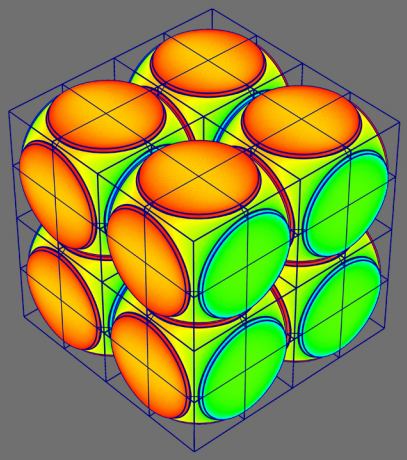
ISSN 2309-3684



# Математическое моделирование и численные методы

Сидняев Н. И., Гордеева Н. М. Исследование влияния энергомассообмена на течение в «следе» сверхзвуковых моделей конических тел. Математическое моделирование и численные методы, 2015, №1 (5), с. 31-49

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/36/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.217.58
15.11.2026 11:21:58

УДК 533.6; 51-71

# Исследование влияния энергомассообмена на течение в «следе» сверхзвуковых моделей конических тел

© Н.И. Сидняев, Н.М. Гордеева

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

*Представлены исследования по динамике движения и переноса энергии при сверхзвуковом течении в донной области. Показано, что течение в донной области существенно зависит от структуры пограничного слоя на участке между задней кромкой и точкой прилипания на осевой линии, в которой сходится пограничный слой, оторвавшийся от задней кромки. Включены исследование влияния массоподвода газа в донную область с поверхности тела и дна и теплообмена в донной области. Получено решение задачи о ближнем следе за осесимметричным телом без учета рециркуляции на ограниченном расстоянии от кормовой части.*

***Ключевые слова:*** *донная область, давление, пограничный слой, число Маха, гиперзвуковая скорость, циркуляционное течение, скачок уплотнения.*

**Введение.** При обтекании осесимметричных острых конусов с задней кромкой к составляющим сопротивления, вызванным трением и давлением на переднюю часть, добавляется донное сопротивление [1]. Исследования показывают, что донное давление, определяющее донное сопротивление, существенно зависит от структуры пограничного слоя на участке между задней кромкой (точкой отрыва) и точкой прилипания на осевой линии, в которой сходится пограничный слой, оторвавшийся от задней кромки [2−4]. Если точка перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный расположена выше по течению, чем точка отрыва (донный срез), то на участке между этой точкой и точной прилипания течение будет чисто турбулентным [5−7].

**Влияние вязкостных эффектов на донное давление острого клина.** Кривая, характеризующая отношение донного давления за основанием клина к давлению невозмущенного потока, определяет донное давление для профилей с относительно тонкими турбулентными слоями в соответствии с формулой $p_{\text{дон}} / p_\infty = f_{\text{т}}(M_\infty)$. В более общем случае формула должна отражать зависимость донного давления также от толщины пограничного слоя [6]. Имеющиеся экспериментальные данные указывают на более общую зависимость $p_{\text{дон}} / p_\infty = f_{\text{т}}(M_\infty, \delta / c_{\text{дон}})$, где $c_{\text{дон}}$ — толщина кормы.

Экспериментальные кривые, соответствующие этой формуле, приведены на рис. 1. Введя число Рейнольдса, получим $p_{\text{дон}} / p_\infty = f_{\text{т}}(M_\infty, b / (c_{\text{дон}} \text{Re}^{\frac{1}{2}}))$, где $b$ — хорда профиля.

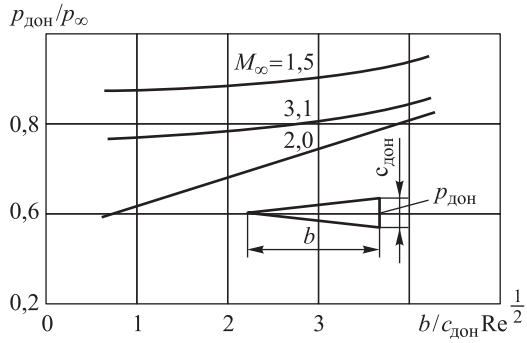



**Рис. 1.** Влияние числа Рейнольдса на донное давление при турбулентном пограничном слое

Аналогичную зависимость можно получить и для чисто ламинарного пограничного слоя, когда точка перехода расположена ниже по потоку, чем точка прилипания: $p_{дон} / p_\infty = f_л(M_\infty, b/(c_{дон}\mathrm{Re}^{\frac{1}{2}}))$.

Смешанный пограничный слой имеет место в том случае, когда точка перехода лежит между точкой отрыва и точкой прилипания [7−9]. При таком режиме течения изучение донного давления представляет особые трудности, что связано прежде всего с неясностью в определении точки перехода.

Результаты измерений позволяют сделать вывод, что относительную величину донного давления можно представить изобразить графически в виде семейства кривых, как это показано на рис. 2 [10−12]. Донное давление за профилем при увеличении параметра $b/c_{дон}\mathrm{Re}^{\frac{1}{2}}$ возрастает. При малых числах Рейнольдса (больших значениях этого параметра) между точками отрыва и прилипания практически имеет место ламинарный пограничный слой, и донное давление оказывается большим, что характерно для чисто ламинарного течения. На величину донного давления оказывают влияние и другие параметры, в частности угол атаки, нагрев или охлаждение пограничного слоя [13−15].

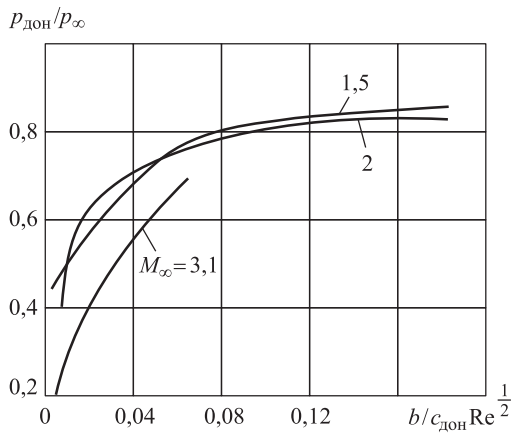



**Рис. 2.** Изменение донного давления за профилем при смешанном пограничном слое

Рассмотрим изменение давления на поверхности заостренного профиля, обусловленное взаимодействием гиперзвукового пограничного слоя с невязким потоком. При слабом взаимодействии давление изменяется по сравнению с первоначальными условиями на небольшую величину. Слабому взаимодействию соответствуют $d\delta^* / dx < \beta$ при произвольном $K = \mathrm{M}_\infty \beta$. На тонких клиньях такие взаимодействия появляются при малых углах атаки и больших числах Re и M или при умеренных сверхзвуковых скоростях и малых числах Re. Используя теорию косого скачка уплотнения и метод касательных клиньев, можно определить для клина с ламинарным пограничным слоем и углом наклона стенки $\beta^* = \beta + d\delta^* / dx$ следующее соотношение для индуцированного давления [9]:

$$p / p_{\text{н}} = 1 + kE_1 \bar{\chi}_{\text{н}} + \frac{k(k+1)}{4} E_2 \bar{\chi}_{\text{н}}^2 + \ldots,$$

