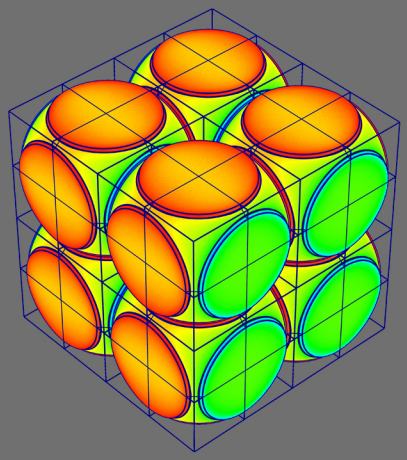
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Посудневская А.О. Численное исследование влияния момента внешней силы на формирование когерентных турбулентных структур. Математическое моделирование и численные методы, 2025, № 1, с. 92–103.

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/368/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.217.22
18.11.2026 12:59:46

УДК 532.5.032:532.517.3 DOI: 10.18698/2309-3684-2025-1-92103

Численное исследование влияния момента внешней силы на формирование когерентных турбулентных структур

© А.О. Посудневская[1,2,3,4]

[1]ИТФ им. Л.Д. Ландау РАН, Черноголовка, 142432, Россия
[2]ИАП РАН, Москва, 123056, Россия
[3]МФТИ, Москва, 117303, Россия
[4]МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Рассматривается задача двумерного течения вязкой слабосжимаемой жидкости в квадратной ячейке при возбуждении периодической в пространстве статической внешней силой (течение Колмогорова) и наличии трения о дно. Численно исследуется влияние наличия и отсутствия момента внешней силы (подкрутки) на формирование течения. Показано, что наличие момента внешней силы при определенных значениях амплитуды силы и коэффициента трения о дно приводит к возникновению одной когерентной структуры, занимающей всю исследуемую область квадратной ячейки. Отсутствие момента возбуждающей силы формирует в ячейке вихревой диполь.

Ключевые слова: *турбулентность, численное моделирование, течение Колмогорова, вязкая жидкость, вихревые течения*

Введение. Работа посвящена исследованию широко распространенного в природе явления — турбулентного течения вязкой жидкости под воздействием внешней силы.

Для трехмерной турбулентности характерен прямой каскад энергии [1-2]. В этом случае энергия переносится от масштаба генерации течения на более мелкие масштабы, вплоть до диссипативного, где за счет вязкости энергия переходит в тепло.

В настоящей работе рассматривается класс вихревых течений, возникающих в двумерном случае. Они наблюдаются в системах, горизонтальные размеры которых значительно превосходят вертикальные. Первые теоретические работы по двумерной турбулентности выявили её принципиальные отличия от трехмерной [3-7]. В плоском случае существуют два квадратичных интеграла движения — энергия и энстрофия, которые сохраняются в отсутствии возбуждающей силы и диссипации. При наличии возбуждающей силы эти величины изменяются, но диссипируют на разных масштабах: энстрофия диссипирует на малых масштабах за счет вязкости, тогда как энергия диссипирует на больших масштабах за счет трения о дно. В результате возникают прямой каскад энстрофии на малых масштабах, и обратный каскад энергии на больших масштабах.

Существование обратного каскада энергии приводит к ее накоплению, что вызывает интенсивное крупномасштабное движение, включая образование крупных вихрей [4, 6, 8]. Данное явление подтверждено как экспериментально [9], так и численно [10-12]. Когерентные вихри при численном моделировании были получены в [13-16]. Похожая вихревая структура наблюдалась в лабораторных условиях для квадратной кюветы [17-19]. Крупные вихри были получены при численном моделировании течений со статической накачкой и различными типами крупномасштабной диссипации [20, 21].

Изучению свойств когерентного вихря посвящена целая серия теоретических и вычислительных работ [22-25]. В работе [22] была предпринята первая попытка установить профиль средней скорости когерентного вихря, при этом использовались периодические граничные условия и кратковременная коррелированная во времени накачка. Авторами показано возникновение устойчивого вихревого диполя. В [23] для аналогичной [22] постановки задачи численно найден профиль средней скорости когерентного вихря. При этом существенное влияние на формирование подобного вида вихревых течений оказывает наличие трения о дно, которое вводится в систему исследуемых уравнений путем добавления слагаемого с некоторым коэффициентом трения. В работе [25] было изучено влияние этого коэффициента на процесс формирования когерентного вихря.

