-2' \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1'-2' \\ 1''-2'' \\ 2'-1' \\ 2''-1'' \end{pmatrix}; \tag{8}$$

Теперь можно определить Бете-перманент порядка $M=2$ исходной матрицы следующим образом [9]:

$$perm_{B,M=2} = \sqrt[M]{\frac{1}{M!}\sum_{i=1}^{M}\left|E_i'\right|} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(4+2\right)}\,. \tag{9}$$

Рассмотрим теперь матрицу $H^{P_3\uparrow}$ (M = 3). Легко убедиться, что для такой матрицы существует 1 набор из 3 совпадений, 3 набора из 2 совпадений и 1 набор с 1 совпадением, иными словами:

$$perm_{B,M=3}\left(H^{P_3\uparrow}\right) = \sqrt[M]{\frac{1}{M!}\sum_{i=1}^{M}\left|E_i'\right|} = \sqrt[3]{\frac{1}{6}\left(2^3+3\cdot 2^2+2\cdot 2^1\right)}\,. \tag{10}$$

Взяв предел M-перманента при $M \to \infty$, получим выражение для Бете-перманента [10]:

$$perm_B\left(H\right) = \lim_{M\to\infty} perm_{B,M}\left(H^{P_M\uparrow}\right). \tag{11}$$

Для матриц вида (2), (6) известно точное значение Бете-перманента [13]:

$$perm_B\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \lim_{M\to\infty}\sqrt[M]{M+1} = 1\,. \tag{12}$$

Однако, вычисление Бете-перманента всюду плотной матрицы с протографом $\left[2\times 2\right]$ с использованием описанного метода (12) остается слишком сложным для практически важных случаев.

Метод оценки Бете-перманента с использованием теории групп. M-перманент Бете матрицы можно определить из соображений теории групп. Авторами предлагается оригинальный метод определения Бете-перманента при помощи циклического индекса группы симметрии:

$$\sqrt[M]{\left\langle perm_{BM}\left(H^{P_M\uparrow}\right)\right\rangle_{\psi_{m,M}}} = Z\left(S_M\right), \tag{13}$$

где $Z\left(S_M\right)$ — циклический индекс группы симметрии.

Циклический индекс группы симметрии может быть определен в терминах полиномов Бэлла:

$$Z\left(S_M\right)=\frac{B_M\left(0!a_1,1!a_2,...,(n-1)!a_M\right)}{M!}, \tag{14}$$

где $B_M\left(0!a_1,1!a_2,...,(n-1)!a_M\right)$ — полином Бэлла, $a_l=2^c$ — переменные Бэлла, $c\sim\left[1;M\right]$ — количество циклов, образуемых рассматриваемой подстановкой.

Вычисление индекса группы сводится к применению рекурсивного соотношения

$$Z\left(S_M\right)=\frac{1}{M!}\sum_{l=1}^{M}C_{l-1}^{M-1}(l-1)!a_l\left(M-l\right)!Z\left(S_{M-1}\right);$$
$$Z\left(S_0\right)=1. \tag{15}$$

Для достаточно больших значений M с учетом неравенства $perm_B\left(A\right)\le perm_{BM}\left(A\right)$, можно считать, что получена достаточно точная оценка Бете-перманента матрицы.

Однако при увеличении M рекурсивно растет сложность вычислений. Такой рост сложности ограничивает применение предлагаемого комбинаторного метода матрицами кодов на графах небольшой длины.

Метод распространения доверия (Belief Propagation). Вероятностный подход к определению Бете-перманента рассматривается в работах [16 - 18]. Известен [16, 17] метод для локальной минимизации свободной энергии Бете – распространение доверия (Belief Propagation, BP). Метод распространения доверия предусматривает итеративную пересылку сообщений между узлами графа, описывающего матрицу. В [17] предлагается использовать sum-product реализацию BP-метода для оценки Бете-перманента. Рассмотрим подробнее этот метод.

