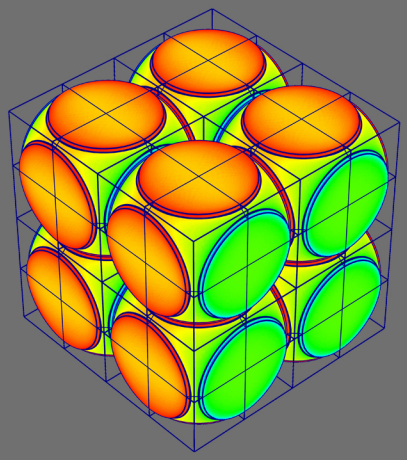
ISSN 2309-3684



Математическое моделирование и численные методы

Одиноков В. И., Евстигнеев А. И., Дмитриев Э. А., Колошенко Ю. Б., Евстигнеева А. А., Петров В. В. Моделирование стойкости литейных оболочечных форм, находящихся под действием внешней силовой и тепловой нагрузки. Математическое моделирование и численные методы, 2024, № 4, с. 31–51.

Источник: https://mmcm.bmstu.ru/articles/356/

Параметры загрузки:
IP: 216.73.217.58
15.11.2026 11:28:10

УДК 539.5, 621.74 DOI: 10.18698/2309-3684-2024-4-3151

Моделирование стойкости литейных оболочечных форм, находящихся под действием внешней силовой и тепловой нагрузки

© В. И. Одиноков, А. И. Евстигнеев, Э. А. Дмитриев,
Ю. Б. Колошенко, А. А. Евстигнеева, В. В. Петров

ФГБОУ ВО «КнАГУ», Хабаровский край, Комсомольск-на-Амуре, 681013, Россия

Разработана численная схема и алгоритм расчета напряженно-деформированного состояния (НДС) оболочечной литейной формы, имеющей внутреннюю полость, и находящейся под действием внешней силовой и тепловой нагрузок. В основу расчета положены уравнения линейной теории упругости, теплопроводности и апробированный численный метод. Рассматривается литейная оболочечная форма (конструкция), ограниченная ортогональными семействами поверхностей. В качестве примера приводится частная задача по получению литой заготовки сферической формы в металлической оболочковой форме при отсутствии и наличии температурных выточек на поверхности соприкосновения формы с жидким металлом (сталью). Результаты вычислений приведены в виде эпюр полей нормальных напряжений, перемещений и температур по сечениям сферической формы. Дана оценка эффективности применения нанесенных выточек на внутреннюю поверхность формы.

Ключевые слова: *оболочечная литейная форма, напряженно-деформированное состояние, численное моделирование, напряжение, перемещение, сферическая отливка*

Введение. Оболочечные конструкции, имеющие как моно, так и многослойную структуру и подвергающиеся температурным и внешним силовым воздействиям, имеют широкое применение в машиностроении и металлургии. К ним также относятся оболочечные конструкции литейных форм для получения ответственных деталей. Процесс их расчета значительно усложняется при расчете напряженно-деформированного состояния (НДС) в условиях многосвязной области. В ранее опубликованных работах рассматриваются в основном односвязные области. Нами предпринята попытка разработать общую структурную схему расчета НДС таких конструкций, находящихся в упругом состоянии в рамках многосвязной области. Основой расчета являются уравнения линейной теории упругости, уравнения теплопроводности и апробированный численный метод [1]. Выбор этого численного метода основывался на универсальности подхода независимо от геометрии рассматриваемой области и возможности удовлетворения всех граничных условий по напряжениям и перемещениям. Результат – поля напряжений и перемещений, определяемых

с одной точностью из решения сформулированной системы уравнений. Ограничением применимости данного метода является необходимость описания границ области системами ортогональных поверхностей.

Авторы имеют опыт применения указанного численного метода при исследовании самых различных функциональных технологических процессов, представленных в диссертационных работах [2-7], а оптимизации свойств оболочковой многослойной литейной формы и её морфологической структуры в [8]. Подобными исследованиями занимаются и за рубежом [9-15].

В специальной научной и технической литературе проблема изготовления качественных шарообразных отливок не нашла широкого отражения, что послужило основанием для разработки принципиально нового технологического решения по производству таких отливок и его моделирования.

Математическая постановка. Будем полагать, что имеется глуходонный стакан и вращающаяся огнеупорная рубашка, которые имеют одинаковое квадратное сечение. Тогда огнеупорная рубашка при вращении будет перемешивать жидкий металл в кристаллизаторе своими гранями.

Строится математическая модель расчета НДС оболочечной конструкции от действий внешней тепловой и силовой нагрузок, имеющей полые области и находящейся в упругом состоянии, например, литейные оболочечные формы.

Решение этой проблемы основано на использовании уравнений теории упругости и уравнения теплопроводности, с использованием апробированного численного метода.

Рассматриваемая конструкция находится в упругом состоянии. Ее решение связано со следующей системой уравнений (без учета массовых и инерционных сил):

$$\sigma_{ij,j} = 0;\ \text{i,j} = 1,2,3$$

$$\sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij} = 2G_p\varepsilon_{ij}^*; \quad \varepsilon_{ij}^* = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\varepsilon\delta_{ij}; \quad \varepsilon = \varepsilon_{ii}, \ , \tag{1}$$

$$\varepsilon_{ii} = 3k_p\sigma + 3\alpha_p\left(\theta - \theta_p^*\right); \quad \varepsilon_{ij} = 0,5\left(U_{i,j} + U_{j,i}\right),$$

$$c\rho\frac{\partial\theta}{\partial\tau} = div(\lambda grad\theta), \tag{2}$$

где σ_{ij} — компоненты тензора напряжений, U_i — перемещения; ε_{ij} — компоненты тензора упругих деформаций; σ — гидростатическое напряжение G_p — модуль сдвига оболочки р; δ_{ij} — символ Кронекера; k_p, α_p — соответственно коэффициент объемного сжатия и

коэффициент линейного расширения оболочки р; $\lambda = \lambda(\theta)$ — коэффициент теплопроводности; θ — текущая температура; ρ — плотность; θ_p^* — начальная температура в оболочке р, с — удельная теплоемкость, γ — удельный вес. В (1) используется суммирование по повторяющимся индексам.

Численный метод решения задачи. Для решения уравнений (1) и (2) при заданных начальных и граничных условиях использовался апробированный численный метод, описанный в работе [1]. Ограничением применимости метода является область, описанная в системах ортогональных поверхностей. Такая область и рассматривается в данной работе. Системой ортогональных поверхностей рассматриваемая область разбивается на элементы конечных размеров.

Для каждого элемента в принятой системе ортогональных координат (α_i, $i=1$) в разностной форме записывается система уравнений (1), (2), включающая средние значения напряжений и перемещений по граням элемента и длины дуг, ограничивающие его объем (рис. 1, а).

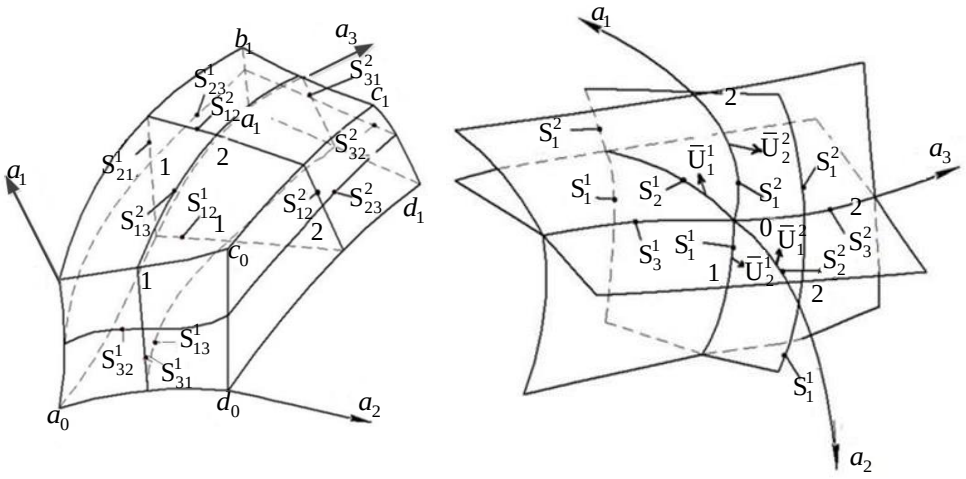


Рис. 1. Схема обозначения дуг сетки:
а) для расчета нормальных напряжений и перемещений в криволинейном элементе,
б) для расчета касательных напряжений

Применяемый численный метод использовался для исследования НДС во многих разноплановых работах [2÷12].