где

$$E_1 = \frac{\mathrm{M}_\infty}{\mathrm{M}_{\text{н}}} J_1 d_{\text{н}}; \quad E_2 = \left( \frac{\mathrm{M}_\infty}{\mathrm{M}_{\text{н}}} \right)^2 J_2 d_{\text{н}}^2.$$

Здесь для двумерного потока $k = 0$, для осесимметричного $k = 1$. Величина $\bar{\chi}_{\text{н}} = M_{\text{н}}^3 c_{\text{н}}^{\frac{1}{2}} \mathrm{Re}_{x\text{н}}^{-\frac{1}{2}}$ представляет собой гиперзвуковой параметр взаимодействия. Индекс «н» относится к начальным условиям в однородном течении невязкого газа около клина. Остальные параметры следующие:

$$J_1 = \frac{p_\infty}{p_{\text{н}}} \left[ \frac{k+1}{2} K + \frac{1 + 2\left( \frac{k+1}{4} \right)^2 K^2}{\sqrt{1 + \left( \frac{k+1}{4} \right)^2 K^2}} \right];$$

$$J_2 = \frac{p_\infty}{p_{\text{н}}} \left[ 1 + \frac{\frac{k+1}{4} K \left[ \left( \frac{k+1}{4} \right)^2 K^2 - \frac{3}{2} \right]}{\left[ 1 + \left( \frac{k+1}{4} \right)^2 K^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \right];$$

$$c_{\text{н}} = \frac{\mu_{\text{ст}}}{\mu_{\text{н}}} \frac{T_{\text{н}}}{T_{\text{ст}}}; \quad d_{\text{н}} = \frac{A}{M_{\text{н}}^2} \frac{T_{\text{ст}}}{T_{\text{н}}} + (k-1) B; \quad \mathrm{Re}_{x\text{н}} = \frac{x V_{\delta\text{н}}}{\nu_{\text{н}}}.$$

Коэффициенты $A$ и $B$ зависят от числа Прандтля. Для $\mathrm{Pr}=1$ значения $A=0,865; B=0,166;$ для $\mathrm{Pr}=0,725$ коэффициенты $A=0,968;$ $B=0,145$. Для теплоизолированной стенки можно принять $\frac{T_{\text{ст}}}{T_{\text{н}}}=$ $=1+\sqrt{\mathrm{Pr}}\,\frac{k-1}{2}\mathrm{M}_{\text{н}}^2;\quad d_{\text{н}}=\left(k-1\right)D,$ где для $\mathrm{Pr}=1$ величина $D=0,599$, а для $\mathrm{Pr}=0,725$ значение $D=0,556$. Для очень холодной стенки $T_{\text{ст}}/T_{\text{н}}\ll 1$ и приближенно $d_{\text{н}}=\left(k-1\right)B.$

В обоих частных случаях индуцированное давление определяется только параметрами $K$ и $\bar{\chi}_{\text{н}}$. Если ввести параметр взаимодействия $\bar{\chi}=\mathrm{M}_{\infty}^3 c_{\infty}^{\frac{1}{2}}\mathrm{Re}_{x\infty}^{-\frac{1}{2}}$, определяемый по условиям в невозмущенном течении, то отношение $\bar{\chi}_{\text{н}}/\bar{\chi}$ будет зависеть только от $K=\mathrm{M}_{\infty}\beta$. Для $K\gg 1$ имеем

$$\frac{p_{\text{н}}}{p_{\infty}}=\frac{k(k+1)}{2}K^2;\ J_1=\frac{2}{kK};\ J_2=\frac{4}{k(k+1)K^2};\ \mathrm{M}_{\text{н}}\beta=\sqrt{\frac{2}{k(k-1)}}.$$

Так как $\mu_{\text{н}}\sim\mathrm{M}_{\infty}^2\beta^2$ для $\mu\sim T$, то $\frac{\mathrm{M}_{\infty}}{\mathrm{M}_{\text{н}}}\frac{\bar{\chi}_{\text{н}}}{K}\sim\frac{\bar{\chi}}{K^2}$. Следовательно, по порядку величины изменение давления $\frac{p}{p_{\text{н}}}-1\sim d_{\text{н}}\frac{\bar{\chi}}{K^2}$. Для плоской пластинки с нулевым углом атаки $K=0,\quad J_1=J_2=1$. Экспериментальные данные, полученные для теплоизолированной пластинки, подтверждают результаты, получаемые для $k=1,4,\ \mathrm{Pr}=0,725$ для отношения давлений $\frac{p}{p_{\infty}}=1+0,31\bar{\chi}+0,05\bar{\chi}^2$.

Хорошее соответствие между экспериментом и формулой слабого взаимодействия наблюдается до значений гиперзвукового параметра $\bar{\chi}=3\ldots 4.$

Исследования показывают, что местный тепловой поток и равновесная температура стенки очень мало зависят от индуцированного давления. Местный коэффициент трения меняется более существенно в соответствии с зависимостью

$$c_{fx}^{(p)}=c_{fx}+\frac{2J_1^2}{\mathrm{M}_{\text{н}}^3}\left(\mathrm{M}_{\infty}\frac{d\delta^*}{dx}\right)^2,$$

где $c_{fx}^{(p)}$, $c_{fx}$ — местные коэффициенты трения соответственно при наличии индуцированного давления и без него; производная $\frac{d\delta^*}{dx} = d_{\text{н}} \frac{\bar{\chi}_{\text{н}}}{\text{M}_{\text{н}}} = d_{\text{н}} \sqrt{c_{\text{н}}} \frac{\text{M}_{\text{н}}^2}{\sqrt{\text{Re}_{x\text{н}}}}$.