Положим, что $m_{x_l}\left(y_j\right)$ — сообщение между вершинами графа x_i и y_j, тогда величины правдоподобия определяются через сообщения, как [17]:

$$b\left(x_i,y_j\right)\sim\psi\left(x_i,y_j\right)\phi\left(x_i\right)\phi\left(y_j\right)\prod_{k\neq j}m_{y_k}\left(x_i\right)\prod_{l\neq i}m_{x_l}\left(y_j\right)$$
$$b\left(x_i,\right)\sim\phi\left(x_i\right)\prod_{k\neq j}m_{y_k}\left(x_i\right);\ b\left(y_j\right)\sim\phi\left(y_j\right)\prod_{l\neq i}m_{x_l}\left(y_j\right) \tag{16}$$

где ϕ,ψ — односимвольный и двусимвольный потенциалы [16].

На каждой итерации сообщения обновляются согласно правилу:

$$m_{xi}{}^{new}\left(y_j\right)=\sum_{x_i}\left[\phi\left(x_i\right)\psi\left(x_i,y_j\right)\prod_{k\neq j}m_{y_k}\left(x_i\right)\right]. \tag{17}$$

Амплитуды доверия сообщений уменьшаются при помощи масштабирующего множителя $0 < \alpha \le 1$ для обеспечения более плавной оптимизации в логарифмическом пространстве:

$$\ln m_{xi}\left(y_j\right) \leftarrow \ln m_{xi}\left(y_j\right) + \alpha\left[\ln m_{xi}{}^{new}\left(y_j\right) - \ln m_{xi}\left(y_j\right)\right]. \tag{18}$$

Реализация sum-product BP-метода вычислительно сложна $\left(O\left(n^2\right)\right)$. Вместо этого, авторы предлагают использовать normalized min-sum реализацию (Якоби-аппроксимацию) BP-метода. Ниже дано описание этого предлагаемого метода.

Редуцируем все возможные сообщения до двух вариантов: когда сообщения между переменными не совпадают и когда они совпадают:

$$\begin{gathered} y_j \ne i: \\ m_{x_i y_j}^{not} = \sum_{x_i \ne j} \phi\left(x_j\right) m_{y_{xi} x_i}^{match} \prod_{k \ne j, k \ne x_i,} m_{y_k x_i}^{not}; \end{gathered} \tag{19}$$

$$\begin{gathered} y_j = i: \\ m_{x_i y_j}^{match} = \phi\left(x_i = j\right) \prod_{k \ne j} m_{y_k x_i}^{not}. \end{gathered} \tag{20}$$

Нормировав по $m_{y_k x_i}^{not}$, получим:

$$\begin{gathered} m_{x_i y_j}^{not} = 1; \\ m_{x_i y_j}^{match} = \frac{\phi\left(x_i = j\right)}{\sum_{k \ne j} \phi\left(x_i = k\right) m_{y_k x_i}^{match}}. \end{gathered} \tag{21}$$

Определим быстрое правило обновления сообщений, исходя из того, что необходимо обновить только одно значение между каждой парой переменных:

$$m_{x_i y_j} \leftarrow \frac{1}{Z} \phi\left(x_i = j\right) / \sum_{k \ne j} \phi\left(x_i = k\right) m_{y_k x_i}. \tag{22}$$

Перепишем формулы для обновления значений, используя новые значения для сообщений:

$$\begin{gathered} b\left(x_i = j, y_j = i\right) = \frac{1}{Z_{ij}} \phi\left(x_i\right) \phi\left(y_j\right); \\ b\left(x_i \ne j, y_j \ne i\right) = \frac{1}{Z_{ij}} \phi\left(x_i\right) \phi\left(y_j\right) m_{y_{x_i} x_i} m_{x_{y_j} y_j}; \\ b\left(x_i\right) = \frac{1}{Z} \phi\left(x_i\right) m_{y_{x_i} x_i}; \\ b\left(x_i\right) = \frac{1}{Z} \phi\left(y_j\right) m_{x_{y_j} y_j}. \end{gathered} \tag{23}$$

Соотношения (23) представляют собой Якоби-аппроксимацию BP-метода, позволяющую вычислять перманент матрицы с линейным ростом сложности $\left(O(n)\right)$.