Перепишем уравнения равновесия и дифференциальные выражения ε_{ij} в разностной форме в соответствии с работой [1]:

$$S_{ik}\Delta S_{ij}(\sigma_{ii}-\sigma_{jj})+S_{ij}\Delta S_{ik}(\sigma_{ii}-\sigma_{kk})+$$
$$+0,5\Delta\sigma_{ii}S_{ij}S_{ik}+0,5\Delta\sigma_{ik}S_{ki}S_{kj}+$$
$$+0,5\Delta\sigma_{ij}S_{ji}S_{jk}+(S_{ji}\Delta S_{jk}+2S_{jk}\Delta S_{ji})\sigma_{ij}+ \qquad (3)$$
$$+(S_{ki}\Delta S_{kj}+2S_{kj}\Delta S_{ki})\sigma_{ik}=0$$
$$i,j,k=1,2,3;\ i\neq j\neq k$$

Здесь суммирование по индексам $i,\ j,\ k$ отсутствует, а также введены обозначения

$$\sigma_{ij}=0,5(\sigma_{ij}{}^{1}+\sigma_{ij}{}^{2});\ \Delta\sigma_{ij}=\sigma_{ij}{}^{2}+\sigma_{ij}{}^{1},\ (i,j=1,2,3)$$

где $\sigma_{ii}{}^{d}\,(i=1,2,3;d=1,2)$ — нормальное напряжение, действующее на криволинейной поверхности «d» элемента (m), нормалью к которой является касательная к координате α_i; $\sigma_{ij}{}^{d}$; $(i\neq j)$ — касательное напряжение в направлении α_j по криволинейной поверхности «d» элемента (m).

Значения S_{ik}^{j} вычисляются как среднее от значений длин дуг границы граней (ребер) (рис.1), при этом введены обозначения

$$S_{ij}=S_{ij}^{1}+S_{ij}^{2};\ \Delta S_{ij}=S_{ij}^{2}-S_{ij}^{1}.$$

Для нормальных компонент тензора деформаций используем следующие формулы [1]:

$$\varepsilon_{ii}=\frac{2\Delta U_i}{S_{ji}}+\frac{2U_j}{S_{ji}}\cdot\frac{\Delta S_{ji}}{S_{ij}}+\frac{2\Delta U_k}{S_{ki}}\cdot\frac{\Delta S_{ki}}{S_{ik}}, \qquad (4)$$
$$(i,j,k=1,2,3;i\neq j\neq k)$$

где

$$U_i=U_i^{1}+U_i^{2};\ \Delta U_i=U_i^{2}-U_i^{1}.$$

Сдвиговые деформации $\varepsilon_{ij}(i\neq j)$ по элементу (m) определяются как средние от значений ε_{ij} в узлах элемента

$$(\varepsilon_{ij})_m=\frac{1}{8}(\varepsilon_{ij}{}^{a_0}+\varepsilon_{ij}{}^{b_0}+\varepsilon_{ij}{}^{c_0}+\varepsilon_{ij}{}^{d_1}+\varepsilon_{ij}{}^{a_1}+\varepsilon_{ij}{}^{b_1}+\varepsilon_{ij}{}^{c_1}+\varepsilon_{ij}{}^{d_1}). \qquad (5)$$

Значения ε_{ij}^{0} в узле (рис. 1,б) согласно [1] имеет вид

$$\varepsilon_{ij}^{\,0} = \frac{2\Delta\bar{U}_j}{S_i} - 0,5\bar{U}_j\frac{S_j^{+} - S_j^{-}}{S_i S_j} + \frac{2\Delta\bar{U}_i}{S_j} - 0,5\bar{U}_i\frac{S_i^{+} - S_i^{-}}{S_i S_j}, \qquad (6)$$

$$(i, j = 1,2,3;\ \ i \neq j)$$

где

$$S_i = S_i^{1} + S_i^{2};\ \ \Delta\bar{U}_i = \bar{U}_i^{2} - \bar{U}_i^{1};$$
$$S_i^{+} = S_i^{1+} + S_i^{2+};\ \ S_i^{-} = S_i^{1-} + S_i^{2-}$$

значения $\bar{U}_i^{j}\,(j = 1,2)$ вычисляются как средние от значений перемещений по граням элемента, примыкающих к данному ребру.

Справедливость полученных выражений (3), (4) и (6) показана в работе [1] на примере выделенного элемента в цилиндрической системе координат.

С учетом того, что $\sigma_{ii} - \sigma_{jj} = 2G_p(\varepsilon_{ii} - \varepsilon_{jj})$, то для элемента (рис.1) алгебраическую систему уравнений перепишем в виде

$$S_{ik}\Delta S_{ij}2G_p(\varepsilon_{ii} - \varepsilon_{jj}) + S_{ij}2G_p\Delta S_{ik}(\varepsilon_{ii} - \varepsilon_{kk}) + 0,5\Delta\sigma_{ii}S_{ij}S_{ik} +$$
$$+0,5\Delta\sigma_{ik}S_{ki}S_{kj} + 0,5\Delta\sigma_{ij}S_{ji}S_{jk} + (S_{ji}\Delta S_{jk} + 2S_{jk}\Delta S_{ji})\sigma_{ij} +$$
$$+(S_{ki}\Delta S_{kj} + 2S_{kj}\Delta S_{ki})\sigma_{ik} = 0; \qquad (7)$$
$$i, j, k = 1,2,3;$$
$$i \neq j \neq k;$$

$$\sigma_{11} - \sigma_{22} = 2G_p(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}); \qquad (8)$$
$$\sigma_{11} - \sigma_{33} = 2G_p(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{33});$$

$$\sigma_{ij} = 2G_p\varepsilon_{ij};\ \ i, j = 1,2;\ \ i \neq j; \qquad (9)$$

$$\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} - 3k_p\sigma - 3\alpha_p(\theta - \theta_p^{*}) = 0. \qquad (10)$$

Полученную систему уравнений можно значительно сократить, перейдя к эквивалентной системе уравнений.

Разобьём все неизвестные на два множества: зависимые и независимые. Определим последовательность вычислений для зависимых неизвестных. Перейдем к системе уравнений относительно независимых неизвестных.

Пусть

$$\Gamma_i\big|_{\alpha_i = 0};\ \ \Gamma_i^{*}\big|_{\alpha_i = \alpha_i^{*}}, (i = 1,2,3)$$

— поверхности, ограничивающие рассматриваемую область; Γ_{iu}, Γ_{iu}^{*} — поверхности, где заданы перемещения U_i; $\Gamma_{i\sigma}$, $\Gamma_{i\sigma}^{*}$ — поверхности, где заданы напряжения σ_{ii}. При этом

$$\Gamma_i = \Gamma_{iu} + \Gamma_{i\sigma};\ \ \Gamma_i^* = \Gamma_{iu}^* + \Gamma_{i\sigma}^*;$$

Выразим из уравнения (10) U_1^2 с учетом (4):

$$U_1^2 = U_1^1 + A_1, \tag{11}$$

где A_1 — оператор, не содержащий U_1^2.