В данной работе продолжаются исследования двумерного течения вязкой слабосжимаемой жидкости в квадратной ячейке под действием внешней силы, характерный масштаб которой меньше масштаба ячейки [26-28]. Рассматривается два типа вынуждающей силы. Первый характеризуется наличием ненулевого суммарного момента силы относительно центра расчетной области, а второй – нулевым суммарным моментом. Показано, что они приводят к возникновению различных режимов вихревого течения жидкости.

Постановка задачи. Моделирование течения жидкости в двумерной квадратной области основано на построении численного решения системы уравнений Навье-Стокса при наличии вынуждающей силы и учете трения о дно. Для замыкания системы используется уравнение слабой сжимаемости. Ниже представлен конкретный вид используемых уравнений: неразрывности, движения для двумерного случая и слабой сжимаемости:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \bar{V}) = 0,$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u \bar{V}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + F_x + \mu \Delta u - \zeta u,$$

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v \bar{V}) = -\frac{\partial p}{\partial y} + F_y + \mu \Delta v - \zeta v,$$

$$dp = c^2 \rho_0 \frac{d\rho}{\rho}.$$

Здесь:

ρ — плотность жидкости;

$\bar{V} = (u, v)^T$ — вектор скорости, компоненты которого в декартовых координатах x, y равны, соответственно, u и v;

μ — динамическая вязкость жидкости;

p — давление;

ζ — коэффициент трения о дно;

F_x, F_y – проекции внешней силы F на горизонтальную и вертикальную оси;

c — скорость звука;

∇ — набла-оператор, записанный в декартовых координатах x, y,

Δ — оператор Лапласа, также записанный в координатах x, y,

$\cdot$ — скалярное произведение.

В правой части уравнений движения присутствуют слагаемые $-\zeta u$ и $-\zeta v$, моделирующие силу трения о дно кюветы. Эта сила пропорциональна скорости жидкости и направлена против ее движения.

Расчетная область представляет собой квадратную ячейку размером $2\pi \times 2\pi$ м^2. В качестве граничных условий выбрано условие прилипания.

Физические характеристики жидкости следующие: $\rho_0 = 1000 \ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, $\mu = 0.01$ Па$\cdot$с. Начальное поле скорости равно нулю, а условие на давление - $p(t=0) = p_0 = 10^5$ Па.

При численном моделировании использовались два различных способа задания вынуждающей силы:

$$F_x^1 = \rho G \sin(ky), \ F_y^1 = -\rho G \sin(kx), \quad (1)$$

$$F_x^2 = \rho G \cos(ky), \ F_y^2 = -\rho G \cos(kx). \quad (2)$$

Здесь:

G — амплитуда внешней силы;

k — пространственная частота внешней силы, $k = 5 \ \frac{1}{\text{м}}$.

Сила F^1 имеет ненулевой суммарный момент M_1 относительно центра расчетной области (наличие подкрутки), в то время как для силы F^2 суммарный момент M_2 равен 0 (без подкрутки):

$$M_1 = \frac{1}{S}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}((x-\pi)\cdot F_y^1 - (y-\pi)\cdot F_x^1)dxdy = 0.4\cdot\rho G,$$

$$M_2 = \frac{1}{S}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}((x-\pi)\cdot F_y^2 - (y-\pi)\cdot F_x^2)dxdy = 0.$$

Здесь S обозначает площадь расчетной области.

Численная методика. Численное решение уравнений Навье-Стокса основано на методе искусственной сжимаемости [29]. При этом гиперболическая часть уравнений решается явным методом Мак-Кормака [30], а параболическая часть стандартным методом конечных разностей. Схема Мак-Кормака имеет второй порядок точности по пространству и времени.

Каждый этап расчета на каждом временном шаге разделен на 4 шага: разности вперед и разности назад у предиктора вдоль направления Ox, а также разности вперед и назад у предиктора по направлению Oy.

На этапе корректора аналогично, за исключением того, что шаг «вперед» меняется на «назад» и, наоборот. Эти шаги циклически сменяют друг друга с каждым временным шагом. Метод Мак-Кормака хорошо зарекомендовал себя при решении гиперболических уравнений газо- и гидродинамики.

В настоящей работе для анализа полученных течений строится спектр их кинетической энергии в зависимости от волнового числа k. Опишем алгоритм его получения.