Область сильного взаимодействия характеризуется тем, что $d\delta^* / dx > \beta$. Эта область обазуется при обтекании пластинки под небольшим углом атаки при условии, что числа Маха достаточно велики, а местные числа Рейнольдса небольшие. Для анализа сильного взаимодействия можно использовать метод касательных клиньев, который приводит к следующей зависимости для индуцированного давления [6, 10]:

$$\frac{p}{p_\infty} = \frac{k(k+1)}{2} K^{*2} + \frac{3k+1}{k+1} - \frac{8k}{(k+1)^3} K^{*-2},$$

где $K^* = \text{M}_\infty \left(\beta + d\delta^* / dx\right)$.

Выражение для $p / p_\infty$ можно представить в виде

$$\frac{p}{p_\infty} = p_0 \bar{\chi} \left( 1 + \frac{p_1 K}{\sqrt{\bar{\chi}}} + \frac{p_2 + p_3 K^2}{\bar{\chi}} \right).$$

Здесь $p_0$ зависит от степени охлаждения стенки $g_{\text{ст}} = i_{\text{ст}} / i_{0\delta}$. Коэффициенты $p_1, p_2, p_3$ определяют экспериментально или из теории гиперзвукового пограничного слоя. Для пластинки $K^* = \text{M}_\infty \beta = 0$ и $p / p_\infty = p_0 \bar{\chi} + p_2$.

Для теплоизолированной стенки расчеты при $\text{Pr} = 1$ и $k = 1,4$ дают $p_2 = 0,759$. Следовательно, $p / p_\infty = 0,514 \bar{\chi} + 0,759$.

Эта формула согласуется с экспериментальными данными для значений $\bar{\chi} = \text{M}_\infty^3 c_\infty^{\frac{1}{2}} \text{Re}_{x\infty}^{-\frac{1}{2}} = 3,5 \ldots 7$.

Для оценки изменения коэффициентов трения и теплопередачи при сильном взаимодействии можно воспользоваться соотношениями

$$c_{fx} = c \bar{\chi}^{-1/2}; \ \text{St}_x = s \bar{\chi}^{-1/2} = \frac{q}{\rho_\infty V_\infty c_p \left(T_r - T_{\text{ст}}\right)}.$$

**Течение в донной области с учетом энергомассообмена.** Схема динамики течения в донной области с учетом энергомассообмена представлена на рис. 3. Основной задачей ряда исследований, которые будут описаны здесь, была разработка улучшенной теоретической мо-

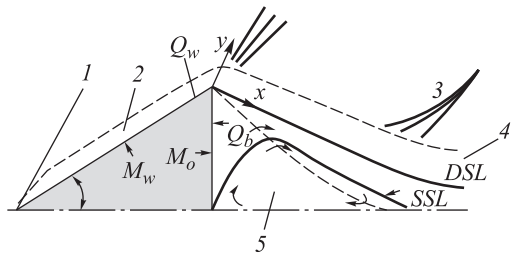



**Рис. 3.** Течение в донной области: *1* — головной скаок; *2* — пограничные слои на теле; *3* — хвостовой скачок; *4* — горло; 5 — циркуляционное течение малой скорости

дели ламинарного течения в донной области, с тем чтобы можно было более точно рассчитывать свойства потока внутри донной области и начальные условия для следа вниз по потоку от донной области. Внешнее гиперзвуковое течение отделено от ядра течения с относительно низкой скоростью внутри донной области свободным струйным пограничным слоем, причем начальная толщина и структура этого пограничного слоя зависят от характера пограничного слоя [13−15]. Разделяющая линия тока *DSL* начинается в точке отрыва и является внутренней границей течения, возникшего выше по потоку. Критическая линия тока *SSL* отделяет течение, которое проходит вниз по потоку сквозь горло следа, от течения, которое поворачивает обратно и циркулирует в донной области.

При отсутствии вдува газа в донную область линии *DSL* и *SSL* совпадают; когда существует вдув в донную область, то расход газа между линиями *DSL* и *SSL* соответствует расходу вдуваемого газа. Анализ течения в донной области существенно упрощается, если использовать модель течения, предложенную Чэпменом [6], поскольку эта модель позволяет разделить всю область донного течения на подобласти и разыскивать решения для каждой подобласти независимо, а затем их совместить. Геометрию течения в донной области можно определить, если предположить, что струйный пограничный слой тонок и что размеры области течения сжатия малы, тогда полное давление на критической линии тока восстанавливается в критической точке и становится равным статическому давлению за хвостовым скачком (рассчитанному по параметрам невязкого течения). В настоящее время найдено решение для профилей скорости в отрывном струйном пограничном слое, и его решение справедливо, если отрывный струйный пограничный слой не имеет начальной толщины или если его длина достаточно велика и влияние начального распределения скорости пренебрежимо мало.

В работе [5] представлены расчеты отрывного струйного пограничного слоя методом конечных разностей в рамках модели Чэпмена, в предположении, что начальное распределение скоростей соответствует профилю Блазиуса. Используя некоторые предположения относительно профиля энтальпии, этот метод можно применить для определения параметров течения в донных областях за конусами и клиньями; в результате расчетов найдено, что длина струйного по-

граничного слоя от тела до горла слишком мала для того, чтобы установилось асимптотическое распределение скоростей поперек слоя. Эти результаты побудили расширить метод анализа и включить в него расчет профилей полной энтальпии [6]. Для того чтобы сделать это, предположили, что $\mathrm{Le} = \mathrm{Pr} = 1$. После этого в соответствии с идеей модели Чэпмена положили, что отрывный струйный пограничный слой — это тонкая зона смешения между внешним течением и сильно заторможенным циркуляционным ядром. Относительно области самого ядра предполагают, что там имеется масса газа со средней полной энтальпией $H_c$, которая постоянна, но вначале неизвестна. Этот неизвестный параметр позднее определяется как часть решения всей задачи, для чего необходимо потребовать удовлетворения общих балансов массы и энергии для всей области донного течения.