Если принять неизвестные $U_2^t,\ U_3^t (t = 1,2),\ \sigma$ независимыми, то получаем, что (1.11) является рекуррентным соотношением, определяющим U_1 по всем элементам исследуемой области от $\alpha_1 = 0$ до $\alpha_1 = \alpha_1^*$.

На поверхностях Γ_{iu}^* появляются новые уравнения:

$$F_1^f = (U_1^2)^f\,|_{\Gamma_{iu}^*} - (U_1^*)^f = 0;\ \ f = 1,..., f_1 \tag{12}$$

где $(U_1^*)^f$ — перемещения U_1, заданные граничными условиями на поверхности Γ_{iu}^*, а f — число элементов, примыкающих к поверхности Γ_{iu}^*.

Группу независимых переменных, число которых в точности соответствует числу уравнений (12), образуют $\sigma_{11}|_{\Gamma_{iu}^*}$.

Как было сказано выше, конструкция имеет полости, ограниченные системой ортогональных поверхностей. Имеем многосвязную область.

Рассмотрим уравнения (7); выразим из них $\sigma_{ii}^1,\ i = 1,2,3$

$$\sigma_{ii}^1 = \sigma_{ii}^2 + (A_2)_i, \tag{13}$$

где $(A_2)_i$ — оператор, не содержащий $\sigma_{ii}^1,\ i = 1,2,3$.

Данные рекуррентные соотношения будем удовлетворять от $\alpha_1 = \alpha_1^*$ до $\alpha_i = 0$. На поверхностях $\Gamma_{i\sigma},\ (i = 1,2)$ будут иметь место уравнения:

$$F_2^f = (\sigma_{ii}^1)^f\,|_{\Gamma_{i\sigma}^*} - (\sigma_{ii}^*)^f = 0;\ \ f = 1,..., f_2,\ \ (i = 1,2,3); \tag{14}$$

где σ_{ii}^* — нормальные напряжения σ_{ii}, заданные на поверхностях граничными условиями, f_2 — количество элементов примыкающих к поверхностям $\Gamma_{i\sigma},\ (i = 1,2,3)$.

Тогда следующую группу независимых переменных составят переменные $U_i|_{\Gamma_{i\sigma}},\ (i = 1,2,3)$, число которых совпадает с числом уравнений (14).

При встрече с полой областью (рис.2), имеем уравнения:

$$F_i^* = \sigma_{ii}^1 |_{s_i^2} - P_{ii}^* |_{s_i^2} = 0, \quad (i = 1,2,3), \tag{15}$$

где P_{ii}^* — давление в полой области формы.

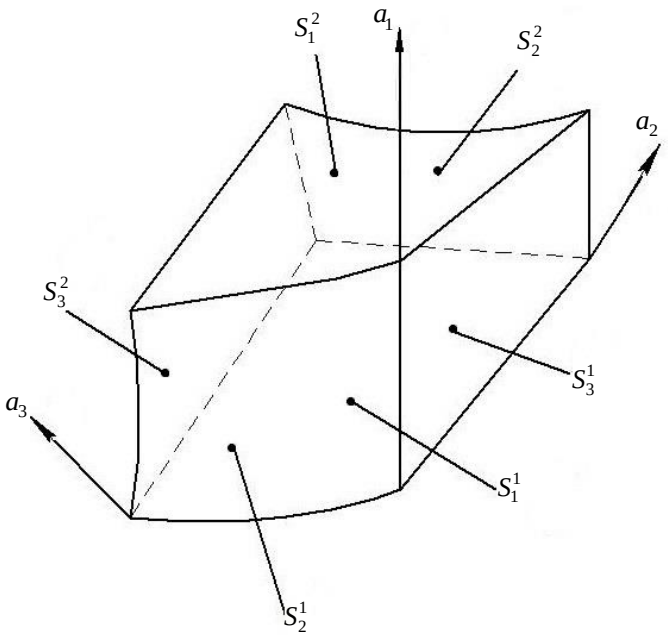


Рис. 2. Элемент полой области литейной формы

Уравнений (15) столько, сколько неизвестных значений $U_i |_{S_i^2}$, $(i = 1,2,3)$.

Перепишем уравнения (1.8) в виде:

$$\begin{aligned} \bar{F}_1 &= \sigma_{11} - \sigma_{22} - 2G_p(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}) = 0, \\ \bar{F}_2 &= \sigma_{11} - \sigma_{33} - 2G_p(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{33}) = 0. \end{aligned} \tag{16}$$

Направление обхода области по $x_1(\uparrow)$, $x_2(\uparrow)$, $x_3(\uparrow)$; этих уравнений столько, сколько внутренних перемещений U_2, U_3 и неизвестных U_2, U_3 на границах α_2^*, α_3^*.

Число уравнений

$$\bar{F}_3 = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) - \sigma = 0 \tag{17}$$

соответствует числу элементов в рассматриваемой области.

Если положить за независимые переменные $X = \left\{ U_2, U_3, \sigma, \sigma_{ii} |_{\Gamma_{iu}, \Gamma^*_{iu}} \right\}$, то, пробегая последовательность (11), (13), можно определить зависимые переменные через X.

Таким образом, система, получаемая непосредственной аппроксимацией исходной системы дифференциальных уравнений в частных производных конечными разностями, преобразуется в эквивалентную систему алгебраических уравнений. Число уравнений в эквивалентной системе примерно на порядок меньше, чем в исходной.

Если положить, что α_p, k_p, $G_p = const$, то система будет линейной.

Коэффициенты и свободные члены новой линейной эквивалентной системы уравнений можно найти с помощью следующей процедуры:

Пусть эквивалентная система уравнений имеет вид:

$$\bar{F}_i = \alpha_{ij} x_j + b_i = 0;\ i, j = 1,...n\,.$$

Если положить все неизвестные равными нулю $x_i = 0,\ i = 1,...,n$, то, пробегая выше приведенную последовательность, и, насчитывая $\bar{F}_i$ по формулам, найдем свободные члены новой системы

$$\bar{F}_i^0 = b_i;\ i = 1,...,n\,.$$

Далее находим коэффициенты α_{ij}. Для этого положим $x_k = 1,\ x_i = 0,\ (i \neq k;\ i = 1...n)$. Опять, пробегая вышеуказанную последовательность, находим $\bar{F}_i^k$ и α_{ik} по формуле

$$\alpha_{ik} = \frac{\bar{F}_i^k - \bar{F}_i^0}{1},\ i = 1,...,n.$$

Таким образом, определяется вся матрица α_{ik} новой эквивалентной системы. Решение этой системы осуществляем по стандартной программе методом Гаусса.