Рассмотрим компоненты вектора скорости $u(x,y)$ и $v(x,y)$. Воспользуемся разложением в двумерный интеграл Фурье.

Двумерная функция $\varepsilon(x,y)$ может быть расширена в ряд ортогональных гармонических функций:

$$\varepsilon(x,y) = \sum_{k_y}\sum_{k_x}[\varepsilon^{(1)}(k_x,k_y)\cdot\cos(k_x x)\cdot\cos(k_y y) +$$
$$+\varepsilon^{(2)}(k_x,k_y)\cdot\cos(k_x x)\cdot\sin(k_y y) +$$
$$+\varepsilon^{(3)}(k_x,k_y)\cdot\sin(k_x x)\cdot\cos(k_y y) + \varepsilon^{(4)}(k_x,k_y)\cdot\sin(k_x x)\cdot\sin(k_y y)]$$

где k_x, k_y — компоненты волнового вектора вдоль Ox и Oy соответственно. Функции $\varepsilon^{(i)}(k_x,k_y), i=1,2,3,4$ — коэффициенты Фурье:

$$\varepsilon^{(1)}(k_x,k_y)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\varepsilon(x,y)\cdot\cos(k_x x)\cdot\cos(k_y y)dxdy$$

$$\varepsilon^{(2)}(k_x,k_y)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\varepsilon(x,y)\cdot\cos(k_x x)\cdot\sin(k_y y)dxdy\,,$$

$$\varepsilon^{(3)}(k_x,k_y)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\varepsilon(x,y)\cdot\sin(k_x x)\cdot\cos(k_y y)dxdy\,,$$

$$\varepsilon^{(4)}(k_x,k_y)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\varepsilon(x,y)\cdot\sin(k_x x)\cdot\sin(k_y y)dxdy\,.$$

Подставляя компоненты скорости в фиксированный момент времени вместо $\varepsilon(x,y)$, получим их образы $u^t(k_x,k_y)$ и $v^t(k_x,k_y)$. Тогда образ кинетической энергии $E(x,y)$ в пространстве волновых чисел в данный момент времени можно получить:

$$E^t\left(k_x,k_y\right)=\frac{u^t\left(k_x,k_y\right)^2+v^t\left(k_x,k_y\right)^2}{2}\,.$$

Далее необходимо усреднить по времени:

$$E(k_x,k_y)=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}E^t\left(k_x,k_y\right).$$

Перебирая все k_x,k_y, получим спектр кинетической энергии течения жидкости в зависимости от волнового числа k.

Результаты численного моделирования. В работе [28] были получены три основных режима течения для задачи Колмогорова в квадратной ячейке: ламинарный, при котором картина движения жидкости сохраняет свою начальную форму и практически не меняется со временем; хаотический (или турбулентный режим), характеризующийся наличием в течении случайно перемещающихся вихрей различного размера и времени жизни; и вихревой, при котором возникает один крупный когерентный вихрь, занимающий большую часть расчетной области и существующий продолжительное время. Также была построена фазовая диаграмма типов течений, которая показывает, при каких значениях амплитуды вынуждающей силы и коэффициентах трения о дно реализуются указанные режимы течения. В данной работе мы изучаем влияние формы вынуждающей силы на вид течения в ламинарном, хаотическом и вихревом случаях.

В соответствии с фазовой диаграммой [28], выберем следующие параметры моделирования: $G=0.05\frac{м}{c^2}$, $\alpha=\frac{\zeta}{\rho}=0.2c^{-1}$ (ламинарный

режим), $\alpha = 0.01c^{-1}$ (хаотический режим), $\alpha = 0.0001c^{-1}$ (вихревой режим). В дальнейшем для получения определенных типов течений будем использовать именно эти значения.

Поля завихренности для различных режимов течения при задании силы уравнениями (1) представлены на Рис. 1. Отрицательной завихренности (синий цвет) соответствует вектор угловой скорости, направленный на наблюдателя. В данном случае вынуждающая сила имеет ненулевой суммарный момент, закручивающий течение против часовой стрелки. Соответственно, в вихревом режиме мы наблюдаем один крупный вихрь, вращающийся против часовой стрелки (рис. 1 (в)). Отметим, что данный вихрь существует длительное время. В хаотическом режиме мы наблюдаем большое количество разномасштабных, быстро сменяющих друг друга вихрей (рис. 1 (б)). Поле завихренности в ламинарном режиме представлено на Рис. 1 (а).