**Математическая модель. Уравнения сохранения.** Уравнения, описывающие течение в отрывном струйном пограничном слое, получены путем применения обычных в исследованиях гиперзвуковых потоков преобразований уравнений пограничного слоя [11]. Предполагалось, что $\rho\mu = \mathrm{const}$, $\mathrm{Le} = \mathrm{Pr} = 1$ и $dP/dx = 0$. Для численных расчетов были использованы переменные Крокко [6], так что окончательная форма уравнений для струйного пограничного слоя имела вид уравнений движения и энергии:

$$u^*\left(\partial F_* / \partial S^*\right) = F_*^2\left(\partial^2 F_* / \partial u_*^2\right); \tag{1}$$

$$u^*\left(\partial H / \partial S^*\right) = F_*^2\left(\partial^2 H / \partial u_*^2\right). \tag{2}$$

Здесь $F_*$ — функция касательного напряжения; $H = h + u^2/2$ — полная энтальпия. Зависимыми переменными являются функция градиента скорости $F_*\left(S^*, u^*\right)$ и полная энтальпия $H\left(S^*, u^*\right)$. В уравнениях (1) и (2) использованы следующие обозначения:

$$u^* = u / u_e; \tag{3}$$

$$S^* = S \Big/ S_w, \tag{4}$$

где $S = \int C\rho_e u_e \mu_e r_0^{2k} dx$;

$$C = \rho\mu \Big/ \rho_e \mu_e \tag{5}$$

— константа Чэпмена;

$$F_* = F S_w^{1/2}, \tag{6}$$

где $$F = \partial u^* \big/ \partial Y; \quad Y = u_e r_0^{2k} \rho dy. \tag{7}$$

Входящая в (4) величина $S_w$ измеряется от носика тела до точки отрыва, а величина $S$ отсчитывается вниз по потоку от точки отрыва $(x = 0)$. Здесь $r_0$ — радиус вязкого слоя; $u$ — продольная скорость; $v$ — поперечная скорость.

На внутренней границе для (1) и (2) установлены следующие граничные условия:

$$F^*\left(S^*, 0\right) = 0; \tag{8}$$

$H\left(F^*, 0\right) = H_c$ (неизвестная энтальпия ядра); (9)

на внешней границе − следующие граничные условия:

$$F^*\left(S^*, 1\right) = 0; \tag{10}$$

$$H\left(S^*, 1\right) = H_e. \tag{11}$$

Начальные условия определяются профилями градиента скорости и полной энтальпии в пограничном слое на теле. В данной работе предполагается, что профиль градиента скорости в пограничном слое на теле описывается решением Блазиуса, а профиль полной энтальпии — интегральным соотношением Крокко [6]. Если влияние резкого поворота потока в точке отрыва пренебрежимо мало, тогда эти же профили будут начальными профилями для отрывного струйного пограничного слоя. Однако рассмотрим также случаи, когда профили пограничного слоя подвергаются искажениям в точке отрыва в результате изэнтропического расширения потока вдоль линий тока до давления, соответствующего давлению в донной области. В этом случае начальными профилями для струйного пограничного слоя будут несколько измененные профили. Поскольку неизвестная энтальпия ядра $H_c$ входит в граничные условия, численное решение находят стандартным способом. Сущность использованного метода состоит в том, что уравнения и граничные условия приводятся к такому виду, при котором для численного решения задачи не обязательно знать величину $H_c$. Это можно сделать, поскольку (1) не зависит от (2), а (2) линейно по отношению к $H$. Следовательно, величину $H$ можно заменить линейной комбинацией новых функций, зависящих от $S^*, u^*$, в которую константа $H_c$ входит в качестве множителя. Эти новые функции $W\left(S^*, u^*\right)$ и $E(S^*, u^*)$ вводятся таким образом, что выполняется соотношение

$$H - H_e = \left(H_w - H_e\right)W + \left(H_c - H_e\right)E. \qquad (12)$$

Здесь $E$ — вспомогательная функция энтальпии. Тогда величина $H$ может быть легко вычислена, если обе функции $W$ и $E$ удовлетворяют (2) (если их подставить вместо $H$) и если удовлетворены следующие граничные и начальные условия:

$$W\left(S^*,0\right) = W\left(S^*,1\right) = E\left(S^*,1\right) = 0; \qquad (13)$$

$$E\left(S^*,0\right) = 1; \qquad (14)$$

$$W\left(0,u^*\right) = \left[\left(H - H_e\right)/\left(H_w - H_e\right)\right]_{S^*=0}; \qquad (15)$$

$$E(0,u^*) = 0. \qquad (16)$$

В частности, когда начальные условия заданы в виде интеграла Крокко, функция $E$ переходит в величину $(1-u^*-W)$, и в этом случае начальное условие принимает вид $W\left(0,\, u^*\right) = 1 - u^*$.

**Граничные условия.** Особенность, существующая в точке отрыва из-за разрыва в граничных условиях на внутренней границе струйного пограничного слоя, создает некоторые трудности для начала численного решения. Хотя эта особенность скорее математическая, чем физическая, поскольку основные уравнения неприменимы в окрестности этой точки, то желательно найти независимое начальное решение. Эту трудность можно преодолеть, если искать решение в виде степенного ряда, справедливое вблизи точки разрыва (т.е. при малых $S^*, u^*$). Например, если в качестве начального профиля взят профиль Блазиуса при наличии автомодельного вдува, то для профиля скорости вблизи стенки существует линейная связь между функцией градиента скорости и скоростью. Тогда подслой можно определить, используя граничные условия:

$$u^* = 0;\ F^* = 0;$$

$$u^* \to \infty;\ F^* \to F_w^*\left(1 + Bu^*\right).$$

Здесь $B$ — параметр вдува. После этого решение для подслоя выбирается в виде ряда:

$$F^* = F_w^*\left\{F^{(0)}\left(\xi\right) + F^{(1)}\left(\xi\right)B\left(3S^*F_w^{*2}\right)^{\frac{1}{3}} + \ldots\right\}, \qquad (17)$$

где $\xi = u^*/\left(3S^*F_w^{*2}\right)^{\frac{1}{3}}$; $B = -\left[f\left(0\right)/f''\left(0\right)\right] = \dot{M}_w u_e/\tau_w$, $\dot{M}$ — массовый расход вдуваемого газа, индекс $w$ относится к поверхности тела.

Выбор $\xi$ в качестве независимой переменной определен решением, приведенным в [7, 8, 12], в котором установлено, что в следе за плоской пластиной в несжимаемом потоке скорость изменяется пропорционально $x^{\frac{1}{3}}$. Эти «переходные» профили совмещались с оставшимися частями начальных профилей при малых значениях $u^*$ и очень малых значениях параметра продольного расстояния $S^*$ при $S \approx 10^{-8}$.