Для решения уравнения теплопроводности используется численный метод, описанный в работе [1]. В соответствие с данным методом для каждого внутреннего «k»-го элемента (рис. 1,а) записывается тепловой баланс, из которого выводится уравнение теплопроводности в разностном виде и строится итерационная процедура [1].

$$\theta_k = \frac{\theta_k^* + t_{12}\theta_1^+ + t_{11}\theta_1^- + t_{22}\theta_2^+ + t_{21}\theta_2^- + t_{32}\theta_3^+ + t_{31}\theta_3^-}{1 + t_{12} + t_{11} + t_{22} + t_{21} + t_{32} + t_{31}}\,. \qquad (18)$$

Здесь

$$t_{11}=\frac{2(\lambda_k+\lambda_1^-)}{S_{21}+S_{21}^-}F_1^1\cdot A;\;\; t_{12}=\frac{2(\lambda_k+\lambda_1^+)}{S_{21}+S_{21}^+}F_1^2\cdot A;$$

$$t_{21}=\frac{2(\lambda_k+\lambda_1^-)}{S_{12}+S_{12}^-}F_2^1\cdot A;\;\; t_{22}=\frac{2(\lambda_k+\lambda_2^+)}{S_{12}+S_{12}^+}F_2^2\cdot A;$$

$$t_{31}=\frac{2(\lambda_k+\lambda_3^+)}{S_{13}+S_{13}^-}F_3^1\cdot A;\;\; t_{32}=\frac{2(\lambda_k+\lambda_1^+)}{S_{23}+S_{23}^+}F_3^2\cdot A; \qquad (19)$$

$$A=\frac{\Delta\tau}{c_k\gamma_k V_k};\;\; V_k=\frac{S_{12}\cdot S_{13}\cdot S_{21}}{8};\;\; F_i^j=S_{ik}^j\cdot S_{ip}^j;\;\; (i\neq k\neq p)$$

$$S_{ij}=S_{ij}^1+S_{ij}^2,\;\; S_{ij}^+=S_{ij}^{1+}+S_{ij}^{2+},\;\; S_{ij}^-=S_{ij}^{1-}+S_{ij}^{2-},\;\; (i,\; k,\; p=1,2,3,\; j=1);$$

где θ_k^* — средняя температура в k-м элементе в начале временного шага $\Delta\tau_m$; c_k, γ_k, V_k — соответственно удельная теплоемкость, удельный вес и объем k-го элемента; λ_k, θ_k — соответственно значения коэффициента теплопроводности и температуры в k-м элементе в конце временного шага $\Delta\tau_m$; λ_i^-, θ_i^- — соответственно коэффициент теплопроводности и температура в элементе, следующим за элементом k по координате α_i в отрицательную сторону; θ_i^+, λ_i^+ — аналогичные параметры в положительном направлении; S_{ij}^p — средние значения от дуг ребер элементов. Так, например, $S_{21}^1=0,5(|a_0b_0|+|a_1b_1|)$, тогда $S_{21}=S_{31}$ и $S_{pi}=S_{ji}$ $(p\neq j\neq i)$.

Выражение (18) может рассматриваться как система уравнений, $k=1,....,n$, где n — число элементов, на которые разбита область.

Положим, что c_k, γ_k, $V_k=const$. Тогда система (18) будет линейная и может быть решена итерационным методом. В работе [1] доказывается сходимость итерационной процедуры (18).

Алгоритм численного решения. Предложен следующий алгоритм решения задачи.

1. Время действия нагрузки τ^* разбивается на конечное число шагов: $\tau^*=\sum\Delta\tau_n$, n — номер временного шага.

2. Исследуемая область разбивается на конечное число ортогональных элементов.

3. Задаются начальные и граничные условия по элементам, образующих рассматриваемую область, и значения констант физико-механических свойств материалов (первое приближение).

4. Вычисляются длины дуг элементов S_{ik}^{j} $(i,\ k=1,2;\ i\neq k;\ j=1,2)$. Задается матрица {КА}, определяющая местоположение полой области.

5. Определяется поле температур на временном шаге $\Delta\tau_n$ численным решением уравнения теплопроводности с использованием итерационной формулы (18) при наличии начальных и граничных условий на данном временном шаге.

6. Формируется и решается система уравнений (12), (14), (15), (16), и (17) с учетом разностных аналогов (5)-(7) и разработанной методики, описанной выше для многосвязной области. Определяются поле напряжений σ_{ij} и перемещений U_i.

7. По заданным формулам вычисляются коэффициенты α_p, k_p, G_p и следует этап 4. Этап 5) - 7) повторятся до достижения необходимой точности вычислений. Далее идет этап 8.

8. Производится шаг по времени. Если $\sum\Delta\tau_n<\tau^*$, то выполняется этап 5. Если $\sum\Delta\tau_n=\tau^*$ — процесс вычисления закончен

В алгоритм могут быть внесены поправки и дополнения при решении частных задач.

Осесимметричная задача. На базе построенной выше математической модели рассмотрим частную задачу по заливке стали в металлическую сферическую форму, при отсутствии и наличии на внутренней поверхности литейной формы кольцевых выточек.

На рис. 3 приведена схема меридианного сечения формы с учетом осевой симметрии. Рассматривается тело вращения, для него

$$\sigma_{31}=\sigma_{32}=0;\ \varepsilon_{13}=\varepsilon_{23}=0,\ U_3=0, \tag{20}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_3}=0;\ \frac{\partial\sigma_{3i}}{\partial x_3}=0;\ (i=1,2,3).$$

Кроме того, для тел вращения в формулах (4), (6), (7) имеет место

$$\Delta S_{31}=0;\ \Delta S_{32}=0;\ \frac{\Delta\bar{U}_1}{S_3}=0;\ \frac{\Delta\bar{U}_2}{S_3}=0. \tag{21}$$

Для осесимметричной задачи тепловой поток по координате равен нулю, поэтому итерационная формула (18) по определению температурного поля будет иметь вид

$$\theta_k=\frac{\theta_k^*+t_{12}\theta_1^+ +t_{11}\theta_1^- +t_{22}\theta_2^+ +t_{21}\theta_2^-}{1+t_{12}+t_{11}+t_{22}+t_{21}}. \tag{22}$$

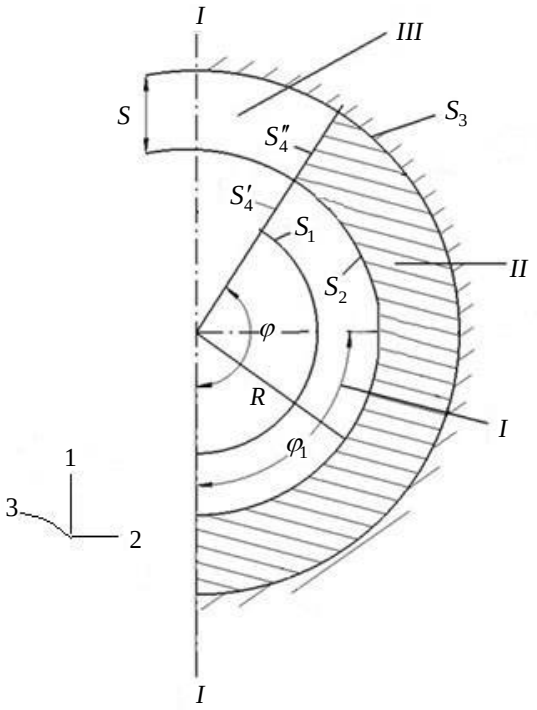


Рис. 3. Схема меридианного сечения формы с учетом осевой симметрии

Начальные условия задачи:

$\Delta\big|_{\tau=0} = 0$ — отсутствие твердой фазы металла.

$\theta_I\big|_{\tau=0} = \theta_0$ — температура разливаемого жидкого металла;

$\theta^*_{III}\big|_{\tau=0} = \theta^*$ — начальная температура формы;

где θ^*_{II} — температура кристаллизации металла.

Граничные условия задачи:

на оси симметрии:

$$U_2 = 0,\ \sigma_{21} = 0,\ q_n = 0.$$

где q_n — нормальный тепловой поток;

на поверхностях $S_1 \div S_8$:

$$\begin{gathered}\sigma_{11}|_{S_1} = P_1;\ \sigma_{12}|_{S_i} = 0,(i = 1,7,8);\ \sigma_{11}|_{S_3'} = 0,\ \ \sigma_{11}|_{S_i} = 0,(i = 7,8);\\ \sigma_{12}|_{S_3''} = 0;\ \sigma_{12}|_{S_i} = 0,(i = 7,8);\ \sigma_{22}|_{S_i} = 0,(i = 5,6);\ \sigma_{22}|_{S_4'} = P_1;\\ U_1|_{S_3'} = 0;\ \ U_2|_{S_4'} = 0;\ \sigma_{21}|_{S_i} = 0,(i = 4,5,6);\\ \theta|_{S_1} = \theta_m;\ \theta|_{S_3} = \theta^*;\end{gathered} \tag{23}$$

где $S_3 = S_3' + S_3''$, S_3' — свободная поверхность S_3'' — контактная поверхность.