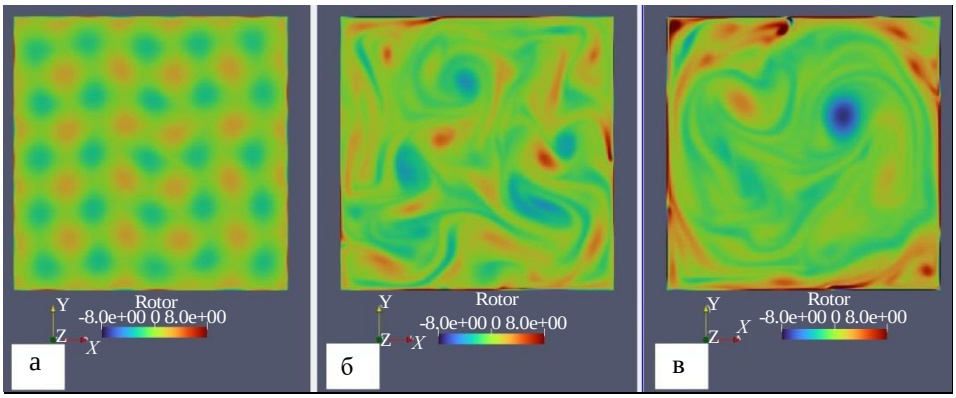


Рис. 1. Поля завихренности для ламинарного (а), хаотического (б) и вихревого (в) режимов течения при задании вынуждающей силы с подкруткой

Поле завихренности различных режимов течения, возникающих при использовании вынуждающей силы без суммарного момента (2) представлены на рис. 2. Ламинарный и хаотический режимы выглядят аналогично случаю с подкруткой (рис. 2 (а), (б)). В вихревом режиме формируются два противоположно вращающихся долго живущих вихря – вихревой диполь (рис. 2 (в)).

В теории двумерной турбулентности [4] известно существование двух квадратичных интегралов — энергии и энстрофии. Их генерация происходит на масштабе накачки течения путем воздействия внешней силы. В нашем случае пространственная частота накачки $k = 5м^{-1}$. Далее энергия течения переносится на крупные масштабы с законом «-5/3» [4] и диссипирует за счет трения о дно. Энстрофия при этом переносится на мелкие масштабы и диссипирует за счет вязкости с законом «-3» [4]. Построенные в ходе анализа формирующихся течений энергетические спектры кинетической энергии для хаотического и вихревого режимов течения (рис. 3) подтверждают эти законы.

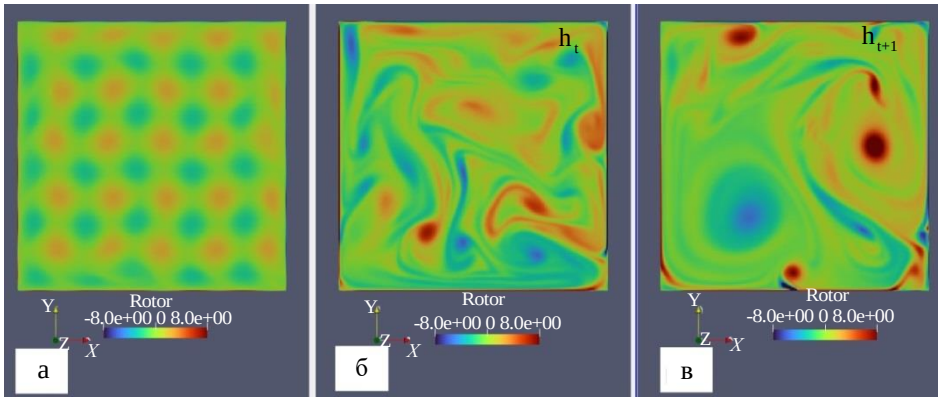


Рис. 2. Поля завихренности для ламинарного (а), хаотического (б) и вихревого (в) режимов течения при задании вынуждающей силы без подкрутки

Можно заметить, что на масштабе накачки $k = 5$ графики спектров изменяют угол наклона (рис. 3). При $k < 5$ реализуется обратный каскад энергии, теоретическая зависимость для которого $E \sim k^{-\frac{5}{3}}$ представлена на графике синей прямой (рис. 3). На масштабах меньше накачки ($k > 5$) реализуется прямой каскад $E \sim k^{-3}$, теоретическая зависимость для которого показана голубой прямой. Обратим внимание, что спектры для течений с подкруткой и без принципиально не отличаются друг от друга. На крупных масштабах угол наклона спектра энергии при рассмотрении вихревых режимов течения ближе к теоретическому обратному каскаду энергии, чем при хаотических режимах.