**Общий баланс энергии.** Для того чтобы вывести уравнение для неизвестной энтальпии ядра $H_c$, необходимо потребовать выполнения общего баланса энергии для всей области донного течения. Со стороны, расположенной вверх по потоку от донной области, эта система ограничена плоскостью кормового среза тела, со стороны, расположенной вниз по потоку от донной области, – горлом следа, по бокам — трубкой тока $ESL$ невязкого течения непосредственно вне струйного пограничного слоя. Масса газа (и связанная с ней энергия) входит внутрь контрольного объема со струйным пограничным слоем, оторвавшимся от тела, и покидает его со струйным слоем, проходящим вниз по потоку сквозь горло следа. При наличии вдува газа сквозь стенку кормовой части тела в область циркуляционного течения, внутри области возникает дополнительный источник массы и энергии. Энергия уходит из контрольного объема также за счет поглощения теплоты кормовой частью тела. Таким образом, баланс энергии можно записать следующим образом:

$$\left[ -\int_{DSL}^{ESL} \left(H_e - H\right) \rho u \left(2\pi r_0\right)^k dy \right]_{\text{тело}} - \left(H_e - H_i\right) \dot{M} = \left[ -\int_{DSL}^{ESL} \left(H_e - H\right) \rho u \left(2\pi r_0\right)^k dy \right]_{\text{горло}} + Q_b. \tag{18}$$

Здесь первое слагаемое в правой части уравнения — энергия, входящая с оторвавшимся от тела пограничным слоем, второе слагаемое — энергия, входящая в контрольный объем с вдуваемым в донную область газом. Первое слагаемое в левой части — энергия, уходящая сквозь горло следа, второе слагаемое — энергия, уходящая за счет излучения и за счет теплопроводности в донную часть.

Если применить интегральный баланс энергии к телу, то окажется, что первый интеграл в (18) равен $Q_w$, т.е. полному количеству теплоты, прошедшей сквозь поверхность тела вверх по потоку от кормового среза.

После соответствующего преобразования системы координат в такую систему, которая использовалась для численных расчетов, это уравнение можно привести к виду

$$H_c = H_e - (1/L)((H_e - H_w)(K - L) + [Q/(2\pi)^k - (H_e - H_i)\psi_s]/S_w^{\frac{1}{2}}), \quad (19)$$

где

$$J\left(S_s^*\right) \equiv \left[\int_{u_s^*}^{1} \frac{u_* W}{F_*} du_*\right]_{\text{горло}}; \quad K \equiv \left[\int_{0}^{1} \frac{u_*\left(1-u_*\right)}{F_*} du_*\right]_{\text{тело}};$$

$$L\left(S_s^*\right) \equiv \left[\int_{u_s^*}^{1} \frac{u_* E}{F_*} du_*\right]_{\text{горло}}.$$

Функция тока $\psi_s$, соответствующая критической линии тока, определяется из общего баланса массы и может быть выражена следующим соотношением через расход газа $\dot{M}_w$, вдуваемого в донную область:

$$\psi_s \equiv \int_{DSL}^{SSL} \rho u r_0^k dy = S_w^{\frac{1}{2}} \int_{ud^*}^{u_s^*} \frac{u_*}{F_*} du_* = -\frac{\dot{M}_w}{(2\pi)^k}. \quad (20)$$

**Сопряжение решений для невязкого потока.** Для того чтобы согласовать струйный пограничный слой с областями невязкого течения, нужно задать форму тела, параметры невозмущенного набегающего потока, величину энтальпии поверхности $H_w$ и величину энтальпии стенки в донной области $H_b$. Для невязкого потока принята упрощенная модель течения, включающая в себя течение около тела типа Тэйлора – Маккола, расширение в течении Прандтля – Майера до донного давления, течение в струйном пограничном слое при постоянном давлении и изэнтропическое сжатие в области горла. При расчетах кривизной линии постоянного давления в осесимметричном потоке пренебрегали.

Статическое давление $p_4$ за хвостовым скачком определялось путем расчета невязкого течения для каждого заданного пробного угла следа $\beta$. Полное давление на критической линии тока можно рассчитать как сумму величины статического давления $p_3$ и величины $\rho u_s^2/2$, найденной из решения для струйного пограничного слоя при $S_s^*$. Для данной упрощенной модели величина $S_s^*$ зависит от величины пробного угла следа $\beta$ и других параметров течения следующим образом:

$$S_s^* = (C_3\rho_3 u_3\mu_3 \sin\alpha) / (C_2\rho_2 u_2\mu_2 \sin\beta).$$

Согласование решений производится при таком $\beta$, при котором удовлетворяются уловия Чэпмена в области сжатия. Для иллюстрации характера полученных результатов (рис. 4) приведены некоторые типичные примеры аналитических зависимостей асимптотической функции градиентов скорости $F\sqrt{2(S_w + S)}$ от отношения скоростей $u/u_e$. Здесь $S = \int Cp_e u_e \mu_e r_0^{2k} dx$; $F = \dfrac{\partial u/u_e}{\partial Y}$; $Y = ue r_0^k \int \rho dy$.

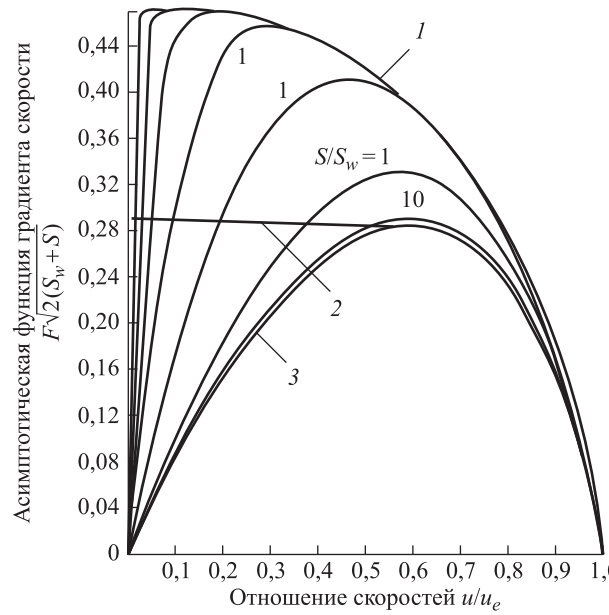



**Рис. 4.** Профили функции градиента скорости:
*1* – профиль Блазиуса; *2* – разделяющая линия тока; *3* – профиль Чэпмена

**Результаты для случая вдува газа в донную область.** Вдув массы газа может происходить или на поверхности тела вверх по потоку от кормового среза, или сквозь стенку кормовой части тела (или и в том, и в другом месте). По аналогии с присоединенными пограничными слоями можно ожидать, что вдув будет существенно влиять на течение при относительно малых расходах вдуваемого газа. Когда вдув происходит на поверхности тела вверх по потоку от кормового среза (например, за счет процесса уноса массы), то на течении в донной области это сказывается в основном через искажение начальных профилей [14−18]. Для расчетов были использованы профили Эммонса и Лея [9] для случая автомодельного вдува, а для профиля энтальпии было использовано интегральное соотношение Крокко. С увеличением интенсивности вдува на поверхности тела скорость на разделяющей

линии тока растет более медленно (рис. 5), и это в соответствии с условиями Чэпмена для области сжатия приводит к тому, что след становится длиннее. Вдув газа при низкой температуре стенки тела в общем случае снижает общий уровень температуры течения в донной области, несмотря на то, что при большой длине следа в контрольный объем для расчета баланса энергии из внешнего потока втекает больше газа с высокой полной энтальпией.