При решении температурной задачи использовались граничные условия первого рода. Для определения $\theta_m(\tau)$ и $\theta_m^*(\tau)$ воспользуемся данными работы [8]

$$\theta_м = 1550 - 1,666\tau - \tau(60-\tau)/(10+\tau^2),$$
$$\theta \le \tau \le 60 \text{ с}, \qquad (24)$$
$$\theta^* = 20 + 17,3\sqrt{\tau}.$$

Здесь τ — время охлаждения, с.

В процессе охлаждения жидкого металла при условии, что температура металла $\theta_m \le \theta_{11}^*$ определяется толщина затвердевающего слоя из решения межфазового перехода:

$$\frac{d\theta_1}{dn^x}\lambda_1 - \frac{d\theta_2}{dn^x}\lambda_2 = \frac{d\Delta}{d\tau}L\rho, \qquad (25)$$

где θ_1 и θ_2 — соответственно температуры в твердой и жидкой фазах; λ_1 и λ_2 — коэффициенты теплопроводности в твердой и жидкой фазах; L — скрытая теплота плавления; ρ — плотность твердой фазы; Δ — толщина корочки; n^* — нормаль к границе двух фаз. Если предположить, что температура в твердой фазе (корочке) изменяется по линейному закону, а градиент температуры в жидкой фазе равен нулю, то после интегрирования получим [16]

$$\Delta_n = C\sqrt{\tau};\ C = \sqrt{\frac{2\Delta\theta_1\lambda_1}{\rho L}}. \qquad (26)$$

Здесь $\Delta\theta_1$ — перепад температур в твердой фазе вблизи фронта кристаллизации.

Время процесса кристаллизации τ^* разбивается на малые шаги $\Delta\tau_n$ (n — номер временного шага). На каждом временном шаге $\Delta\tau_n$ вычисляется толщина твердой фазы $\Delta_n (\Delta = \sum_1^n \Delta_n)$.

Для данной задачи общий алгоритм дополняется в пункте 5 выражением: определяется толщина закристаллизовавшейся корочки по формуле (26).

Результаты численного решения задачи. При численном решении были использованы следующие исходные данные.

Геометрические параметры: $T = 50$ мм, $R = 20$ мм, $\varphi = 150°$, $\varphi_1 = 30°$; $\varphi_1 = 90°$.

Временные интервалы $\Delta\tau_n$: 0,01; 0,02; 0,03; 0,04; 0,05; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 2,0; 5,0; 6,0; 8,0; 9,0.

Разбиение области: $N1\times N2=15\times 20$; выточка $7{,}1\times 2{,}6$ мм.

Приняты следующие физические параметры разливаемой стали при температуре $\theta>1000°C$ $\left(\theta_м*=1500°C\right)$:

$$G=1000 \text{ кг/мм}^2;\ \alpha=12\cdot 10^{-6} \text{ град}^{-1}\text{г};\ \lambda=0{,}0298 \text{ Вт/}\left(\text{мм}\times°\text{C}\right);$$
$$L=270\cdot 10^3 \text{ Дж/кг};\ C=444 \text{ Дж/}\left(\text{кг}\times°\text{C}\right); \qquad (27)$$
$$\gamma=7{,}80\cdot 10^{-6} \text{ кг/мм}^3;\ \theta_к=1450 \text{ °C}.$$

где L — скрытая теплота плавления.

Физические свойства металлической формы соответствуют (27), а расчет G осуществляется согласно [17] по выражению:

$$G=8100\cdot[1-1{,}2\cdot(Q/1000)^2] \text{ (кг/мм}^2) \qquad (28)$$

На рис. 4 приведены эпюры напряжений σ_{22} по сечениям формы за время охлаждения $\tau=8{,}6$ сек. Видим, что в форме без выточек сжимающие напряжения на внутренней поверхности формы достигают 64 МПа, что примерно соответствует пределу текучести стали при *C*. Такие значения напряжений могут привести либо к нарушению геометрии внутренней поверхности формы, либо к её разрушению. Технологическое решение такой проблемы было найдено в результате анализа известных в литейном производстве методов снижения термических напряжений в отливках за счет использования, так называемых, «ребер жесткости» [18], а в нашем случае температурных швов (выточек).

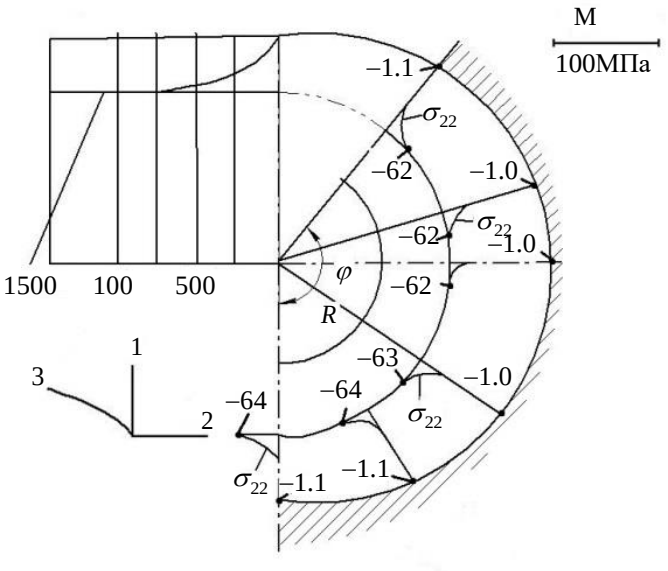


Рис. 4. Эпюры напряжений σ_{22} по сечениям формы за время охлаждения $\tau=8{,}6$ сек: эпюры σ_{22} в сечениях формы без выточек

Рассматривалась задача по получению литой заготовки сферической конфигурации. Данная работа имеет важное прикладное значение при получении литых шаровых опор. Было получено, что в начальный момент заливки литейная форма получает сильный тепловой удар большой величины, при этом сжимающие нормальные напряжения могут привести к разрушению и нарушению геометрии внутренней поверхности формы. С учетом полученных расчетных результатов было найдено техническое решение по устранению данной проблемы [19].

На рис. 5 приведена схема меридианного сечения с учетом осевой симметрии при наличии на внутренней поверхности формы температурных швов (выточек), а на рис. 6 — эпюры напряжений σ_{22} в сечениях формы с выточками при $\varphi_1 = 30^\circ$. Видно, что в форме с выточками при $\varphi_1 = 30^\circ$ сжимающие напряжения σ_{22} уменьшаются в разы по модулю в широком диапазоне области от выточки.