Пример определения числовых характеристик низкоплотностного кода. Важным следствием вычисления перманента Бете является возможность определения псевдокодовых слов для разреженных матриц проверки четности. Рассмотрим матрицу $H \sim [m \times n], m < n$, выделим в ней все подматрицы $H_i' \sim [m \times m+1]$ размера. Всего таких матриц C_{m+1}^{n}. Определив векторы β ~ n, приняв позиции, не вошедшие в отдельно взятую матрицу H', равными нулю, будем вычислять бете-перманент матрицы $H'' \sim [m \times m]$, полученной из исходной путем вычеркивания k-го столбца. Таким образом,

$$\beta_k = perm_B\left(H_i'/k\right) = perm_B\left(H_k''\right). \tag{24}$$

Рассмотрим теперь матрицу вида:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{25}$$

Определим для данной матрицы вектор-перманенты и Бете-аппроксимацию вектор-перманентов (для данной матрицы существует 66 вектор-перманентов, рассмотрим случайную выборку 5 векторов).

Полученные результаты соответствуют приведенным в [14,15] результатам. Для чистоты эксперимента не применялся искусственный порог отсечения чисел, близких к нулю, однако, он вполне может применяться, пропорционально изменяясь в зависимости от размера матрицы.

Таблица 1

Сравнительные оценки значений перманентов и Бетеперманентов для матрицы *H*

Номер вектора	Номер узла	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	перманент	6	4	4	2	2	2	2	2	2	2	0	0
	Бете перманент	2.3703	1.6875	1.6875	1	1	1	1	1	1	1	0	0
2	перманент	4	6	4	2	2	2	2	2	2	0	2	0
	Бете перманент	1.6875	2.3703	1.6875	1	1	1	1	1	1	0	1	0
3	перманент	4	4	6	2	2	2	2	2	2	0	0	2
	Бете перманент	1.6875	1.6875	2.3703	1	1	1	1	1	1	0	0	1
4	перманент	6	6	2	2	2	2	2	2	0	2	2	0
	Бете перманент	2.2143	2.2143	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0
5	перманент	4	4	4	0	2	2	2	2	0	2	0	2
	Бете перманент	1.6875	1.6875	1.6875	0.0201	1	1	1	1	0	1	0	1

Заключение. Рассмотрены основные аспекты вычисления Бете-перманента матрицы. Полученные комбинаторные соотношения ((13) - (15)) вместе с аналитическими оценками для плотных матриц ((11), (12)) обеспечивают асимптотическую оценку Бете-перманента, позволяющую приближённо вычислять перманент матрицы, что согласуется с соотношениями, предложенными в [10, 12].

Предложен комбинаторный метод определения Бете-перманента при помощи циклического индекса группы симметрии, позволяющий уменьшить вычислительную сложность.

Также предложен вероятностный метод определения Бете-перманента на основе Якоби-аппроксимации (normalized min-sum) метода распространения доверия (Belief Propagation), позволяющий вычислять перманент с линейной сложностью.

Предложен способ применения Бете-перманента для определения псевдокодовых слов протоматрицы низкоплотностного кода. В таблице приведены результаты моделирования вектор-перманентов Бете матрицы в сравнении с ее Бете-аппроксимациями. Полученные отношения этих величин согласуются с соотношениями (10) - (12). В дальнейших работах авторы планируют изучить возможность определения Бете-аппроксимации гессиана матрицы и связи энергии Бете с температурой Нишимури.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Usatyuk V.S., Egorov S.I. Hyper neural network as the diffeomorphic domain for short code soft decision beyound belief propagation decoding problem, 2020 *2020 IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS)*, pp. 1-6.

[2] Mėzard M., Montanari A. *Information, Physics, and Computation*. Oxford, Oxford University Press, 2009, 569 p.

[3] Shannon C. E. A Mathematical Theory of Communication. *Bell System Technical Journal*, 1948, vol. 27, no. 4, pp. 623–656.

[4] Усатюк В.С. Построение квазициклических недвоичных низкоплотностных кодов на основе совместной оценки их дистантных свойств и спектров связности. *Телекоммуникации*, 2016, № 8, с. 32-40.

[5] Usatyuk V. S. Low error floor QC-LDPC codes construction using modified cole's trapping sets enumerating. *IEEE*, 2023, pp. 1-6. DOI: 10.1109/DSPA57594.2023.10113442

[6] Усатюк В.С., Егоров С.И. Построение LDPC-кодов с использованием модифицированного метода выборки по значимости Коула. *Известия Юго-Западного государственного университета*, 2023, т. 27, № 1, с. 92-110.