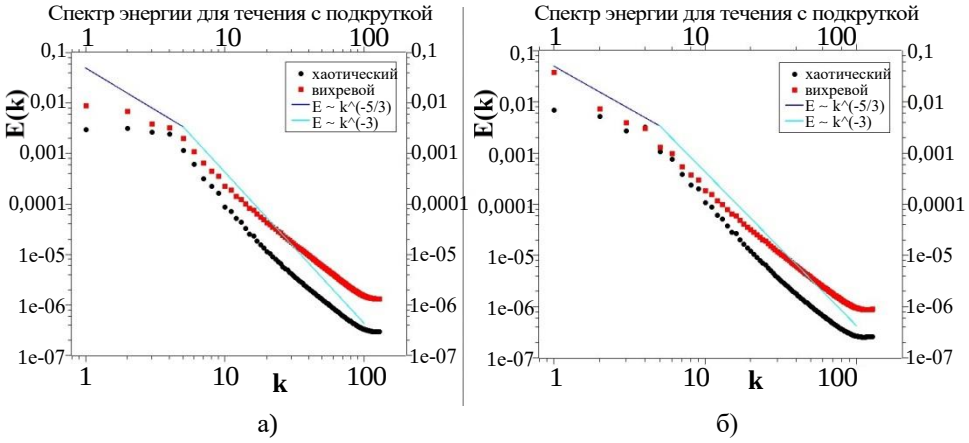


Рис. 3. Спектр кинетической энергии для хаотического и вихревого режимов течения при задании силы накачки с подкруткой (а) и без подкрутки (б). Прямыми показаны теоретические зависимости

Выводы. Независимо от значения суммарного момента силы накачки мы наблюдаем формирование трех режимов течения: лами-

нарного, хаотического и вихревого. Ламинарный и хаотический режимы течения при рассмотренных способах задания силы не имеют принципиальных различий, в то время как структура вихревых режимов различна. При наличии суммарного момента в вихревом режиме формируется один крупный вихрь. При задании вынуждающей силы с нулевым суммарным моментом в вихревом режиме формируются два вихря, вращающихся в противоположных направлениях (вихревой диполь). Построенные для вихревого и хаотического режимов спектры кинетической энергии близки к теоретическим, и незначительно отличаются для разных способов задания силы.

Благодарности. *Автор благодарит С.В. Фортову, М.А. Гузева, А.Н. Долуденко, И.В. Колоколова и В.В. Лебедева за плодотворные обсуждения во время подготовки статьи. Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (госзадание 124022400174-3) и Российского научного фонда (грант РНФ 23-72-30006). Моделирование было проведено с использованием вычислительных мощностей ИТФ им. Ландау РАН.*

ЛИТЕРАТУРА

[1] Monin A.S., Yaglom A.M. *Statistical Fluid Mechanics. Volume I*. England, MIT Press, 1971, 769 p.

[2] Белоцерковский О.М., Опарин А.М. *Численный эксперимент: от порядка к хаосу*. Изд. 2-е доп. Москва, Наука, 2000, 205 с.

[3] Бетчелор Дж. К. *Теория однородной турбулентности*. Москва, Издательство иностранной литературы, 1955.

[4] Kraichnan R.H. Inertial Ranges in Two-Dimensional Turbulence. *Physics of Fluids*, 1967, vol. 10, pp. 1417-1423.

[5] Leith C. E. Diffusion Approximation for Two-Dimensional Turbulence. *Physics of Fluids*, 1968, vol. 11, pp. 671-672.

[6] Batchelor G. K. Computation of the Energy Spectrum in Homogeneous Two-Dimensional Turbulence. *Physics of Fluids*, 1969, vol. 12, pp. 233-239.

[7] Kolmogorov A. N. Proceedings of the USSR Academy of Sciences // Doklady Akademii Nauk SSSR 1941 30 299303.

[8] Kolokolov I. V., Lebedev V. V. Large-scale flow in two-dimensional turbulence at static pumping. *JETP Lett*, 2017, vol. 106, no. 10, pp. 659–661.

[9] Sommeria J. Experimental study of the two-dimensional inverse energy cascade in a square box. *Fluid Mechanics*, 1986, vol. 170, pp. 139-168.