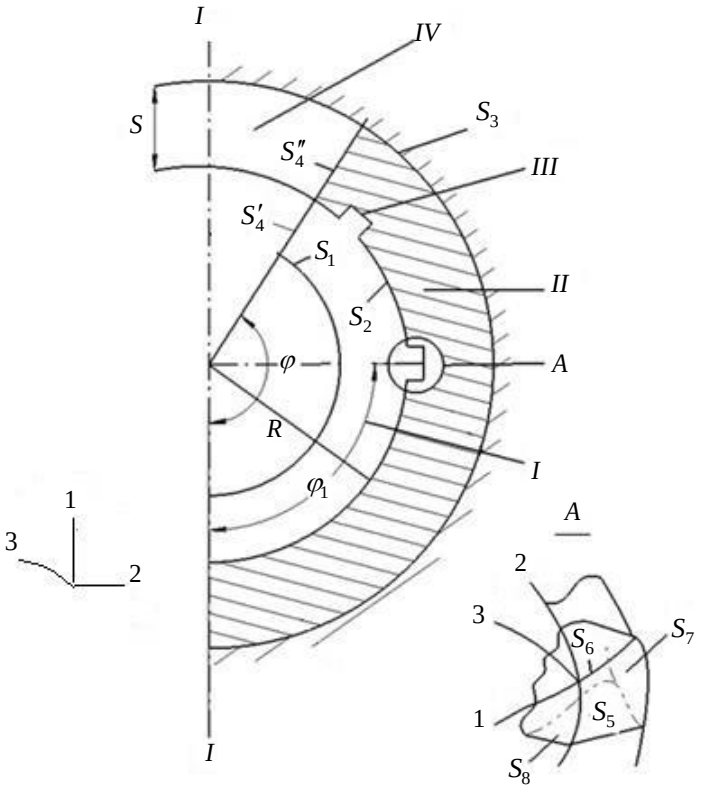


Рис. 5. Схема меридианного сечения формы с учетом осевой симметрии при наличии температурных швов (выточек) на внутренней поверхности литейной формы

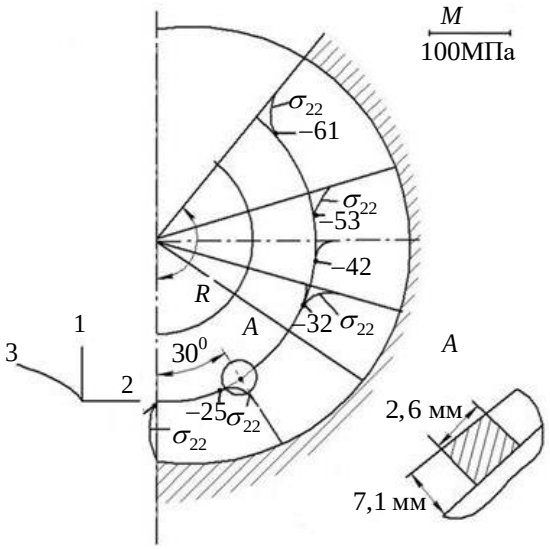


Рис. 6. Эпюры напряжений σ_{22} по сечениям формы за время охлаждения $\tau = 8,6$ сек : эпюры σ_{22} в сечениях формы с выточкой при $\varphi_1 = 30^\circ$

На рис. 7 приведены эпюры σ_{11} при $\tau = 8,6$ сек в сечениях формы с выточкой $\varphi_1 = 30^\circ$. Наблюдается та же картина — вблизи выточки напряжения σ_{11} падают по модулю.

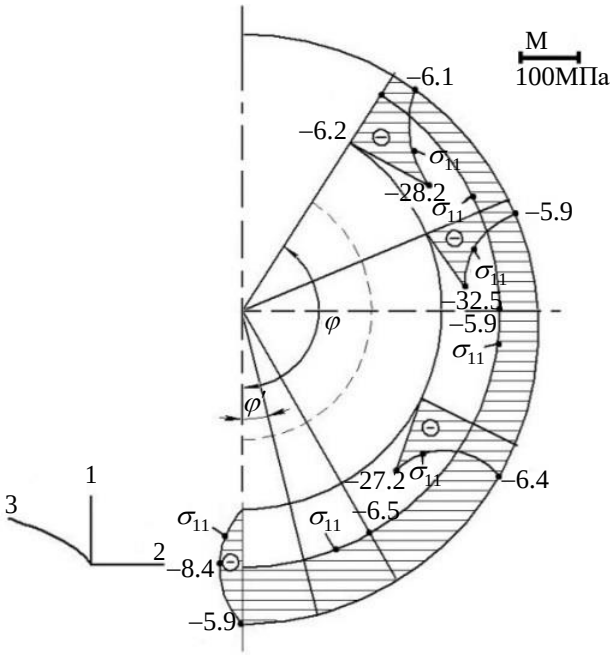
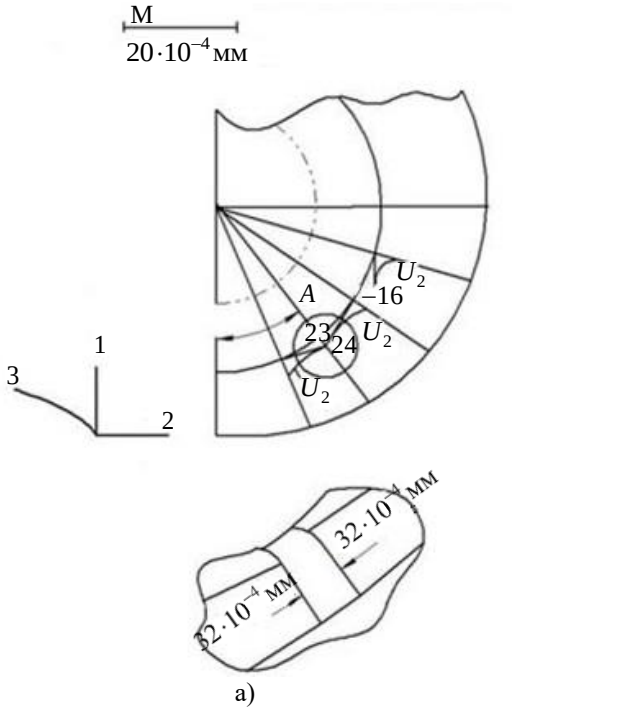
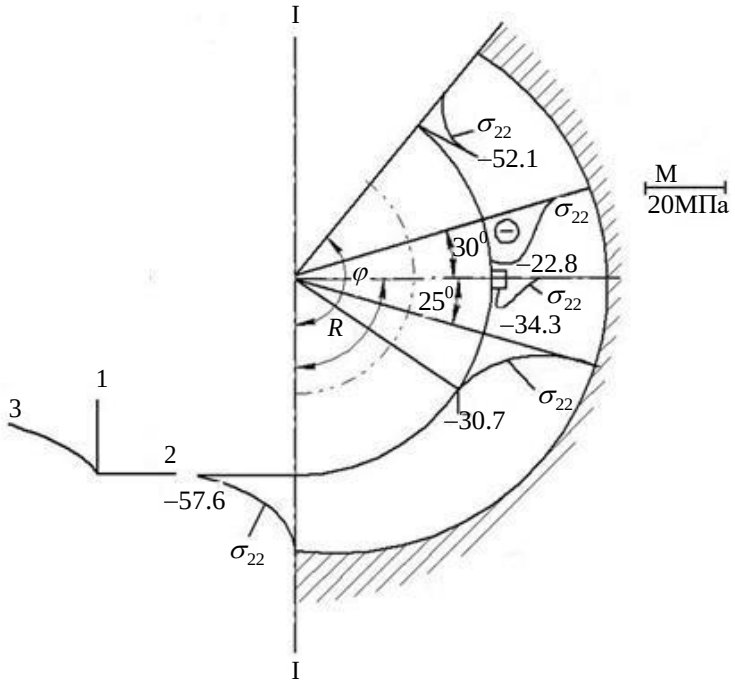


Рис. 7. Эпюры σ_{11} при $\tau = 8,6$ сек в сечениях формы с выточкой при $\varphi_1 = 30^\circ$



а)



б)

Рис. 8. Эпюры перемещений U_2 в районе выточки $\varphi_1 = 30^\circ$ (а) и σ_{22} (б) по сечению формы с выточкой при $\varphi_1 = 90^\circ$

На рис. 8, а показаны эпюры перемещений U_2 в районе выточки $\varphi_1 = 30^\circ$. Видим, выточка стремится закрыться, но перемещения слишком малы и составляют в сумме 0,0066 мм. Следовательно, для данного случая достаточно было выполнить температурный шов шириной 0,5 мм. На рис. 8, б приведены эпюры σ_{22} по сечению формы с выточкой при $\varphi_1 = 90^\circ$. Наблюдаем ту же картину, что и при $\varphi_1 = 30^\circ$ — напряжения σ_{22} в области выточки падают (по модулю). Напряжения σ_{33} примерно такие же, что и по величине σ_{22}. Время $\tau = 8,6$ сек — это время максимальных значений $|\sigma_{22}|$.