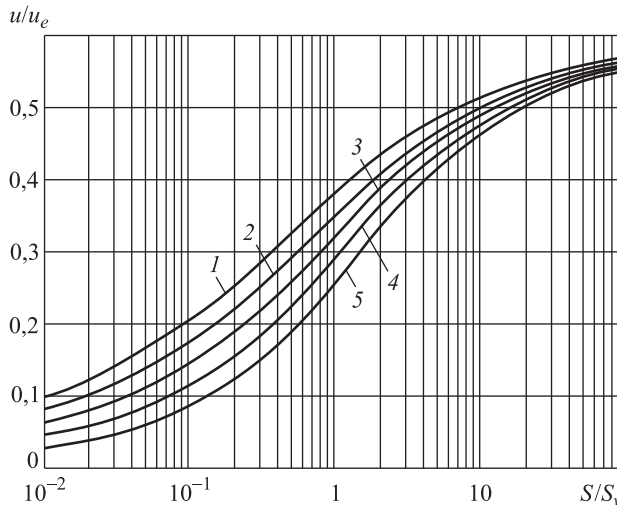



**Рис. 5.** Рост скорости вдоль разделяющей линии тока в случае автомодельного вдува на поверхности тела: $B$ = 0 (*1*); 0,5 (*2*); 1,5 (*3*); 4 (*4*); 14 (*5*)

Если газ вдувается сквозь стенку кормовой части тела, то предполагают, что газ втекает в донную область с пренебрежимо малым количеством движения (как, например, через проницаемую стенку). Профили струйного пограничного слоя в этом случае не изменяются, но из описанного выше баланса массы вытекает, что условия в области сжатия следует применить на критической линии тока, где скорость меньше, чем на разделяющей линии тока. На рис. 6 показано, как изменяются скорости вдоль различных линий тока, и проиллюстрирован этот эффект. Это означает, что вдув в донную область также увеличивает длину следа. Действительно, при достаточно интенсивном вдуве можно добиться того, что след станет очень длинным и можно будет использовать автомодельное решение Чэпмена до того момента, когда сжатие в конце струйного пограничного слоя станет пренебрежимо малым. В этом случае условия течения приближаются к таким, при которых можно пользоваться интегралом Крокко для полной энтальпии, и максимальная статическая энтальпия при вдуве холодного газа, подобного воздуху, при больших числах Маха приближается к величине $0,25H_e$.

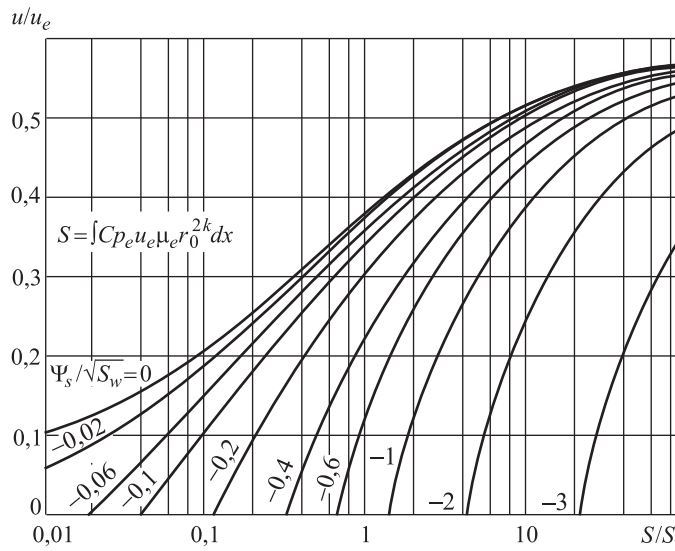



**Рис. 6.** Изменение скорости вдоль критической линии тока в случае вдува в донную область

Если вводить холодный газ непосредственно в циркуляционное ядро, то оно очень сильно охлаждается и этот эффект полностью перекрывает эффект нагрева ядра за счет увеличения количества газа, поступающего из невозмущенного потока в длинный струйный пограничный слой. На рис. 7 показано сравнение энтальпий на критических линиях тока для случаев вдува с поверхности тела и в донную область. Видно, что при тех условиях обтекания тел, при которых проведен расчет, вдув газа в донную область более эффективен.

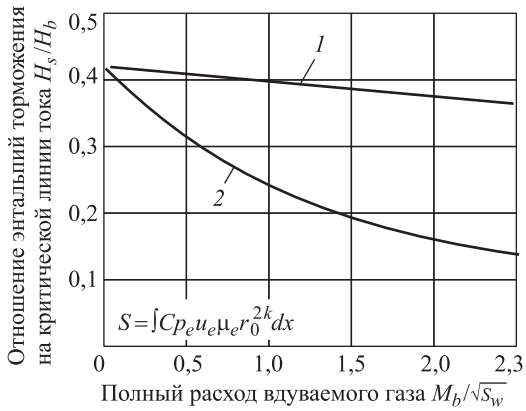



**Рис. 7.** Влияние вдува на энтальпию на оси в области горла: *1* — автомодельный вдув с поверхности тела; *2* — вдув в донную область. Условия обтекания: $M_\infty = 20$; полуугол конуса — $10^o$

На рис. 8 проиллюстрировано влияние вдува с поверхности тела или в донную область на профили статической энтальпии вниз по потоку от области сжатия. В случае отсутствия вдува максимум статической энтальпии расположен на оси, однако с увеличением интен-

сивности вдува максимум статической энтальпии может сдвигаться в промежуточную точку профиля. Эти соображения следует учитывать при расчете следа дальше вниз по потоку.