[10] Smith L. M., Yakhot V. Bose condensation and small-scale structure generation in a random force driven 2D turbulence. *Physical Review Letters*, 1993, vol. 71, pp. 352-255.

[11] Smith L. M., Yakhot V. Finite-size effects in forced two-dimensional turbulence. *Fluid Mechanics*, 1994, vol. 274, pp. 115-138.

[12] Borue V. Inverse energy cascade in stationary two-dimensional homogeneous turbulence. *Physical Review Letters*, 1994, vol. 72, no. 10, pp. 1475-1478.

[13] Clercx H.J.H. A spectral solver for the Navier-Stokes equations in velocity-vorticity formulation for flows with two nonperiodic directions. *Journal of Computational Physics*, 1997, vol. 137, iss. 1, pp. 186-211.

[14] Clercx H.J.H., Maassen S.R., van Heijst G.J.F. Spontaneous spin-up during the decay of 2D turbulence in a square container with rigid boundaries. *Physical Review Letters*, 1998, vol. 80, art. 5129. DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.80.5129

[15] Clercx H.J.H., Nielsen A.H., Torres D.J., Coutsias E.A. Two-dimensional turbulence in square and circular domains with no-slip walls. *European Journal of Mechanics - B/Fluids*, 2001, vol. 20, pp. 557-576.

[16] Molenaar D., Clercx H.J.H., van Heijst G.J.F. Angular momentum of forced 2D turbulence in a square no-slip domain. *Physica D-Nonlinear Phenomena*, 2004, vol.196, pp. 329-340.

[17] Xia H., Punzmann H., Falkovich G., Shats M. G. Turbulence-Condensate Interaction in Two Dimensions. *Physical Review Letters*, 2008, vol. 101, art. 194504. DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.101.194504

[18] Xia H., Shats M., Falkovich G. Spectrally condensed turbulence in thin layers. *Physics of Fluids*, 2099, vol. 21, no. 12, art. 125101. DOI: 10.1063/1.3275861

[19] Francois N., Xia Y., Punzmann H., Ramsden S., Shats M. Three-Dimensional Fluid Motion in Faraday Waves: Creation of Vorticity and Generation of Two-Dimensional Turbulence. *Physical Review X*, 2014, vol. 4, art. 021021. DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevX.4.021021

[20] Yue-Kin Tsang, Young W.R. Forced-dissipative two-dimensional turbulence: a scaling regime controlled by drag. *Physical Review E*, 2009, vol. 79, art. 045308. DOI: 10.1103/PhysRevE.79.045308

[21] Yue-Kin Tsang. Nonuniversal velocity probability densities in two-dimensional turbulence: The effect of large-scale dissipation // Phys. Fluids 2010 22, 115102.

[22] Chertkov M., Connaughton C., Kolokolov I., Lebedev V. Dynamics of Energy Condensation in Two-Dimensional Turbulence. *Physical Review Letters*, 2007, vol. 99, art. 084501.

[23] Laurie J., Boffetta G., Falkovich G., Kolokolov I., Lebedev V. Universal profile of the vortex condensate in two-dimensional turbulence. *Physical Review Letters*, 2014, vol. 113, art. 254593.

[24] Kolokolov I.V., Lebedev V.V. Structure of coherent vortices generated by the inverse cascade of two-dimensional turbulence in a finite box. *Physical Review E*, 2016, vol. 93, art. 033104. DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevE.93.033104

[25] Kolokolov I.V., Lebedev V.V. Coherent vortex in two-dimensional turbulence: Interplay of viscosity and bottom friction. *Physical Review E*, 2020, vol. 102, 023108. DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevE.102.023108

[26] Denisenko V.V., Doludenko A.N., Fortova S.V., Kolokolov I.V., Lebedev V.V. Numerical modeling of the Kolmogorov flow in a viscous media, forsed by the periodic on space static force. *Computer Research and Modeling*, 2022, vol. 14, Iss. 4, p. 741-753.

[27] Doludenko, A.N., Fortova, S.V., Kolokolov, I.V., Lebedev, V.V. Coherent vortex in a spatially restricted two-dimensional turbulent flow in absence of bottom friction. *Physics of Fluids*, 2021, vol. 33, iss. 1, art. 011704. DOI: 10.1063/5.0038863

[28] Doludenko A.N., Fortova S.V., Kolokolov I.V., Lebedev V.V. Coherent vortex versus chaotic state in two-dimension turbulence. *Annals of Physics*, 2022, vol. 447, part 2, art. 169072. DOI: 10.1016/j.aop.2022.169072

[29] Anderson D., Tannehill J.C., Pletcher R.H. *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*, Taylor and Francis, 2016, 1997 p.