Таким образом, можно заключить, что наличие внутренних температурных швов (выточек) на внутренней поверхности литейной формы позволяет исключить образование дефекта по нарушению геометрии внутренней поверхности металлической сферической литейной формы и возможного её разрушения после заливки жидким металлом.

Заключение.

1. Разработана пространственная математическая модель расчета НДС оболочечных литейных форм, находящихся в условиях многосвязной области в упругом состоянии под действием внешней тепловой и силовой нагрузок.

2. Рассмотрен частный пример расчета НДС стойкости металлической сферической формы после заливки ее сталью при отсутствии и наличии в форме внутренних температурных выточек. Показано, что для снижения температурных напряжений, возникающих на внутренней поверхности формы заданной геометрии в начальный момент кристаллизации металла, достаточно нанести на внутреннюю поверхность формы выточку шириной 0,5 мм.

3. Результаты вычислительных расчетов по разработанной методологии моделирования позволят значительно сократить объем экспериментальных исследований по доработке и доводке технологии литья шарообразных отливок до промышленного освоения.

4. Предложенная методология моделирования стойкости оболочечных литейных форм к трещинообразованию может быть использована для моделирования других функциональных оболочечных конструкций.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №24-29-00214, https//rscf.ru/project/24-29-00214/

ЛИТЕРАТУРА

[1] Одиноков В.И., Каплунов Б.Г., Песков А.В, Баков А.В. *Математическое моделирование сложных технологических процессов*. Москва, Наука, 2008, 178 с.

[2] Севастьянов Г.М. *Моделирование напряженно-деформируемого состояния при заливке и затвердевании металла в керамической оболочковой форме*. Автореферат дисс. канд. физ.-мат. наук. Владивосток, 2011, 16 с.

[3] Скляр С.Ю. *Математическое моделирование тепловых и деформационных процессов на литейно-ковочном модуле вертикального типа*. Автореферат дисс. канд. техн. наук. Комсомольск-на-Амуре, 2011, 16 с.

[4] Сапченко И.Г. *Теория и практика формирования пористых стуктур в литье по выплавляемым моделям*. Автореферат дисс. докт. техн. наук. Комсомольск-на-Амуре, 2011, 32 с.

[5] Горнаков А.И. *Моделирование процесса движения жидкого металла в кристаллизаторе установки непрерывного литья стали*. Автореферат дисс. канд. техн. наук. Комсомольск-на-Амуре, 2013, 24 с.

[6] Черномас В.В. *Разработка конструкции и исследование процесса получения непрерывнолитых деформированных заготовок на литейно-ковочном модуле*. Автореферат дисс. докт. техн. наук. Владивосток, 2007, 24 с.

[7] Одиноков В.И., Евстигнеев А.И., Дмитриев Э.А., Карпенко В.А. Математическое моделирование процесса перемешивания жидкого металла в кристаллизаторе установки непрерывной разливки стали // *Математическое моделирование и численные методы*, 2023, № 3, с. 18-41.

[8] Иванкова Е.П. *Моделирование стойкости оболочковой формы по выплавляемым моделям к трещинообразованию при охлаждении в ней отливки*. Автореферат дисс. канд. техн. наук. Комсомольск-на-Амуре, 2022, 24 с.

[9] Zhang Q., Cao M., Zhang D., Zhang S., Sun J. Research on integrated casting and forging process of aluminum automobile wheel. *Advances in Mechanical Engineering*, 2014, vol. 6, 870182. DOI:10.1155/2014/870182.

[10] Zhenglong L., Qi Z. Simulation and experiment research on squeeze casting combined with forging of automobile control arm. *Proceedings of the ASME 2018 International Mechanical Engineering Congress and Exposition*, 2018, vol. 2, art. no. 144113. DOI:10.1115/IMECE2018-86006

[11] Chang F.-C., Hwang W.-S., Lee C.-H., Wu C.-F., Yang, J.-B. Forging condition for removing porosities in the hybrid casting and forging process of 7075 aluminum alloy casting. *Materials Transactions*, 2004, vol. 45(6), pp. 1886-1890. DOI: 10.2320/matertrans.45.1886

[12] Dedov S., Lehmann G., Kawalla R. Application of combined casting-forging process for production of durable lightweight aluminum parts. *Key Engineering Materials*, 2013, vol. 554–557, pp. 264–273. DOI: 10.4028/www.scientific.net/KEM.554-557.264

[13] Krüger L., Jentsch E., Brunke L., Keßler A., Wolf G., Lehnert T., Schubert N., Wagner A., Landgrebe D. Development of an innovative lightweight piston through process combination "casting – forging*". Procedia Manufacturing*, 2019, vol. 27, pp. 172–176. DOI: 10.1016/j.promfg.2018.12.061

[14] Perrier, F., Bouvier, V., & Duperray, L. A new wheel design for reducing weight. *Materials Science Forum*, 2014, vol. 794–796, pp. 578–583. DOI: 10.4028/www.scientific.net/msf.794-796.578

[15] Böhmichen, U., Schubert, N., Lehnert, T., Sterzing, A., & Mauermann, R. From casting to forging – The combined simulation for a steel component. *Engineering Reports*, 2021, art no. e12400. DOI: 10.1002/eng2.12400

[16] Евстигнеев А.И., Дмитриев Э.А., Чернышова Д.В., Одиноков В.И. и др. Моделирование внешнего силового воздействия на стойкость оболочковой формы при заливки в нее стали // *Математическое моделирование*, 2022, Т. 34, № 5, с. 61-72.

[17] Одиноков В.И., Дмитриев Э.А., Евстигнеев А.И., Свиридов А.В. *Матема-*

тическое моделирование процессов получения отливок в керамические оболочковые формы. Москва, Инновационное машиностроение, 2020, 256 с.

[18] Михайлов А. М. *Литейное производство: учебник для металлургических специальностей вузов.* Москва, Машиностроение, 1987, 256 с.

[19] Пат. 2828801 Российская Федерация, МПК B22C 9/04 B22C 9/08. *Литейная многослойная оболочковая форма* / В.И. Одиноков, А.И. Евстигнеев, Э.А. Дмитриев, и др. – № 2024106208; заявл. 05.03.2024; опубл. 21.10.2024.

Статья поступила в редакцию 24.06.2024

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Одиноков В. И., Евстигнеев А. И., Дмитриев Э. А., Колошенко Ю. Б., Евстигнеева А. А., Петров В. В. Моделирование стойкости литейных оболочечных форм, находящихся под действием внешней силовой и тепловой нагрузки. *Математическое моделирование и численные методы,* 2024, № 4, с. 31–51.

Одиноков Валерий Иванович — д-р техн. наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Комсомольский-на-Амуре государственный университет. e-mail: 79122718858@yandex.ru

Евстигнеев Алексей Иванович — д-р техн. наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Комсомольский-на-Амуре государственный университет. e-mail: diss@knastu.ru

Дмитриев Эдуард Анатольевич — д-р техн. наук, профессор, ректор Комсомольского-на-Амуре государственного университета. e-mail: rector@knastu.ru

Колошенко Юлия Борисовна — старший преподаватель, Комсомольский-на-Амуре государственный университет. e-mail: koloschenko2011@yandex.ru

Евстигнеева Анна Алексеевна — студент, Комсомольский-на-Амуре государственный университет. e-mail: annka.ewstic@mail.ru

Петров Виктор Викторович — д-р техн. наук, профессор, ректор Комсомольского-на-Амуре государственного университета. e-mail: petrovpng@mail.ru

Modeling the durability of casting shell molds under external force and thermal loads

© V. I. Odinokov, A. I. Evstigneev, E. A. Dmitriev, Yu. B. Koloshenko, A. A. Evstigneeva, V. V. Petrov

Komsomolsk-on-Amur State University, Khabarovsk Territory, Komsomolsk-on-Amur, 681013, Russia

A numerical scheme and algorithm have been developed for calculating the stress-strain state (SSS) of a shell casting mold with an internal cavity, subjected to external force and thermal loads. The calculations are based on the equations of linear elasticity theory,

heat conduction, and a validated numerical method. The study examines a shell casting mold (construction) bounded by orthogonal families of surfaces. As an example, a specific problem is presented involving the production of a spherical cast billet in a metallic shell mold, both in the absence and presence of thermal grooves on the contact surface between the mold and the liquid metal (steel). The calculation results are provided in the form of diagrams of normal stress fields, displacements, and temperatures across the sections of the spherical mold. An assessment is made of the effectiveness of applying grooves to the inner surface of the mold.