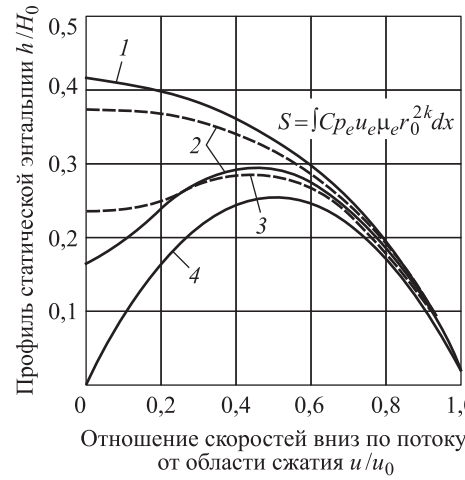



**Рис. 8.** Влияние вдува на профили статической энтальпии вниз по потоку от области сжатия:
*1* — при отсутствии вдува; *2* — $\Psi_s \sqrt{S_w} = 2$; *3* — полный отсос пограничного слоя ($B = \infty$); *4* – бесконечно большой вдув в донную область ( профиль Чэпмена); ——— вдув только в донную область; – – – – вдув только с поверхности тела

На рис. 8 представлены предельные профили для высокой интенсивности вдува и проиллюстрировано максимальное охлаждающее воздействие, достижимое при вдуве однородных газов.

**Обсуждение результатов.** В работе представлена расширенная версия предложенной Чэпменом модели отрывного течения и способы ее использования для анализа свойств ламинарного течения в донной области. Представлены типичные результаты расчетов, на основании которых можно сделать следующие выводы:

1) формы начальных профилей струйного пограничного слоя сильно влияют на структуру ламинарного течения в донной области;

2) для характерных начальных профилей оторвавшийся слой слишком короток для того, чтобы можно было использовать автомодельное решение Чэпмена, даже в области сжатия. В случае холодной стенки обтекаемого тела интегральное соотношение Крокко никогда, даже приближенно, не выполняется в отрывном слое;

3) если действительный физический тепловой поток в донную часть тела так же мал, как и рассчитанный по данной теории, то этот тепловой поток играет очень небольшую роль при определении свойств донного течения;

4) вдув массы газа либо с поверхности тела, либо в донную область можно использовать для уменьшения максимального уровня статической энтальпии в области донного течения. Вдув в донную область, по-видимому, более эффективное средство охлаждения, чем вдув той же массы газа с поверхности тела.

Возможности улучшения теории течения в донной области в рамках представленного анализа заключены в уточнении соотноше-

ний для свойств газа при расчете струйного пограничного слоя и в уточнении теории невязкого течения. Однако сейчас, по-видимому, возможности модели Чэпмена исчерпаны. Вопрос о ценности теории в ее настоящем виде можно будет решить только тогда, когда будет получено достаточно данных о течении в донной области. Это особенно относится к применению теории при больших числах Маха и малых числах Рейнольдса. Исследования показывают, что область горла достаточно длинная, так что принятое в теории Чэпмена предположение о «резком изэнтропическом сжатии» может оказаться очень грубым. Справедливость применения преобразования Степанова – Манглера вблизи окрестности горла в осесимметричных потоках, конечно, сомнительна, и вполне возможно, что при низких числах Рейнольдса следует учитывать другие эффекты (например, взаимодействие со сверхзвуковым потоком за счет увеличения толщины вытеснения) в случаях, когда теорию применяют в условиях обтекания, близких к условиям входа в атмосферу. Следовательно, несмотря на то что благодаря обобщению модели Чэпмена достигнут значительный прогресс, требуется более детальный анализ процессов в области сжатия и в циркуляционном ядре для соответствующего описания ламинарного донного течения.

**Выводы.** Интегральные соотношения Крокко для распределений энтальпии и атомных концентраций в отрывном вязком слое неприменимы к течениям в донных областях для большинства тел, движущихся с гиперзвуковой скоростью, поскольку эти области слишком коротки для того, чтобы профили параметров течения в них успели принять вид подобных профилей.

Перестройка начального профиля при резком повороте потока в точке отрыва приводит к тому, что донная область становится короче, а течение в ней более холодным по сравнению с тем, какими они были бы, если бы для расчета был использован невозмущенный начальный профиль.

Теплообмен в донной области оказывает только очень небольшое влияние на параметры течения в этой области.

Вдув газа в донную область, так же как и вдув с поверхности тела, приводит к тому, что течение в донной области становится холоднее, а сама донная область длиннее, причем вдув газа непосредственно в донную область более эффективно охлаждает след при равных массовых расходах вдуваемого газа.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Сидняев Н.И. Учет влияния вязкостных эффектов на обтекание и аэродинамические характеристики комбинированных головных частей ракет. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение*, 2006, № 2(63), с. 17−34.

[2] Сидняев Н.И. Исследование влияния тепломассопереноса сферического наконечника на сверхзвуковое обтекание комбинированного тела вращения. *Изв. вузов*. *Авиационная техника*, 2006, № 2, с. 32−36.

[3] Sidnyaev N.I. Study of heat and mass transfer for hypersonic flow past a complex body of revolution. *Thermophysics and Aeromechanics*, 2006, vol. 13, no. 1, pp. 2−16.

[4] Ефимов Е.С., Мозольков А.С., Харитонов В.Т. Исследование влияния границ потока на обтекание моделей при сверхзвуковых скоростях. *Труды ЦАГИ*, 1981, вып. 2095, с. 28−61.

[5] Sidnyaev N.I. Aerodynamic Performances of Hypersonic Aircrafts with Surface Mass Transfer. *Mathematical Models and Computer Simulations*, 2009, vol. 1, no. 3, pp. 343−352.

[6] Краснов Н.Ф., Кошевой Н.Ф., Калугин В.Т. *Аэродинамика отрывных течений*: учеб. пособие для втузов. Москва, Высшая школа, 1988, 351 с.

[7] Брюно А.Д., Шадрина Т.В. Об осесимметричном обтекании иглы вязкой несжимаемой жидкостью. *ДАН*, 2002, т. 387, № 5, с. 589−595.

[8] Брюно А.Д., Шадрина Т.В. Осесимметричный пограничный слой на игле. *ДАН*, 2004, т. 394, № 3, с. 298−304.

[9] Bruno A.D., Shadrina T.V. The Axially Symmetric Boundary Layer on a Needle. *An International Conference on Boundary And Interior Layers*, ONERA, Toulouse, 2004, July 5th, 11.20, pp. 1−10.

[10] Краснов Н.Ф., ред. *Управление и стабилизация в аэродинамике*. Москва, Высшая школа, 1978, 480 с.

[11] Халид М., Ист Р.А. Устойчивость острых конусов при гиперзвуковых скоростях на малых углах атаки. *РТиК*, 1980, т.18, № 10, с.140−142.

[12] Белоцерковский С.М., Скрипач Б.К., Табачников В.Г. *Крыло в нестационарном потоке газа*. Москва, Наука, 1971, 754 с.

[13] Сидняев Н.И. Методика численного расчета сверхзвукового обтекания колеблющегося осесимметричного тела вращения в условиях интенсивного поверхностного массообмена. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2003, № 1(10), с. 71−87.