[7] Usatyuk V., Egorov. S., Svistunov G. Construction of length and rate adaptive met QC-LDPC codes by cyclic group decomposition. *IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS)*, 2019, pp. 1-5

[8] Усатюк В.С. Определение кодового расстояния недвоичного LDPC-кода блочным методом Коркина-Золотарева. *Известия Юго-Западного государственного университета. Серия: Управление, вычислительная техника, информатика. Медицинское приборостроение*, 2015, т. 3, № 16, с. 76-85.

[9] Vontobel P. O. The Bethe permanent of a non-negative matrix. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2013, vol. 59, pp. 1866–1901.

[10] Huang Y., Vontobel P.O. Bounding the Permanent of a Non-negative Matrix via its Degree- M Bethe and Sinkhorn Permanents. *IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT)*, 2023, pp. 2774-2779.

[11] Vontobel P. O. Connecting the Bethe entropy and the edge zeta function of a cycle code. *IEEE International Symposium on Information Theory*, 2010, pp. 704-708. DOI: 10.1109/ISIT.2010.5513594.

[12] Huang Y., Vontobel P.O. On the Relationship Between the Minimum of the Bethe Free Energy Function of a Factor Graph and Sum-Product Algorithm Fixed Points, *IEEE Information Theory Workshop (ITW)*, 2022, pp. 666-671. DOI: 10.1109/ITW54588.2022.9965874.

[13] Kit Shing NG, Vontobel P.O. Double-cover-based analysis of the Bethe permanent of non-negative matrices. *IEEE Information Theory Workshop (ITW)*, 2022, pp.672-677.

[14] Roxana Smarandache. Pseudocodewords from Bethe permanents. *IEEE International Symposium on Information Theory*, 2013.

[15] Roxana Smarandache. Pseudocodewords from Bethe permanents. *ISIT*, 2013, pp. 2059-2063

[16] Huang B., Jebara T. Approximating the permanent with Belief propagation. *Journal of machine learning research*, 2013, vol. 14, pp. 2029-2066.

[17] Straszak D., Vishnoi N.K. Belief Propagation, Bethe Approximation and Polynomials. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2019, vol. 65, no. 7, pp. 4353-4363. DOI:10.1109/ALLERTON.2017.8262801.

[18] Anari N., Rezaei A. A Tight Analysis of Bethe Approximation for Permanent. *SIAM Journal on Computing*, 2021. https://doi.org/10.1137/19M1306142

[19] Гантмахер Ф. Р. *Теория матриц*. Изд. 2-е, доп. Москва, Наука, 1966, 577 с.

Статья поступила в редакцию 28.01.2024

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:
Егоров С.И., Сапожников Д.А., Усатюк В.С. Применение аппроксимации энергии Бете для определения числовых характеристик кодов на графе. *Математическое моделирование и численные методы,* 2025, № 1, с. 104–115.

Егоров Сергей Иванович – д-р техн. наук, доцент, профессор кафедры вычислительной техники Юго-Западного государственного университета.

Сапожников Денис Алексеевич – исследователь, преподаватель-исследователь, ведущий инженер научной группы департамента исследований и разработок, ООО «Т8». e-mail: sapozhnikov@t8.ru

Усатюк Василий Станиславович – канд. техн. наук, главный инженер научной группы департамента исследований и разработок, ООО «Т8». e-mail: usatiuk@t8.ru

Application of Bethe energy approximation to determine the numerical characteristics of codes on a graph structures

© S.I. Egorov[1], D.A. Sapozhnikov[2], V.S. Usatyuk[2]

[1]South-West State University, Kursk, 305040, Russia
[2]LLC T8, Moscow, 107076, Russia

The paper considers the application of the Bethe approximation of the Gibbs energy to determine the matrix permanent. An analysis of foreign literature in the area under consideration was carried out. A combinatorial method for determining the Bethe permanent using the cyclic index of the symmetry group is proposed. A probabilistic method for determining the Bethe permanent is also proposed based on the Jacobi approximation (normalized min-sum) of the Belief Propagation method, which allows calculating the permanent with linear complexity. A method for using the Bethe permanent to determine pseudocode words of the protomatrix of a low-density code is proposed.

***Keywords**: Bethe permanent, permanent, pseudo-code word, low-density code, graph code, Bethe energy*

REFERENCES

[1] Usatyuk V.S., Egorov S.I. Hyper neural network as the diffeomorphic domain for short code soft decision beyound belief propagation decoding problem, 2020 *2020 IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS)*, pp. 1-6.