[30] Флетчер К. *Вычислительные методы в динамике жидкостей. В 2-х томах*. Москва, Мир, 1991, 1056 с.

Статья поступила в редакцию 18.07.2024

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Посудневская А.О. Численное исследование влияния момента внешней силы на формирование когерентных турбулентных структур. *Математическое моделирование и численные методы,* 2025, № 1, с. 92–103.

Посудневская Анна Олеговна – стажер-исследователь в Институте автоматизированного проектирования РАН, научный сотрудник Института теоретической физики им. Ландау РАН. e-mail: posudnevskaia.ao@phystech.edu

Numerical study of the influence of external force moment on formation of the coherent turbulent structures

© T.V. Oblakova, D.S. Alekseev

[1]Landau Institute for Theoretical Physics RAS, Chernogolovka, 142432, Russia
[2]ICAD RAS, Moscow, 123056, Russia
[3]MIPT, Moscow, 117303, Russia
[4]BMSTU, Moscow, 105005, Russia

The problem of two-dimensional flow of a viscous weakly compressible fluid in a square cell under excitation of a spatially periodic static external force (Kolmogorov flow) and the presence of friction on the bottom is considered. The influence of the presence and absence of an external force torque (twist) on the flow formation is studied numerically. It is shown that the presence of a moment of external force at certain values of the force amplitude and the coefficient of friction on the bottom leads to the emergence of one coherent structure that occupies the entire studied area of the square cell. The absence of a moment of exciting force forms a vortex dipole in the cell.

Keywords*: turbulence, numerical modeling, Kolmogorov flow, viscous fluid, vortex flows*

REFERENCES

[1] Monin A.S., Yaglom A.M. *Statistical Fluid Mechanics. Volume I*. England, MIT Press, 1971, 769 p.

[2] Belocerkovskij O.M., Oparin A.M. *CHislennyj eksperiment: ot poryadka k haosu* [Numerical experiment: from order to chaos. Ed. 2nd edition.]. Moscow, Nauka Publ., 2000, 205 p.

[3] Betchelor Dzh. K. *Teoriya odnorodnoj turbulentnosti* [Theory of homogeneous turbulence]. Moscow, Izdatel'stvo inostrannoj literatury [Publishing house of foreign literature], 1955.

[4] Kraichnan R.H. Inertial Ranges in Two-Dimensional Turbulence. *Physics of Fluids*, 1967, vol. 10, pp. 1417-1423.

[5] Leith C. E. Diffusion Approximation for Two-Dimensional Turbulence. *Physics of Fluids*, 1968, vol. 11, pp. 671-672.

[6] Batchelor G. K. Computation of the Energy Spectrum in Homogeneous Two-Dimensional Turbulence. *Physics of Fluids*, 1969, vol. 12, pp. 233-239.

[7] Kolmogorov A. N. Proceedings of the USSR Academy of Sciences // Doklady Akademii Nauk SSSR 1941 30 299303.

[8] Kolokolov I. V., Lebedev V. V. Large-scale flow in two-dimensional turbulence at static pumping. *JETP Lett*, 2017, vol. 106, no. 10, pp. 659–661.

[9] Sommeria J. Experimental study of the two-dimensional inverse energy cascade in a square box. *Fluid Mechanics*, 1986, vol. 170, pp. 139-168.

[10] Smith L. M., Yakhot V. Bose condensation and small-scale structure generation in a random force driven 2D turbulence. *Physical Review Letters*, 1993, vol. 71, pp. 352-255.

[11] Smith L. M., Yakhot V. Finite-size effects in forced two-dimensional turbulence. *Fluid Mechanics*, 1994, vol. 274, pp. 115-138.

[12] Borue V. Inverse energy cascade in stationary two-dimensional homogeneous turbulence. *Physical Review Letters*, 1994, vol. 72, no. 10, pp. 1475-1478.

[13] Clercx H.J.H. A spectral solver for the Navier-Stokes equations in velocity-vorticity formulation for flows with two nonperiodic directions. *Journal of Computational Physics*, 1997, vol. 137, iss. 1, pp. 186-211.