[14] Сидняев Н.И. Метод расчета нестационарного обтекания тела вращения с поверхностным массообменом в рамках параболизированных уравнений Навье – Стокса. *Математическое моделирование*, 2004, т. 16, № 5, с. 55−65.

[15] Сидняев Н.И. О методике исследования коэффициентов вращательных производных аэродинамического момента конуса с поверхностным массообменом. *Изв. вузов. Авиационная техника*, 2004, № 2, с. 30−33.

[16] Сидняев Н.И. О задаче колебательного движения конуса в сверхзвуковом потоке с учетом предыстории. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение*, 2006, № 1(62), с. 3−14.

[17] Сидняев Н.И. Исследование аэродинамических характеристик тел вращения с проницаемым наконечником при обтекании гиперзвуковым потоком. *Прикладная механика и техническая физика*, 2007, т. 48, № 2, с. 12−20.

[18] Сидняев Н.И., Глушков П.А. Длиннопериодические колебания летательных аппаратов при гиперзвуковых скоростях. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 1, с. 99−115.

Статья поступила в редакцию 05.11.2014

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Сидняев Н.И., Гордеева Н.М. Исследование влияния энергомассообмена на течение в «следе» сверхзвуковых моделей конических тел. *Математическое моделирование и численные методы*, 2015, № 1, с. 31–49.

**Сидняев Николай Иванович** родился в 1955 г., окончил МВТУ им. Н.Э. Баумана в 1981 г. и МГУ им. М.В. Ломоносова в 1985 г. Д-р техн. наук, профессор, зав. кафедрой «Высшая математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор около 240 научных работ в области прикладной математики и механики. e-mail: sidnyaev@bmstu.ru

**Гордеева Надежда Михайловна** родилась в 1968 г., окончила МГУ им. М.В. Ломоносова в 1990 г., ассистент кафедры «Высшая математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор 6 научных работ в области прикладной математики и механики. e-mail: nmgordeeva@bmstu.ru

# Investigation of the energy and mass transfer influence on the wake flow of supersonic conical models

© N.I. Sidnyaev, N.M. Gordeeva

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

*We studied the dynamics of motion and energy transfer in supersonic flow in the base region. It is shown in the article that the current in the base region largely depends on the boundary layer structure in the area between the trailing edge and the sticking point on the centerline, where the boundary layer cut out from the rear edge converges. The study of the effect of gas mass injection into the base region from the body surface and the bottom as well as heat transfer in the bottom region is included. The resulting solution of the problem of the middle wake for axisymmetric body without considering recirculation at a limited distance from the stern has been obtained.*

***Keywords:*** *base area, pressure, boundary layer, hypersonic speed, circulating flow, shock wave, the Mach number.*

## REFERENCES

[1] Sidnyaev N.I. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Seria Mashinostroenie – Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Mechanical Engineering.* 2006, no. 2 (63), pp. 17–34.

[2] Sidnyaev N.I. *Izvestiya vuzov. Aviatsionnaya tekhnika – Proceedings of the universities. Aviation Technology,* 2006, no. 2, pp. 32–36.

[3] Sidnyaev N.I. *Thermophysics and Aeromechanics*, 2006, vol. 13, no. 1, pp. 2–16.

[4] Efimov E.S., Mozolkov A.S., Kharitonov V.T. *Trudy TsAGI – Proceedings of TsAGI,* 1981, vol. 2095, pp. 28–61.

[5] Sidnyaev N.I. *Mathematical Models and Computer Simulations*, 2009, vol. 1, no. 3, pp. 343–352.

[6] Krasnov N.F., Koshevoy N.F., Kalugin V.T. *Aerodinamika otryvnykh techeniy* [Aerodynamics of separated flows]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1988, 351 p.

[7] Bruno A.D., Shadrina T.V. *Doklady Akademii nauk – Reports of the Academy of Sciences*, 2002, vol. 387, no. 5, pp. 589–595.

[8] Bruno A.D., Shadrina T.V. *Doklady Akademii nauk – Reports of the Academy of Sciences*, 2004, vol. 394, no. 3, pp. 298–304.

[9] Bruno A.D., Shadrina T.V. The Axially Symmetric Boundary Layer on a Needle. *Proceedings of the International Conference on Boundary and Interior Layers, ONERA*, Toulouse, 2004. July 5th, 11.20, pp. 1–10.
[10] Krasnov N.F., ed. *Upravlenie i stabilizatsiya v aerodinamike* [Control and stabilization in aerodynamics]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1978, 480 p.
[11] Khalid M., Ist R.A. *RTiK*, 1980, vol. 18, no. 10, pp.140–142.
[12] Belotserkovskiy S.M., Skripach B.K., Tabachnikov V.G. *Krylo v nestatsionarnom potoke gaza* [The wing in non-stationary gas flow]. Moscow, Nauka Publ., 1971, 754 p.
[13] Sidnyaev N.I. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Seriya Estestvennye nauki – Herald of Bauman Moscow State Technical University. Series: Natural Sciences*, 2003, no. 1(10), pp. 71–87.
[14] Sidnyaev N.I. *Matematicheskoe modelirovanie – Mathematical Modeling,* 2004, vol. 16, no. 5, pp. 55–65.
[15] Sidnyaev N.I. *Izvestiya vuzov. Aviatsionnaya tekhnika – Proceedings of the Universities. Aviation Technology*, 2004, no. 2, pp. 30–33.
[16] Sidnyaev N.I. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Seria Mashinostroyeniye – Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Mechanical Engineering,* 2006, no. 1(62), pp. 3–14.
[17] Sidnyaev N.I. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika – Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2007, vol. 48, no. 2, pp. 12–20.
[18] Sidnyaev N.I., Glushkov P.A. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye menody – Mathematical Modeling and Numerical Methods*, 2014, no. 1, pp. 99−115.

**Sidnyaev N.I.** (b. 1955) graduated from Bauman Moscow Higher Technical School in 1981 and from Lomonosov Moscow State University in 1985. Dr. Sci. (Eng.), professor, head of the Higher Mathematics Department at Bauman Moscow State Technical University. Author of about 240 publications in the field of applied mathematics and mechanics. e-mail: sidnyaev@bmstu.ru

**Gordeeva N.M.** (b. 1968) graduated from Moscow State University in 1990. Assistant lecturer of the Higher Mathematics Department at Bauman Moscow State Technical University. Author of 6 publications in the field of applied mathematics and mechanics. e-mail: nmgordeeva@bmstu.ru