[2] Mėzard M., Montanari A. *Information, Physics, and Computation*. Oxford, Oxford University Press, 2009, 569 p.

[3] Shannon C. E. A Mathematical Theory of Communication. *Bell System Technical Journal*, 1948, vol. 27, no. 4, pp. 623–656.

[4] Usatyuk V. S. Postroenie kvaziciklicheskih nedvoichnyh nizkoplotnostnyh kodov na osnove sovmestnoj ocenki ih distantnyh svojstv i spektrov svyaznosti [Construction of quasi-cyclic non-binary low-density codes based on a joint as-

sessment of their distance properties and connectivity spectra]. *Telekommunikacii* [Telecommunications], 2016, no. 8, pp. 32-40.

[5] Usatyuk V. S. Low error floor QC-LDPC codes construction using modified cole's trapping sets enumerating. *IEEE*, 2023, pp. 1-6. DOI: 10.1109/DSPA57594.2023.10113442

[6] Usatyuk V.S., Egorov S.I. Constructing LDPC codes using the modified Cole significance sampling method. *Proceedings of the Southwest State University*, 2023, vol. 27, no. 1, pp. 92-110.

[7] Usatyuk V., Egorov. S., Svistunov G. Construction of length and rate adaptive met QC-LDPC codes by cyclic group decomposition. *IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS)*, 2019, pp. 1-5

[8] Usatyuk V.S. Determination of the code distance of a non-binary LDPC code using the Korkin-Zolotarev block method. *Proceedings of the Southwest State University. Series: IT Management, Computer Science, Computer Engineering. Medical Equipment Engineering*, 2015, vol. 3, no. 16, pp. 76-85.

[9] Vontobel P. O. The Bethe permanent of a non-negative matrix. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2013, vol. 59, pp. 1866–1901.

[10] Huang Y., Vontobel P.O. Bounding the Permanent of a Non-negative Matrix via its Degree- M Bethe and Sinkhorn Permanents. *IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT)*, 2023, pp. 2774-2779.

[11] Vontobel P. O. Connecting the Bethe entropy and the edge zeta function of a cycle code. *IEEE International Symposium on Information Theory*, 2010, pp. 704-708. DOI: 10.1109/ISIT.2010.5513594.

[12] Huang Y., Vontobel P.O. On the Relationship Between the Minimum of the Bethe Free Energy Function of a Factor Graph and Sum-Product Algorithm Fixed Points, *IEEE Information Theory Workshop (ITW)*, 2022, pp. 666-671. DOI: 10.1109/ITW54588.2022.9965874.

[13] Kit Shing NG, Vontobel P.O. Double-cover-based analysis of the Bethe permanent of non-negative matrices. *IEEE Information Theory Workshop (ITW)*, 2022, pp.672-677.

[14] Roxana Smarandache. Pseudocodewords from Bethe permanents. *IEEE International Symposium on Information Theory*, 2013.

[15] Roxana Smarandache. Pseudocodewords from Bethe permanents. *ISIT*, 2013, pp. 2059-2063

[16] Huang B., Jebara T. Approximating the permanent with Belief propagation. *Journal of machine learning research*, 2013, vol. 14, pp. 2029-2066.

[17] Straszak D., Vishnoi N.K. Belief Propagation, Bethe Approximation and Polynomials. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2019, vol. 65, no. 7, pp. 4353-4363. DOI:10.1109/ALLERTON.2017.8262801.

[18] Anari N., Rezaei A. A Tight Analysis of Bethe Approximation for Permanent. *SIAM Journal on Computing*, 2021. https://doi.org/10.1137/19M1306142

[19] Gantmaher F. R. *Teoriya matric*. Izd. 2-e [Theory on matrices. 2nd Ed.]. Moscow, Nauka Publ., 1966, 577 p.

Egorov S.I., Ph.D. (Dr. Sc. (Eng.), Associate Professor, Professor of the Department of Computer Engineering at Southwestern State University.

Sapozhnikov D.A., researcher, lecturer, researcher, leading engineer of the scientific group of the Department of Research and Development, «T8» LLC. e-mail: sapozhnikov@t8.ru

Usatyuk V.S., Ph.D. (Cand. Sc. (Eng.), Chief Engineer of the Scientific group of the Research and Development Department, «T8» LLC. e-mail: usatiuk@t8.ru