[14] Clercx H.J.H., Maassen S.R., van Heijst G.J.F. Spontaneous spin-up during the decay of 2D turbulence in a square container with rigid boundaries. *Physical Review Letters*, 1998, vol. 80, art. 5129. DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.80.5129

[15] Clercx H.J.H., Nielsen A.H., Torres D.J., Coutsias E.A. Two-dimensional turbulence in square and circular domains with no-slip walls. *European Journal of Mechanics - B/Fluids*, 2001, vol. 20, pp. 557-576.

[16] Molenaar D., Clercx H.J.H., van Heijst G.J.F. Angular momentum of forced 2D turbulence in a square no-slip domain. *Physica D-Nonlinear Phenomena*, 2004, vol.196, pp. 329-340.

[17] Xia H., Punzmann H., Falkovich G., Shats M. G. Turbulence-Condensate Interaction in Two Dimensions. *Physical Review Letters*, 2008, vol. 101, art. 194504. DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.101.194504

[18] Xia H., Shats M., Falkovich G. Spectrally condensed turbulence in thin layers. *Physics of Fluids*, 2099, vol. 21, no. 12, art. 125101. DOI: 10.1063/1.3275861

[19] Francois N., Xia Y., Punzmann H., Ramsden S., Shats M. Three-Dimensional Fluid Motion in Faraday Waves: Creation of Vorticity and Generation of Two-Dimensional Turbulence. *Physical Review X*, 2014, vol. 4, art. 021021. DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevX.4.021021

[20] Yue-Kin Tsang, Young W.R. Forced-dissipative two-dimensional turbulence: a scaling regime controlled by drag. *Physical Review E*, 2009, vol. 79, art. 045308. DOI: 10.1103/PhysRevE.79.045308

[21] Yue-Kin Tsang. Nonuniversal velocity probability densities in two-dimensional turbulence: The effect of large-scale dissipation // Phys. Fluids 2010 22, 115102.

[22] Chertkov M., Connaughton C., Kolokolov I., Lebedev V. Dynamics of Energy Condensation in Two-Dimensional Turbulence. *Physical Review Letters*, 2007, vol. 99, art. 084501.

[23] Laurie J., Boffetta G., Falkovich G., Kolokolov I., Lebedev V. Universal profile of the vortex condensate in two-dimensional turbulence. *Physical Review Letters*, 2014, vol. 113, art. 254593.

[24] Kolokolov I.V., Lebedev V.V. Structure of coherent vortices generated by the inverse cascade of two-dimensional turbulence in a finite box. *Physical Review E*, 2016, vol. 93, art. 033104. DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevE.93.033104

[25] Kolokolov I.V., Lebedev V.V. Coherent vortex in two-dimensional turbulence: Interplay of viscosity and bottom friction. *Physical Review E*, 2020, vol. 102, 023108. DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevE.102.023108

[26] Denisenko V.V., Doludenko A.N., Fortova S.V., Kolokolov I.V., Lebedev V.V. Numerical modeling of the Kolmogorov flow in a viscous media, forsed by the periodic on space static force. *Computer Research and Modeling*, 2022, vol. 14, Iss. 4, p. 741-753.

[27] Doludenko, A.N., Fortova, S.V., Kolokolov, I.V., Lebedev, V.V. Coherent vortex in a spatially restricted two-dimensional turbulent flow in absence of bottom friction. *Physics of Fluids*, 2021, vol. 33, iss. 1, art. 011704. DOI: 10.1063/5.0038863

[28] Doludenko A.N., Fortova S.V., Kolokolov I.V., Lebedev V.V. Coherent vortex versus chaotic state in two-dimension turbulence. *Annals of Physics*, 2022, vol. 447, part 2, art. 169072. DOI: 10.1016/j.aop.2022.169072

[29] Anderson D., Tannehill J.C., Pletcher R.H. *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*, Taylor and Francis, 2016, 1997 p.

[30] Fletcher K. Vychislitel'nye metody v dinamike zhidkostej. V 2-h tomah [Computational methods in fluid dynamics. In 2 volumes]. Moscow, Mir Publ., 1991, 1056 p.

Posudnevskaya A.O., a research intern at the Institute for Computer-Aided Design, RAS, a research assistant at the Landau Institute for Theoretical Physics, RAS. e-mail: posudnevskaia.ao@phystech.edu