***Keywords**: shell*

REFERENCES

[1] Odinokov V.I., Kaplunov B.G., Peskov A.V., Bakov A.V. *Matematicheskoe modelirovanie slozhnyh tekhnologicheskih processov* [Mathematical modeling of complex technological processes]. Moscow, Nauka Publ., 2008, 178 p.

[2] Sevastyanov G.M. *Modelirovanie napryazhenno-deformiruemogo sostoyaniya pri zalivke i zatverdevanii metalla v keramicheskoy obolochkovoy forme* [Modeling of the stress-strain state during pouring and solidification of metal in a ceramic shell mold]. Abstract of the diss. Cand. (Phys.-Math.) Sc. Vladivostok, 2011, 16 p.

[3] Sklyar S.Y. *Matematicheskoe modelirovanie teplovyh i deformacion-nyh processov na litejno-kovochnom module vertikal'nogo tipa* [Mathematical modeling of thermal and deformation processes on a vertical type casting and forging module]. Abstract of the diss. Cand. (Eng.) Sc. Komsomolsk-on-Amur, 2011, 16 p.

[4] Sapchenko I.G. *Teoriya i praktika formirovaniya poristykh struktur v lite po vyplavlyaemym modelyam* [Theory and practice of forming porous structures in investment casting]. Abstract of the diss. Dr. (Eng.) Sc. Komsomolsk-on-Amur, 2011, 32 p.

[5] Gornakov A.I. *Modelirovanie processa dvizheniya zhidkogo metalla v kristallizatore ustanovki nepreryvnogo litya stali* [Modeling the process of liquid metal flow in the mold of a continuous steel casting machine]. Abstract of the diss. Cand. (Eng.) Sc. Komsomolsk-on-Amur, 2013, 24 p.

[6] Chernomas V.V. *Razrabotka konstrukcii i issledovanie processa polucheniya nepreryvnolityh deformirovannyh zagotovok na litejno-kovochnom module* [Design development and study of the process of obtaining continuously cast deformed blanks on a casting and forging module]. Abstract of the diss. Dr. (Eng.) Sc. Vladivostok, 2007, 24 p.

[7] Odinokov V.I., Dmitriev E.A., Evstigneev A.I., Karpenko V.A. Mathematical modeling of the metal deformation process on a casting and forging module with a modified drive of the side strikers. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2023, No. 3, pp. 18–41.

[8] Ivankova E.P. *Modelirovanie stoykosti obolochkovoy formy po vyplavlyaemym modelyam k treshchinoobrazovaniyu pri okhlazhdenii v ney otlivki* [Modeling the crack resistance of a shell mold in investment casting during cooling of the casting]. Abstract of the diss. Cand. (Eng.) Sc. Komsomolsk-on-Amur, 2022, 24 p.

[9] Zhang Q., Cao M., Zhang D., Zhang S., Sun J. Research on integrated casting and forging process of aluminum automobile wheel. *Advances in Mechanical Engineering*, 2014, vol. 6, 870182. DOI:10.1155/2014/870182.

[10] Zhenglong L., Qi Z. Simulation and experiment research on squeeze casting combined with forging of automobile control arm. *Proceedings of the ASME*

2018 International Mechanical Engineering Congress and Exposition, 2018, vol. 2, 144113. DOI:10.1115/IMECE2018-86006

[11] Chang F.-C., Hwang W.-S., Lee C.-H., Wu C.-F., Yang, J.-B. Forging condition for removing porosities in the hybrid casting and forging process of 7075 aluminum alloy casting. *Materials Transactions*, 2004, vol. 45(6), pp. 1886-1890. DOI: 10.2320/matertrans.45.1886

[12] Dedov S., Lehmann G., Kawalla R. Application of combined casting-forging process for production of durable lightweight aluminum parts. *Key Engineering Materials*, 2013, vol. 554–557, pp. 264–273. DOI: 10.4028/www.scientific.net/KEM.554-557.264

[13] Krüger L., Jentsch E., Brunke L., Keßler A., Wolf G., Lehnert T., Schubert N., Wagner A., Landgrebe D. Development of an innovative lightweight piston through process combination "casting – forging". *Procedia Manufacturing*, 2019, vol. 27, pp. 172–176. DOI: 10.1016/j.promfg.2018.12.061

[14] Perrier, F., Bouvier, V., & Duperray, L. A new wheel design for reducing weight. *Materials Science Forum*, 2014, vol. 794–796, pp. 578–583. DOI: 10.4028/www.scientific.net/msf.794-796.578

[15] Böhmichen, U., Schubert, N., Lehnert, T., Sterzing, A., & Mauermann, R. From casting to forging – The combined simulation for a steel component. *Engineering Reports*, 2021, art no. e12400. DOI: 10.1002/eng2.12400.

[16] Evstigneev A.I., Dmitriev E.A., Chernyshova D.V., Odinokov V.I., et al. *Modelirovanie vneshnego silovogo vozdejstviya na obolochkovuyu formu dlya zalivki stali* [Modeling of external force action on a shell mold for steel pouring]*// Mathematical Models and Computer Simulations*, 2022, vol. 14, iss. 6, pp. 995–1001.

[17] Odinokov V.I., Dmitriev E.A., Evstigneev A.I., Sviridov A.V. *Matematicheskoe modelirovanie processov polucheniya otlivok v keramicheskie obolochkovye formy* [Mathematical modeling of casting processes in ceramic shell molds]. Moscow, Innovacionnoe mashinostroenie Publ., 2020, 256 p.

[18] *Litejnoe proizvodstvo: uchebnik dlya metallurgicheskih special'nostej vuzov* [Foundry production: a textbook for metallurgical specialties]. 2nd ed., revised and supplemented. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1987, 256 p.

[19] Pat. 2828801 Russian Federation. Int. Cl. B22C 9/04, B22C 9/08. Casting multilayer shell mold / V.I. Odinokov, A.I. Evstigneev, E.A. Dmitriev, et al. – No. 2024106208; appl. 05.03.2024; publ. 21.10.2024.

Odinokov V.I., Dr. Sci. (Eng.), Professor, Chief Researcher, Komsomolsk-na-Amure State University. e-mail: 79122718858@yandex.ru

Evstigneev A.I., Dr. Sci. (Eng.), Professor, Chief Researcher, Komsomolsk-na-Amure State University. e-mail: diss@knastu.ru

Dmitriev E.A., Dr. Sci. (Eng.), Professor, Rector of Komsomolsk-na-Amure State University. e-mail: rector@knastu.ru

Koloshenko Yu.B., Senior Lecturer, Komsomolsk-na-Amure State University. e-mail: koloschenko2011@yandex.ru

Evstigneeva A.A., Student, Komsomolsk-na-Amure State University. e-mail: annka.ewstic@mail.ru

Petrov V.V., Dr. Sci. (Eng.), Professor, Chief Researcher, Komsomolsk-na-Amure State University. e-mail: petrovpng@mail.ru